

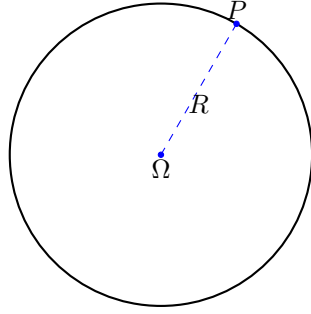
1. ECUAȚIILE HIPERSFEREI

Fie $\mathcal{E}^n = \left(E, \left(\vec{E}, \langle, \rangle \right), \Phi \right)$ un spațiu afin euclidian n -dimensional, $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ funcția distanță și $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ un reper ortonormat.

Definiția 1. Fie $\Omega \in E$ și $R > 0$. **Hipersfera** de **centru** Ω și **rază** R este mulțimea punctelor P ale spațiului a.e. E cu proprietatea că $d(\Omega, P) = R$.

$$\mathcal{S}^{n-1}(\Omega, R) = \{P \in E \mid d(\Omega, P) = R\}$$

Exteriorul hipersferei se definește prin $\text{Ext } \mathcal{S}(\Omega, R) = \{P \in E \mid d(\Omega, P) > R\}$, iar **interiorul** hipersferei prin $\text{Int } \mathcal{S}(\Omega, R) = \{P \in E \mid d(\Omega, P) < R\}$.



Fie $P \in E$ de vector de poziție $\bar{r}$ în raport cu $\mathcal{R}$. Ecuația vectorială a hipersferei cu centrul în Ω , de rază R :

$$P \in \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \|\vec{\Omega P}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \|\bar{r} - \bar{r}_\Omega\|^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \|\bar{r}\|^2 - 2\langle \bar{r}, \bar{r}_\Omega \rangle + (\|\bar{r}_\Omega\|^2 - R^2) = 0.$$

Presupunem că $\bar{r} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i$, $\bar{r}_\Omega = \sum_{i=1}^n \omega^i \bar{e}_i$. Ecuația generală a hipersferei:

$$\sum_{i=1}^n (x^i - \omega^i)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (x^i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \omega^i x^i + \alpha = 0, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n (\omega^i)^2 - R^2.$$

O hipersferă într-un plan afin euclidian $\mathcal{E}^2$ este un cerc, iar într-un spațiu a.e. 3-dimensional $\mathcal{E}^3$ este o sferă.

În dimensiune mică vom nota coordonatele unui punct arbitrar cu (x, y) , respectiv (x, y, z) , iar bazele reperelor ortonormate cu $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, respectiv $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Ecuația generală a cercului $\mathcal{S}^1(\Omega, R)$ în $\mathcal{E}^2$, cu $\Omega(x_0, y_0)$ este

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Ecuația generală a sferei $\mathcal{S}^2(\Omega, R)$ în $\mathcal{E}^3$, cu $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

Reciproc, ne interesează condițiile pe care trebuie să le verifice numerele reale $\lambda_i, \alpha, i \in \overline{1, n}$ pentru ca ecuația

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i + \alpha = 0, \quad \lambda^1, \dots, \lambda^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

să reprezinte ecuația generală a unei hipersfere.

Ecuația (2) este echivalentă cu

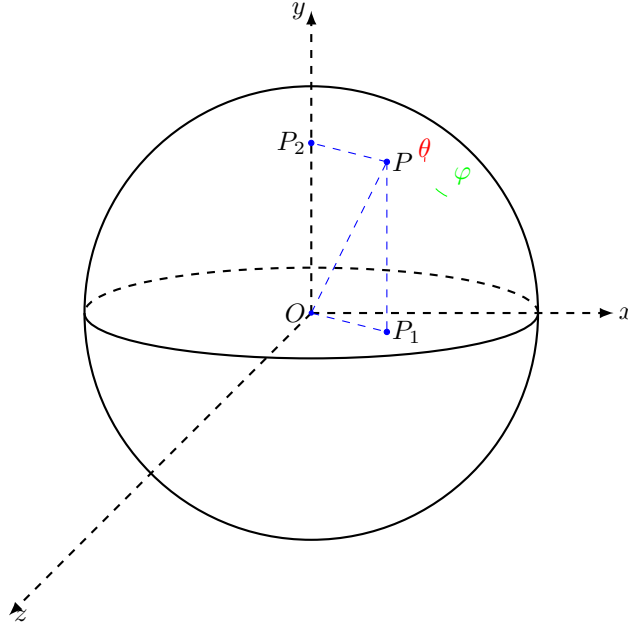
$$\sum_{i=1}^n \left(x^i + \frac{\lambda_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 - \alpha.$$

