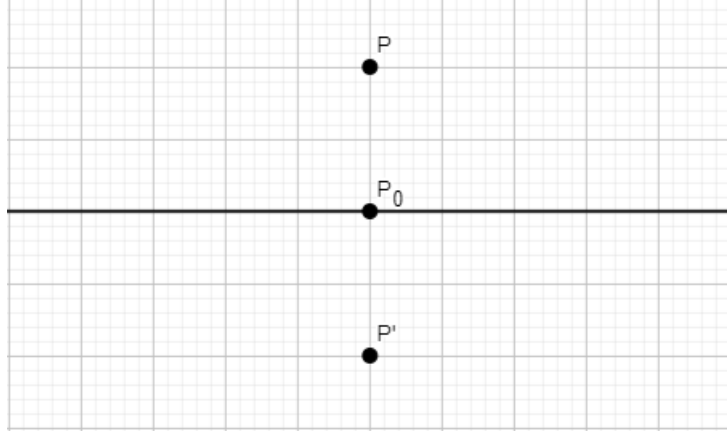


Exercițiul 1. Se consideră dreptele $d : x + y = 0$ și $\delta : x - y + 2 = 0$. Să se studieze ce se obține prin compunerea următoarelor izometrii: $S_d \circ S_\delta$ și $S_\delta \circ S_d$.

Soluție: Vom începe cu studierea compunerii dintre $S_d \circ S_\delta$. Pentru aceasta considerăm următoarea schemă:

$$(1) \quad P(x, y) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'')$$

Mai întâi vom scrie ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ . Deci vom considera $P' = s_\delta P$. În cele ce urmează suntem interesați de coordonatele punctului P' .



Pentru a identifica aceste coordonate vom proiecta mai întâi punctul pe dreaptă și vom obține punctul P_0 apoi vom considera acest punct mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul și simetricul lui P .

Se observă că dreapta PP' este perpendiculară pe dreapta δ , intersecția celor două fiind chiar proiecția punctului P . Avem:

$$(2) \quad PP' \perp \delta \rightarrow \overrightarrow{PP'} \parallel \vec{N}_\delta = (1, -1).$$

Deci:

$$(3) \quad PP' : \begin{cases} x' = t + x \\ y' = -t + y \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Următorul pas este identificarea parametrului $t \in \mathbb{R}$. Pentru aceasta observăm că $P_0 \in \delta$ și P_0 mijloc pentru $[PP']$. Deci:

$$(4) \quad P_0 \left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x + t}{2}, \frac{2y - t}{2} \right)$$

Din

$$(5) \quad P_0 \in \delta \rightarrow \frac{2x + t}{2} - \frac{2y - t}{2} + 2 = 0 \rightarrow t = -x + y - 2.$$

Înlocuim valoarea parametrului în (3) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ :

$$(6) \quad S_\delta : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

Într-o manieră asemănătoare vom proceda pentru a determina ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d . Pornim cu $P'(x', y')$ pe care dorim să îl simetrizăm față de dreapta d pentru a obține $P'' = s_d P'$. Fie $P'_0 = pr_d P' = P'' \cap d$.

Deoarece $P'P'' \perp d \rightarrow P'P''$:

$$(7) \quad \begin{cases} x'' = t + x' \\ y'' = t + y' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vom obține valoarea parametrului t utilizând informațiile referitoare la P'_0 . Mai exact, deoarece P'_0 este mijlocul segmentului $[P'P'']$ obținem:

$$(8) \quad P'_0 \left(\frac{x'' + x'}{2}, \frac{y'' + y'}{2} \right) \rightarrow P'_0 \left(\frac{2x' + t}{2}, \frac{2y' + t}{2} \right)$$

Fiindcă

$$(9) \quad P'_0 \in d \rightarrow \frac{2x' + t}{2} + \frac{2y' + t}{2} = 0 \rightarrow t = -x' - y'$$

Înlocuind valoarea parametrului t în (7) obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d :

$$(10) \quad S_d : \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = -x' \end{cases}$$

Să analizăm acum compunerea $S_d \circ S_\delta : \begin{cases} x'' = -x - 2 \\ y'' = -y + 2 \end{cases}$.

Verificăm mai întâi dacă aplicația obținută este o izometrie. Pentru aceasta:

$$(1) \quad S_d \circ S_\delta : f(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ morfism.}$$

$$(2) \quad \text{Verificăm dacă } AA^t = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ izometrie.}$$

Mai departe dorim să determinăm tipul izometriei. Calculăm:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_d \circ S_\delta$$

deplasare.

Identificăm punctele fixe prin rezolvarea sistemului:

$$(11) \quad \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 2 = x \\ -y + 2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Am obținut un unic punct fix deci izometria $S_d \circ S_\delta$ este rotația de centru $\Omega(-1, 1)$. În continuarea vom determina unghiul din relațiile:

$$(12) \quad \begin{cases} \cos \theta = -1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \theta = \pi.$$

Am obținut că $S_d \circ S_\delta = R_{\Omega, \pi}$.

Să analizăm centrul acestei rotații. Mai precis să observăm că $d \cap \delta = \Omega$ deci centrul este chiar punctul de intersecție a celor două drepte perpendiculare.

Să analizăm acum compunerea $S_\delta \circ S_d$:

$$(13) \quad P(x, y) \xrightarrow{S_d} P'(x', y') \xrightarrow{S_\delta} P''(x'', y''), S_d : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}, S_\delta : \begin{cases} x'' = y' - 2 \\ y'' = x' + 2 \end{cases}$$

Deci:

$$(14) \quad S_\delta \circ S_d : \begin{cases} x'' = -x - 2 \\ y'' = -y + 2 \end{cases} \rightarrow S_\delta \circ S_d = R_{\Omega, \pi}.$$

Exercițiul 2. Fie dreptele $d : x = 1$ și $\delta : \sqrt{3}x + y = 0$. Să se studieze compunerea dintre simetriile ortogonale față de cele două drepte adică: $S_d \circ S_\delta$, $S_\delta \circ S_d$.

Soluție: Vom începe cu studierea compunerii dintre $S_d \circ S_\delta$. Pentru aceasta:

$$(15) \quad P(x, y) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'').$$

Pentru a scrie ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ vom identifica coordonatele simetricului punctului P față de dreapta $\delta : P' = s_\delta P$.

Avem $PP' \perp \delta \rightarrow \overrightarrow{PP'} \parallel \vec{N}_\delta = (\sqrt{3}, 1)$

$$(16) \quad PP' : \begin{cases} x' = \sqrt{3}t + x \\ y' = t + y \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considerăm $P_0 = pr_\delta P = PP' \cap \delta$. Deci P_0 este mijlocul segmentului $[PP']$. Avem:

$$(17) \quad P_0 \left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x + \sqrt{3}t}{2}, \frac{2y + t}{2} \right).$$

Din

$$(18) \quad P_0 \in \delta \rightarrow \sqrt{3} \frac{2x + \sqrt{3}t}{2} + \frac{2y + t}{2} = 0 \rightarrow 2\sqrt{3}x + 3t + 2y + t = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{4}(2\sqrt{3}x + 2y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$$

Înlocuim valoarea parametrului în (16) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d :

$$(19) \quad S_d : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Ne îndreptăm atenția asupra ecuațiilor simetriei ortogonale față de dreapta d . Pentru aceasta pornim de la $P'(x', y')$ și dorim să determinăm coordonatele simetricului față de dreapta d : $P'' = s_d P'$. Deoarece $P'P'' \perp d \rightarrow \overrightarrow{P'P''} \parallel \bar{N}_d = (1, 0)$. Deci:

$$(20) \quad P'P'' : \begin{cases} x'' = t + x' \\ y'' = y' \end{cases}$$

Știm că $P'_0 = pr_d P' = P'P'' \cap d$. Deci:

$$(21) \quad P'_0 \left(\frac{x'' + x'}{2}, \frac{y'' + y'}{2} \right) \rightarrow P'_0 \left(\frac{2x' + t}{2}, y' \right)$$

Din $P'_0 \in d \rightarrow 2x' + t = 2 \rightarrow t = 2 - 2x'$.

Înlocuim în (20) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d :

$$(22) \quad S_d : \begin{cases} x'' = 2 - x' \\ y'' = y' \end{cases}$$

Determinăm acum compunerea dintre $S_d \circ S_\delta$:

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Să studiem dacă $S_d \circ S_\delta$ este o izometrie. Avem de verificat următoarele:

- (1) $f(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_d \circ S_\delta$ morfism.
- (2) Verificăm dacă A este ortogonală:

$$(23) \quad AA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_2 \rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ izometrie.}$$

Să determinăm tipul izometriei. Pentru aceasta calculăm valoarea determinantului matricei A :

$$(24) \quad \det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ deplasare}$$

Analizăm mulțimea punctelor fixe pentru a ne putea pronunța asupra naturii izometriei.

$$(25) \quad \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Deci izometria are un unic punct fix $\Omega(1, -\sqrt{3})$ prin urmare discutăm despre o rotație de centru Ω și unghi θ . Mai avem de identificat unghiul rotației. Pentru aceasta vom utiliza matricea A

$$(26) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}.$$

Am obținut $S_d \circ S_\delta = R_{\Omega, \frac{-\pi}{3}}$.

Să analizăm acum compunerea $S_\delta \circ S_d : P \xrightarrow{S_d} P' \xrightarrow{S_\delta} P''$ cu:

$$(27) \quad S_d : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases}, \quad S_\delta : \begin{cases} x'' = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

De această dată obținem:

$$(28) \quad S_\delta \circ S_d : \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

Verificăm dacă aplicația obținută este o izometrie. Avem de străbătut următoarele etape:

$$(1) \quad f(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow S_\delta \circ S_d \text{ morfism.}$$

(2) Mai avem de verificat dacă matricea A este ortogonală, deci:

$$(29) \quad A * A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_2 \rightarrow S_\delta \circ S_d \text{ izometrie.}$$

Observăm că:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_\delta \circ S_d \text{ deplasare.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe prin rezolvarea sistemului:

$$(30) \quad \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Se observă din nou existența unui unic punct fix $\Omega(1, -\sqrt{3})$ cu $\Omega = \delta \cap d$. Prin urmare vorbim despre o rotație de centru Ω și unghi $\theta : R_{\Omega, \theta}$.