Dacă $\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 > 4\alpha$ rezultă că mulțimea punctelor ale căror coordonate verifică (2) este hipersfera de centru $\Omega(-\frac{\lambda_1}{2}, -\frac{\lambda_2}{2}, \dots, -\frac{\lambda_n}{2})$

și rază $R = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 - 4\alpha}$.

Dacă $\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 = 4\alpha$, mulțimea anterioară se reduce la punctul $\left\{ \Omega(-\frac{\lambda_1}{2}, -\frac{\lambda_2}{2}, \dots, -\frac{\lambda_n}{2}) \right\}$, iar în cazul $\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 < 4\alpha$ se obține mulțimea vidă.

1.1. Ecuațiile parametrice ale sferei (facultativ). În $\mathcal{E}^3$ înzestrat cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se consideră sfera de centru $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ și raza R . Vom determina mai întâi ecuațiile parametrice ale sferei cu centrul în origine, de rază R , obținută din sfera inițială prin translația de vector $\vec{\Omega\bar{O}}$. Fie $P(x, y, z)$ un punct arbitrar al acestei sfere. Notăm cu P_1 proiecția ortogonală a lui P pe planul $(xOy) = O + [\bar{i}, \bar{j}]$ și cu P_2 proiecția ortogonală a lui P pe axa $Oz = O + [\bar{k}]$. Fie $\varphi = \widehat{(\bar{i}, \vec{OP_1})}$ și $\theta = \widehat{(\bar{k}, \vec{OP})}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$. Putem numi φ longitudinea și θ co-latitudinea punctului P .



Ecuațiile parametrice ale sferei $\mathcal{S}(\Omega, R)$:

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi + x_0, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi + y_0, \\ z = R \cos \theta + z_0. \end{cases}$$

1.2. Ecuația unei hipersfere circumscrise unui n -simplex în $\mathcal{E}^n$ (facultativ). Amintim că un n -simplex în $\mathcal{E}^n$ este înfășurătoarea convexă a unui sistem de $n + 1$ puncte afin independente $\langle A_0, A_1, \dots, A_n \rangle$, unde $A_j(a_j^i), j = \overline{0, n}, i = \overline{1, n}$. Pentru orice n -simplex există o unică hipersferă circumscrisă acestuia (care trece prin toate vârfurile simplexului) și să determinăm ecuația ei, de ecuație:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n (x^i)^2 & x^1 & x^2 & \dots & x^n & 1 \\ \sum_{i=1}^n (a_0^i)^2 & a_0^1 & a_0^2 & \dots & a_0^n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n (a_n^i)^2 & a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. INTERSECȚIA DINTRE O DREAPTĂ ȘI O HIPERSFERĂ. HIPERPLANUL TANGENT UNEI HIPERSFERE ÎNTR-UN PUNCT AL EI.

2.1. Poziția relativă a unei drepte față de o hipersferă. Fie hipersfera $\mathcal{S}(\Omega, R)$ de ecuație vectorială

$$(4) \quad H(P) := \|\vec{\Omega P}\|^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow \|\bar{r} - \bar{r}_\Omega\|^2 - R^2 = 0$$

și dreapta $\delta = P_0 + [\bar{u}]$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ și $P_0(\bar{r}_0)$, de ecuație vectorială

$$(5) \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vrem să studiem mulțimea $\delta \cap \mathcal{S}(\Omega, R)$.