Mai avem de identificat unghiul. Pentru aceasta cu ajutorul matricei A obținem valorile pentru $\sin$ și $\cos$:

$$(31) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Exercițiul 3. Fie dreptele $d : x + y = 0$ și $\delta : x + y + 2 = 0$. Să se studieze compunerea dintre $S_d \circ S_\delta$ și $S_\delta \circ S_d$.

Soluție: Vom începe cu compunerea $S_d \circ S_\delta$. Pentru aceasta considerăm:

$$(32) \quad P \xrightarrow{S_\delta} P' \xrightarrow{S_d} P''$$

Prin urmare dorim mai întâi să scriem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ . Pentru aceasta pornim de la punctul $P(x, y)$ și îl simetrizăm față de dreapta δ . Pentru a obține simetricul acestuia mai întâi îl vom proiecta pe dreapta δ și vom găsi $P_0 = PP' \cap \delta$, $P_0 = pr_d P$. Avem toate informațiile necesare pentru scrierea ecuațiilor dreptei PP' . Deci:

$$(33) \quad PP' : \begin{cases} x' = x + t \\ y' = y + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

P_0 este mijlocul segmentului $[PP']$ prin urmare $P_0 \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x+t}{2}, \frac{2y+t}{2} \right)$. Valoarea lui t va fi obținută din faptul că $P_0 \in \delta$:

$$(34) \quad 2x + t + 2y + y + 2 = 0 \rightarrow t = -x - y - 2$$

Înlocuim în (33) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ :

$$(35) \quad S_\delta : \begin{cases} x' = -y - 2 \\ y' = -x - 2 \end{cases}$$

Continuăm cu ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d . De această dată pornim cu $P'(x', y') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'')$. De această dată $P'_0 = d \cap P'P'' = pr_d P'$. Putem scrie ecuațiile dreptei $P'P''$:

$$(36) \quad P'P'' : \begin{cases} x'' = t + x' \\ y'' = t + y' \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $P'_0 \in d$ rezultă $t = -x' - y'$. Așadar ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d sunt:

$$(37) \quad S_d : \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = -x' \end{cases}$$

Putem scrie acum ecuațiile compunerii celor două simetrii:

$$(38) \quad S_d \circ S_\delta : \begin{cases} x'' = x + 2 \\ y'' = y + 2 \end{cases}, \quad S_\delta \circ S_d : \begin{cases} x'' = x + 2 \\ y'' = y + 2 \end{cases}.$$

Prin urmare de această dată vorbim despre o translație. A se observa că spre deosebire de celelalte exemple în cazul de față dreptele propuse sunt paralele, motiv pentru care compunerea celor două simetrii a condus către o translație.

Exercițiul 4. Să se studieze compunerea dintre $R_{\Omega, \frac{\pi}{6}}$ și $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}$ pentru $\Omega(1, 0)$.

Soluție: Dorim să studiem compunerea dintre $R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}$. Deci avem:

$$(39) \quad P(x, y) \xrightarrow{R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}} P'(x', y') \xrightarrow{R_{\Omega, \frac{\pi}{6}}} P''(x'', y'').$$

Vom începe cu ecuațiile rotației de centru Ω și unghi $\frac{\pi}{4}$:

$$(40) \quad R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog obținem:

$$(41) \quad R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Din compunerea celor două rotații se obține:

$$(42) \quad R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} : \begin{cases} x'' = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) y + \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \\ y'' = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) y - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Să analizăm tipul aplicației de mai sus:

$$(1) \text{ Observăm că } f(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \rightarrow R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \text{ morfism.}$$

(2) Verificăm dacă matricea A este ortogonală:

$$(43) \quad AA^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = I_2 \rightarrow R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \text{ izometrie.}$$

Observăm că:

$$(44) \quad \det A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \text{ deplasare}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe asociate izometriei:

$$(45) \quad \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) y + \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) y - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Prin urmare am obținut o rotație care are același centru ca cele două rotații propuse spre analiză: $R_{\Omega, \theta}$. Componentele matricei A ne furnizează următoarele informații referitoare la unghiul noii rotații:

$$(46) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Observăm următoarele:

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{7\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{7\pi}{12} \end{cases} \rightarrow .$$

unghiul rotației este suma unghiurilor celor două rotații $\rightarrow R_{\Omega, \alpha} \circ R_{\Omega, \beta} = R_{\Omega, \alpha + \beta}$.

Exercițiul 5. Să se studieze ce se obține prin compunerea $S_d \circ S_\delta$ pentru $d : \frac{X}{1} = \frac{Y}{1} = \frac{Z-1}{1}$ și $\delta : \frac{X-1}{0} = \frac{Y}{-1} = \frac{Z-1}{1}$.

Soluție: Vom utiliza următoarea schemă:

$$(48) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'', z'').$$

Vom începe cu ecuațiile simetriei față de dreapta δ : S_δ . Dorim să identificăm coordonatele simetricului punctului $P(x, y, z)$ față de dreapta δ : $P(x', y', z') = s_\delta P$. Mai întâi trebuie să obținem proiecția punctului P pe dreapta δ . Această proiecție va fi intersecția dintre dreaptă și planul care conține punctul și este perpendicular pe dreaptă.

Deci $P_0 = pr_\delta P = \delta \cap \pi$, $\pi \perp \delta$, $P \in \pi$. Din $\pi \perp \delta \rightarrow \vec{N}_\pi \parallel (0, -1, 1)$

$$(49) \quad \pi : \cdot(X - x) - 1 \cdot (Y - y) + 1 \cdot (Z - z) = 0$$

Avem:

$$(50) \quad \delta \cap \pi : \begin{cases} X = 1 \\ Y = -t \\ Z = t + 1 \\ -Y + Z + y - z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \rightarrow t + t + 1 + y - z = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}(-y + z - 1).$$

Obținem $P_0 \left(1, \frac{y-z+1}{2}, \frac{-y+z+1}{2}\right)$. Mai mult P_0 este mijlocul segmentului $[PP']$, deci $P + P' = 2P_0 \rightarrow P' = 2P_0 - P$. Se obțin astfel coordonatele:

$$(51) \quad S_\delta : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -z + 1 \\ z' = -y + 1 \end{cases}$$

În cele ce urmează vom determina coordonatele simetricului punctului P' față de dreapta $d : P'' = S_d P'$. Pentru aceasta considerăm $P'_0 = pr_d P' = d \cap \pi'$, $\pi' \perp d$, $P' \in d$. Deoarece $\pi' \perp d \rightarrow \vec{N}_{\pi'} \parallel \vec{d} = (1, 1, 1)$. Deci $(\pi') : X + Y + Z - x' - y' - z' = 0$. Să calculăm acum intersecția dintre dreaptă și plan:

$$(52) \quad d \cap \pi' : \begin{cases} X = t \\ Y = t \\ Z = t + 1 \\ X + Y + Z - x' - y' - z' = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x' + y' + z' - 1}{3}$$

Avem următoarele coordonate pentru $P'_0 \left(\frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}z' - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}z' - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{2}{3}\right)$ Obținem:

$$(53) \quad S_d : \begin{cases} x'' = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' - \frac{2}{3} \\ y'' = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' - \frac{2}{3} \\ z'' = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{4}{3} \end{cases}$$

În final:

$$(54) \quad S_d \circ S_\delta : \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ y'' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \\ z'' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 3 \end{cases}$$

Să verificăm dacă aplicația obținută este o izometrie. Observăm următoarele:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ morfism.}$$

$$(2) \text{ Verificăm dacă } A \text{ este ortogonală } AA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ izometrie.}$$

Calculăm valoarea determinantului matricei A pentru a ne putea pronunța asupra naturii izometriei.

$$(55) \quad \det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_d \circ S_\delta \text{ deplasare.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe pentru a stabili tipul deplasării:

$$(56) \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Să studiem compatibilitatea sistemului prezentat anterior. Se observă că $\det(A - I_3) = 0$ dar $\text{rang } \bar{A} = 3$ deci sistemul este incompatibil, nu avem puncte fixe. Ne aflăm în cazul compunerii dintre o rotație și o translație: $R_{d,\theta} \circ t_{\bar{u}}$, $\bar{u} \in \vec{d}$. Deoarece rotația are aceeași urmă cu compunerea prezentată anterior vom determina vectorul director al dreptei în jurul căreia se efectuează rotația prin rezolvarea sistemului:

$$(57) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare avem

$$f(X) = X + t(-2, 1, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Vom dori să identificăm valoarea scalarului t din egalarea următorului determinant cu 0.

$$(58) \quad \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2t \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -t-1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -t-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Deci vectorul cu care efectuăm translația este $\bar{u} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Identificăm acum dreapta din rezolvarea sistemului:

$$(59) \quad \begin{cases} 2x + 2y = -2t + 4 \\ -2x - 5y = -t - 1 \end{cases} \rightarrow (d) : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru a finaliza mai avem nevoie de unghiul de rotație θ . Acesta se identifică cu ajutorul valorilor proprii asociate matricei izometriei. Vom avea valori proprii 1, $a \pm bi$. Deci $\cos \theta = a$, $\sin \theta = b$.

$$(60) \quad \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 \rightarrow \begin{cases} \cos \theta = -1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \theta = \pi.$$

A se observa că dreptele propuse spre analiză sunt perpendiculare $\langle \bar{d}, \bar{\delta} \rangle = 0$.