$$P(\bar{r}) \in \delta \cap \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\Omega}\|^2 - R^2 = 0, \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\bar{u} \end{cases} \Rightarrow \|\overrightarrow{\Omega P_0} + t\bar{u}\|^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(6) \quad \|\bar{u}\|^2 t^2 + 2\langle \overrightarrow{\Omega P_0}, \bar{u} \rangle t + H(P_0) = 0.$$

Ecuția (6) este o ecuație de gradul II în necunoscuta t , al cărei discriminant este

$$(7) \quad \frac{\Delta}{4} = \langle \overrightarrow{\Omega P_0}, \bar{u} \rangle^2 - \|\bar{u}\|^2 H(P_0).$$

Dar $G(\overrightarrow{\Omega P_0}, \bar{u}) = \|\overrightarrow{\Omega P_0}\|^2 \|\bar{u}\|^2 - \langle \overrightarrow{\Omega P_0}, \bar{u} \rangle^2$ și $d(\Omega, \delta) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{\Omega P_0}, \bar{u})}{G(\bar{u})}}$, deci

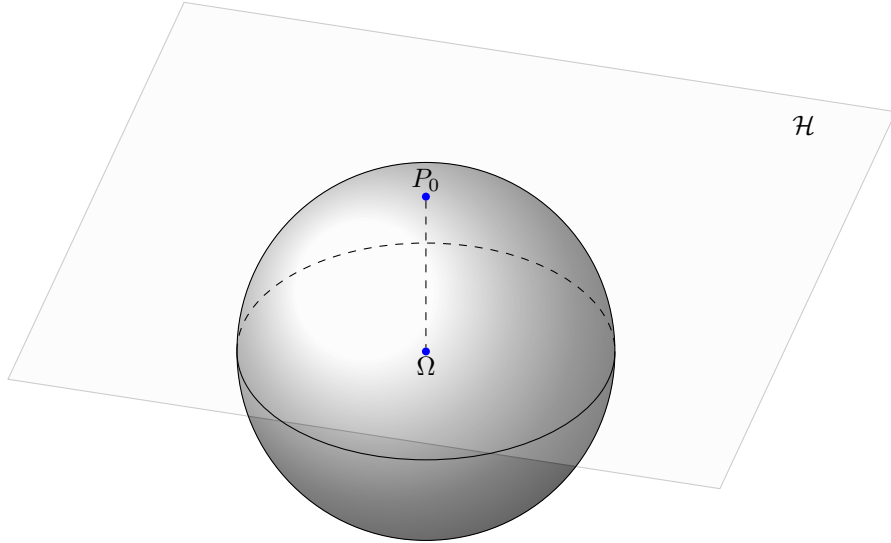
$$(8) \quad \frac{\Delta}{4} = \|\bar{u}\|^2 (R^2 - d^2(\Omega, \delta))$$

- (1) Dacă $d(\Omega, \delta) < R$, ecuația (6) are două soluții reale distincte t_1 și t_2 , deci $\delta \cap \mathcal{S}(\Omega, R) = \{P_1, P_2\}$, $P_1 = P_0 + t_1 \bar{u}$ și $P_2 = P_0 + t_2 \bar{u}$. În acest caz spunem că dreapta δ este **secantă** hipersferei.
- (2) Dacă $d(\Omega, \delta) = R$, ecuația (6) are două soluții reale egale $t_1 = t_2$, deci $\delta \cap \mathcal{S}(\Omega, R)$ este formată dintr-un punct dublu. În acest caz dreapta δ este **tangentă** hipersferei.
- (3) Dacă $d(\Omega, \delta) > R$, ecuația (6) nu are soluții reale și $\delta \cap \mathcal{S}(\Omega, R) = \emptyset$. Spunem că dreapta δ este **exterioară** hipersferei.