Exercițiul 6. Să se studieze compunerea dintre $S_d \circ S_\delta$ pentru $\delta : \frac{X}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z-1}{3}$ și $d : \frac{X-1}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{3}$.

Soluție: Vom proceda ca în cazul problemei precedente:

$$(61) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'', z'').$$

Începem cu ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ . Pentru aceasta considerăm $P_0 = pr_\delta P = \pi \cap \delta$, $\pi \perp \delta$, $P \in \pi$. Obținem:

$$(62) \quad \pi : X + 2Y + 3Z - x - 2y - 3z = 0.$$

Determinăm acum coordonatele proiecției punctului pe dreaptă prin intersectarea acesteia cu planul perpendicular pe dreaptă care trece prin punctul P .

$$(63) \quad \delta \cap \pi : \begin{cases} X = t \\ Y = 2t \\ Z = 3t + 1 \\ X + 2Y + 3Z - x - 2y - 3z = 0. \end{cases} \rightarrow t = -\frac{x + 2y + 3z - 3}{14}$$

Deci:

$$(64) \quad P_0 \left(\frac{x+2y+3z-3}{14}, \frac{x+2y+3z-3}{7}, \frac{3x+6y+9z+5}{14} \right)$$

Considerăm P_0 mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul P și simetricul acestuia față de dreaptă P' : $P' = 2P_0 - P$:

$$(65) \quad S_\delta : \begin{cases} x' = \frac{-6x+2y+3z-3}{7} \\ y' = \frac{2x-3y+6z-6}{7} \\ z' = \frac{3x+6y+2z+5}{7} \end{cases}$$

Continuăm cu determinarea simetriei ortogonale față de dreapta d . Fie $P'_0 = pr_d P' = \pi' \cap d$, $\pi' \perp d$, $P' \in \pi'$. Avem:

$$(66) \quad \begin{cases} X = t + 1, \\ Y = 2t \\ Z = 3t \\ X + 2Y + 3Z - x' - 2y' - 3z' = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x' + 2y' + 3z' - 1}{14}$$

Deci

$$(67) \quad P'_0 \left(\frac{x' + 2y' + 3z' - 1}{14}, \frac{x' + 2y' + 3z' - 1}{7}, \frac{3x' + 6y' + 9z' - 3}{14} \right)$$

Deoarece P'_0 este mijlul segmentului $[P'P'']$ obținem $P'' = 2P'_0 - P'$ deci:

$$(68) \quad S_d : \begin{cases} x'' = \frac{-6x' + 2y' + 3z' + 13}{7} \\ y'' = \frac{2x' - 3y' + 6z' - 2}{7} \\ z'' = \frac{3x' + 6y' + 2z' - 3}{7} \end{cases}$$

Putem finaliza acum compunerea celor două simetrii:

$$(69) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este evident că în cazul de față am obținut o translație. De observat faptul că dreptele d și δ sunt paralele deci prin compunerea simetriilor ortogonale față de cele două drepte s-a obținut o translație de vector $\vec{u} = (\frac{16}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{8}{7})$. Deoarece $\vec{d} = \vec{\delta} = (1, 2, 3)$ observăm că $\langle \vec{d}, \vec{u} \rangle = 0$ deci vectorul cu care se efectuează translația este perpendicular pe vectorii directori ai celor două drepte. Mai mult să calculăm distanța dintre cele două drepte. Fiind paralele este suficient să alegem un punct de pe dreapta δ și să calculăm distanța de la acesta la dreapta d . Fie $A(0, 0, 1) \in \delta$, $B(1, 0, 0) \in d$.

$$(70) \quad d(A, d) = \frac{||\vec{AB} \times \vec{d}||}{||\vec{d}||} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{||(2, -4, 2)||}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{24}{7}}.$$

Să observăm că:

$$(71) \quad ||\bar{u}|| = \frac{\sqrt{256 + 16 + 24}}{7} = 2\sqrt{\frac{24}{7}} \rightarrow ||\bar{u}|| = 2d(d, \delta).$$

Exercițiul 7. Să se analizeze $S_\alpha \circ S_\beta$ pentru $\alpha : x + y + 2z + 1 = 0$, $\beta : x - y + 2 = 0$.

Soluție: Vom considera:

$$(72) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\beta} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_\alpha} P''(x'', y'', z'')$$

Începem cu simetria ortogonală față de planul β . Deci vom porni cu $P(x, y, z)$ și vom căuta simetricul acestuia față de planul β : $P' = s_\beta P$. Mai întâi vom proiecta punctul pe plan obținând astfel: $P_0 = pr_\beta P = PP' \cap \beta$. Deci:

$$(73) \quad (PP') : \begin{cases} x' = x + t \\ y' = y - t \\ z' = z, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deoarece P_0 mijlocul segmentului $[PP']$:

$$(74) \quad P_0 \left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}, \frac{z + z'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x + t}{2}, \frac{2y - t}{2}, z \right).$$

Vom determina valoarea parametrului t impunând condiția ca $P_0 \in \beta$. Deci:

$$(75) \quad 2x + t - 2y + t + 4 = 0 \rightarrow t = -x + y - 2$$

Putem scrie acum ecuațiile simetriei ortogonale față de planul β :

$$(76) \quad S_\beta : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \\ z' = z \end{cases}$$

Continuăm cu ecuațiile simetriei ortogonale față de planul α . Vom considera $P'' = s_\alpha P'$. Din nou este necesară determinarea proiecției punctului P' pe planul α . Avem $P'_0 = pr_\alpha P' = P'P'' \cap \alpha$. Obținem

$$(77) \quad P'P'' : \begin{cases} x'' = x' + t \\ y'' = y' + t \\ z'' = z' + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mai mult, P'_0 este mijlocul segmentului $[P'P'']$ deci:

$$P'_0 \left(\frac{x'' + x'}{2}, \frac{y'' + y'}{2}, \frac{z'' + z'}{2} \right) \rightarrow P'_0 \left(\frac{2x' + t}{2}, \frac{2y' + t}{2}, \frac{2z' + 2t}{2} \right)$$

Știm că $P'_0 \in \alpha \rightarrow t = \frac{-x' - y' - 2z' - 1}{3}$. Putem scrie acum ecuațiile simetriei ortogonale față de planul α :

$$(78) \quad S_\alpha : \begin{cases} x'' = \frac{2x' - y' - 2z' - 1}{3} \\ y'' = \frac{-x' + 2y' - 2z' - 1}{3} \\ z'' = \frac{-2x' - 2y' - z' - 2}{3} \end{cases}$$

Finalizăm cu ecuațiile compunerii celor două simetrii ortogonale:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

- (1) Este evident că rezultatul obținut este un morfism potrivit scrierii matriceale.
(2) Să vedem acum dacă matricea asociată este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow S_\alpha \circ S_\beta \text{ izometrie} .
 \tag{80}$$

În cele ce urmează vom calcula valoarea determinatului matricei A pentru a stabili dacă lucrăm cu o deplasare sau cu o antideplasare.

$$\det A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_\alpha \circ S_\beta \text{ deplasare} .
 \tag{81}$$

Vom analiza mulțimea punctelor fixe pentru a ne putea pronunța asupra tipului izometriei identificate:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}
 \tag{82}$$

Se obține $\det(A - I_3) = 0 \rightarrow \text{rang}(A - I_3) < 3$ Mai mult:

$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0
 \tag{83}$$

Deci sistemul este compatibil nedeterminat. Alegem $\delta = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A - I_3) = 2 \rightarrow x, y$ necunoscute principale și $z = t \in \mathbb{R}$ necunoscută secundară. Sistemul devine:

$$\begin{cases} -2x + y = t + \frac{7}{2} \\ x - 2y = t - \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -t - \frac{3}{2} \\ y = -t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .
 \tag{84}$$

Avem infinitate de puncte fixe toate aparținând dreptei de ecuație:

$$d : \begin{cases} x = -t - \frac{3}{2} \\ y = -t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}
 \tag{85}$$

Mai avem de identificat unghiul cu care se efectuează rotația. Considerăm o schimbare ortonormată de baze astfel încât $\bar{a} = (1, 1, 1)$, vectorul director al lui d , să devină primul vector al noii baze și cele două baze să fie la fel orientate. Urma

lui f are în raport cu noua bază matricea

$$(86) \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cele două matrici sunt asemenea deci au același polinom caracteristic:

$$(87) \quad p_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1),$$

deci avem valorile proprii $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$.

Determinăm polinomul caracteristic pentru A . Acesta va avea valorile proprii $1, a \pm ib$. Determinăm valoarea unghiului din condițiile:

$$(88) \quad \begin{cases} \cos \theta = a \\ \sin \theta = b \end{cases}$$

Avem:

$$(89) \quad \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

Deci $\cos \theta = -1$ și $\sin \theta = 0$ rezultă $\theta = \pi$. Mai mult se observă că planele α și β sunt două plane perpendiculare care se intersectează după dreapta în jurul căreia se efectuează rotația.

$$(90) \quad \alpha \cap \beta : \begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow d : \begin{cases} x = -t - \frac{3}{2} \\ y = -t + \frac{1}{2}, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercițiul 8. Să se studieze $S_\alpha \circ S_\beta$ pentru $\alpha : x + y + 2z = 0$, $\beta : x + y + 2z + 1 = 0$.

Soluție: Avem:

$$(91) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\beta} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_\alpha} P''(x'', y'', z'').$$

Vom începe cu ecuațiile simetriei ortogonale față de planul β . Pentru aceasta $P' = s_\beta P$. Identificăm mai întâi $P_0 = pr_\beta P = PP' \cap \beta$. Avem:

$$(92) \quad PP' : \begin{cases} x' = t + x \\ y' = t + y \\ z' = 2t + z \end{cases}$$

Deoarece P_0 mijlocul lui $[PP']$ obținem:

$$P_0 \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x+t}{2}, \frac{2y+t}{2}, \frac{2z+2t}{2} \right).$$

Din $P_0 \in \beta \rightarrow t = \frac{-x-y-2z-1}{3}$. Ecuațiile simetriei ortogonale față de planul β sunt:

$$(93) \quad S_\beta : \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Continuăm cu ecuațiile simetriei ortogonale față de planul α . Pentru aceasta vom considera $P'' = s_\alpha P'$. Să scriem ecuațiile dreptei $P'P''$:

$$(94) \quad P'P'' : \begin{cases} x'' = t + x' \\ y'' = t + y' \\ z'' = 2t + z' \end{cases}$$

Considerăm $P'_0 = pr_\alpha P' = PP' \cap \alpha$. Din P'_0 mijlocul segmentului $[P'P'']$ obținem $t = \frac{-x' - y' - 2z'}{3}$:

$$(95) \quad S_\alpha : \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ y'' = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ z'' = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' \end{cases}$$

Să analizăm acum compunerea celor două simetrii:

$$(96) \quad \begin{aligned} S_\alpha \circ S_\beta : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Am obținut o translație de vector $\bar{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Se observă că $\alpha \parallel \beta$, $\bar{u} \parallel \bar{N}_\alpha$. Deoarece cele două plane sunt paralele pentru a determina distanța dintre cele două este suficient să alegem un punct din planul α și să calculăm distanța de la punctul ales la planul β . Fie $A(0, 0, 0) \in \alpha$, $d(A, \beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Dar $\|\bar{u}\| = \frac{\sqrt{6}}{3} = 2d(\alpha, \beta)$.

Exercițiul 9. Să se analizeze ce se obține prin $R_{Ox, \frac{\pi}{6}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}}$.

Soluție: Pornim cu:

$$(97) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{R_{Ox, \frac{\pi}{4}}} P'(x', y', z') \xrightarrow{R_{Ox, \frac{\pi}{6}}} P''(x'', y'', z'')$$

Vom scrie mai întâi ecuațiile celor două rotații și apoi vom analiza compunerea celor două rotații:

$$(98) \quad R_{Ox, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(99) \quad R_{Ox, \frac{\pi}{6}} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Prin compunerea celor două rotații se obține:

$$(100) \quad R_{Ox, \frac{\pi}{6}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1) Rezultatul anterior este morfism potrivit scrierii de mai sus.

(2) Verificăm dacă matricea asociată este ortogonală:

$$(101) \quad AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow R_{Ox, \frac{\pi}{6}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}} \text{ izometrie.}$$

Calculăm $\det A = 1 > 0 \rightarrow R_{Ox, \frac{\pi}{6}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{4}}$ deplasare. Vom analiza mulțimea punctelor fixe asociate, adică soluțiile sistemului:

$$(102) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Rezultă că avem o infinitate de puncte fixe toate aparținând axei Ox . Unghiul de rotație se identifică cu ajutorul matricei A care este o matrice de rotație în jurul axei Ox .

$$(103) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12}.$$

Exercițiul 10. Să se determine izometria f pentru care $f \circ S_\pi = t_{\bar{u}}$, $\pi : x + y + z + 1 = 0$, $\bar{u} = (1, 1, 1)$.

Soluție: Am demonstrat în seminarul precedent că S_π este o aplicație involutivă deci $S_\pi \circ S_\pi = Id$. Prin urmare $f = t_{\bar{u}} \circ S_\pi$.

$$(104) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_\pi} P'(x', y', z') \xrightarrow{t_{\bar{u}}} P''(x'', y'', z'')$$

Să determinăm ecuațiile simetriei ortogonale față de planul π . Avem $P' = s_\pi P$. Mai întâi avem nevoie de proiecția punctului pe plan: $P_0 = pr_\pi P = PP' \cap \pi$.

$$(105) \quad PP' : \begin{cases} x' = x + t \\ y' = y + t \\ z' = z + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Deoarece P_0 este mijlocul segmentului $[PP']$ obținem $P_0 \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x+t}{2}, \frac{2y+t}{2}, \frac{2z+t}{2} \right)$.

Identificăm valoarea lui t utilizând faptul că $P_0 \in \pi$:

$$(106) \quad 2x + t + 2y + t + 2z + t + 2 = 0 \rightarrow t = \frac{-2x - 2y - 2z - 2}{3}.$$

Obținem ecuațiile simetriei ortogonale:

$$(107) \quad S_\pi : \begin{cases} x' = \frac{x - 2y - 2z - 2}{3} \\ y' = \frac{-2x + y - 2z - 2}{3} \\ z' = \frac{-2x - 2y + z - 2}{3} \end{cases}$$

Amintim și ecuațiile translației:

$$(108) \quad t_{\bar{u}}(P') : \begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' + 1 \end{cases}$$

Prin compunerea celor două izometrii se obține:

$$(109) \quad t_{\bar{u}} \circ S_\pi : \begin{cases} x'' = \frac{x - 2y - 2z + 1}{3} \\ y'' = \frac{-2x + y - 2z + 1}{3} \\ z'' = \frac{-2x - 2y + z + 1}{3} \end{cases}$$

Să analizăm rezultatul obținut:

(1)

$$f(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow t_{\bar{u}} \circ S_\pi \text{ morfism.}$$

(2) $AA^t = I_3 \rightarrow t_{\bar{u}} \circ S_\pi$ izometrie.

Să calculăm valoarea determinantului pentru a determina tipul izometriei:

$$(110) \quad \det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -1 \rightarrow t_{\bar{u}} \circ S_\pi \text{ antideplasare.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe. Acestea sunt soluțiile sistemului:

$$(111) \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sistemul precedent are o infinitate de soluții, toate aparținând planului de ecuație generală:

$$(112) \quad \pi' : x + y + z - 1 = 0.$$

Ne așteptam la acest rezultat deoarece vectorul este colinar cu normala la planul propus spre analiză.

Exercițiul 11. Să se determine izometria f pentru care $f \circ S_d = t_{\bar{u}}$, $d : \frac{X}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z-1}{3}$ și $\bar{u} = (1, 1, 1)$.

Soluție: Avem:

$$(113) \quad P(x, y, z) \xrightarrow{S_d} P'(x', y', z') \xrightarrow{t_{\bar{u}}} P''(x'', y'', z'').$$

Determinăm mai întâi $P' = s_d P$, $pr_{\pi} P = d \cap \pi$, $\pi \perp d$, $P \in \pi$.

$$(114) \quad P_0 := \pi \cap d : \begin{cases} X = t \\ Y = 2t \\ Z = 3t + 1 \\ X + 2Y + 3Z - x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x + 2y + 3z - 3}{14}$$

Deci

$$P_0 \left(\frac{x + 2y + 3z - 3}{14}, \frac{x + 2y + 3z - 3}{7}, \frac{3x + 6y + 9z + 5}{14} \right).$$

Din $P' = 2P_0 - P$ obținem:

$$(115) \quad S_d : \begin{cases} x' = \frac{-6x + 2y + 3z - 3}{7} \\ y' = \frac{2x - 3y + 6z - 6}{7} \\ z' = \frac{3x + 6y + 2z + 5}{7} \end{cases}$$

Continuăm cu ecuațiile translației:

$$(116) \quad t_{\bar{u}}(P') : \begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' + 1 \end{cases}$$

Deci:

$$(117) \quad t_{\bar{u}} \circ S_d : \begin{cases} x'' = \frac{-6x + 2y + 3z + 4}{7} \\ y'' = \frac{2x - 3y + 6z + 1}{7} \\ z'' = \frac{3x + 6y + 2z + 12}{7} \end{cases}$$

$$(1) \text{ Deoarece } f(X) = AX + B \leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix} \rightarrow f \text{ morfism.}$$

(2) Observăm că

$$AA^t = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow f \text{ izometrie.}$$

(3) Calculăm determinantul matricei A , $\det A = -1 \rightarrow f$ antideplasare.

$$(4) \text{ Studiem mulțimea punctelor fixe, adică soluțiile sistemului: } \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\det \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang}(A - I_3) < 3$ sistemul este incompatibil deci nu avem puncte fixe. Vorbim

despre compunerea dintre o simetrie ortogonală față de o dreaptă și o translație.

Pentru a identifica dreapta vom alege două puncte pentru care vom calcula imaginile acestora prin izometrie. Dreapta va fi determinată în mod unic de mijloacele segmentelor determinate de punctele alese și imaginile acestora.

Fie $A(1, 1, 1)$ și $B(0, 0, 0)$. Atunci $A' = f(A) = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{23}{7})$ și $B' = f(B) = (\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{12}{7})$.

În continuare A_0 este mijlocul segmentului $[AA']$, $A_0(\frac{10}{14}, \frac{13}{14}, \frac{30}{14})$ și B_0 este mijlocul segmentului $[BB']$, $B_0(\frac{4}{14}, \frac{1}{14}, \frac{12}{14})$.

Dreapta pe care o căutăm este determinată de A_0 și B_0 : $d : \frac{x - \frac{4}{14}}{\frac{6}{14}} = \frac{y - \frac{1}{14}}{\frac{12}{14}} = \frac{z - \frac{12}{14}}{\frac{18}{14}} \rightarrow d : \frac{x - \frac{4}{14}}{1} = \frac{y - \frac{1}{14}}{2} = \frac{z - \frac{12}{14}}{3}$.

Alegem acum $B_0(\frac{4}{14}, \frac{1}{14}, \frac{12}{14}) \in d$ și calculăm $f(B_0)$ pentru a determina vectorul cu care se efectuează translația. Obținem $B'' = f(B_0) = (\frac{5}{7}, \frac{13}{14}, \frac{15}{7})$. Deci vectorul cu care translăm este: $\overrightarrow{B_0 B''} = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}) \parallel \bar{d} = (1, 2, 3)$.