2.2. Hiperplanul tangent hipersferei într-un punct al ei.

Teorema 1. Fie P_0 un punct al hipersferei $\mathcal{S}(\Omega, R)$. Considerăm mulțimea $\mathcal{M}$ a tuturor tangentelor la hipersferă în punctul P_0 . Atunci $\mathcal{M}$ este un hiperplan $\mathcal{H}$ prin P_0 , de vector normal $\overrightarrow{\Omega P_0}$. În plus ecuația hiperplanului $\mathcal{H}$ se obține din ecuația hipersferei prin dedublare în $P_0(\bar{r}_0)$:

$$(9) \quad \langle \bar{r} - \bar{r}_\Omega, \bar{r}_0 - \bar{r}_\Omega \rangle - R^2 = 0.$$



2.3. Ecuația hiperplanelor tangente la hipersferă, de direcție normală dată. Fie hipersfera $\mathcal{S}(\Omega, R)$ și hiperplanul fixat $\mathcal{H}$ ce trece prin P_0 , de direcție normală $[\bar{N}]$. Dorim să aflăm ecuațiile hiperplanelor paralele cu $\mathcal{H}$, care sunt tangente hipersferei.

Fie δ normală prin centrul hipersferei Ω la hiperplanul dat $\mathcal{H}$, deci $\delta = \Omega + [\bar{N}]$. Fie $P \in \delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega P} = t\bar{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Atunci $P \in \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega P}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{R^2}{\|\bar{N}\|^2}$. Obținem deci că normala prin Ω la hiperplanul $\mathcal{H}$ intersectează hipersfera în două puncte, $P_1 = \Omega + \frac{R}{\|\bar{N}\|} \bar{N}$ și $P_2 = \Omega - \frac{R}{\|\bar{N}\|} \bar{N}$. Ecuațiile hiperplanelor tangente hipersferei, paralele cu $\mathcal{H}$, se obțin din ecuația hipersferei prin dedublare în P_1 , respectiv P_2 :

$$(\mathcal{H}_1) \langle \overrightarrow{\Omega P}, \bar{N} \rangle + R\|\bar{N}\| = 0,$$

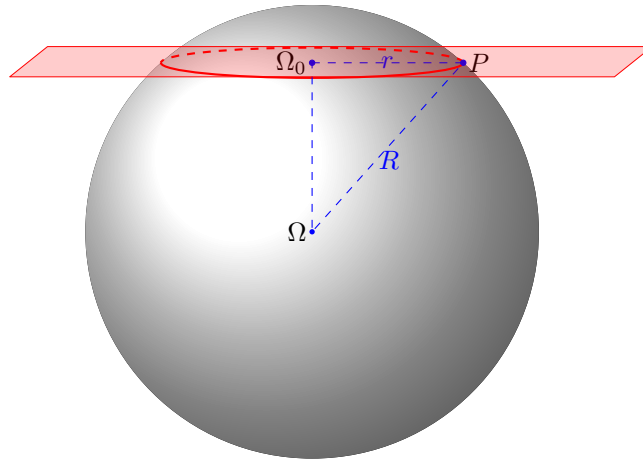
$$(\mathcal{H}_2) \langle \overrightarrow{\Omega P}, \bar{N} \rangle - R\|\bar{N}\| = 0.$$

Dacă $\bar{N}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $\Omega(\omega^1, \dots, \omega^n)$, ecuațiile anterioare devin:

$$(\mathcal{H}_1) \sum_{i=1}^n a_i(x^i - \omega^i) + R\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0,$$

$$(\mathcal{H}_2) \sum_{i=1}^n a_i(x^i - \omega^i) - R \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0.$$

3. INTERSECȚIA DINTRE O HIPERSFERĂ ȘI UN HIPERPLAN. ECUAȚIA UNUI CERC ÎN $\mathcal{E}^3$.



Teorema 2. Fie hypersfera $\mathcal{S}(\Omega, R)$ și un hiperplan $\mathcal{H}$. Fie Ω_0 proiecția ortogonală a centrului sferei Ω pe hiperplanul $\mathcal{H}$.

- (1) Dacă $d(\Omega, \mathcal{H}) > R$, atunci $\mathcal{H} \subset \text{Ext } \mathcal{S}(\Omega, R)$. Spunem că $\mathcal{H}$ este **exterior** hypersferei.
- (2) Dacă $d(\Omega, \mathcal{H}) = R$, atunci $\mathcal{H}$ e hiperplanul **tangent** hypersferei în Ω_0 .
- (3) Dacă $d(\Omega, \mathcal{H}) < R$, atunci $\mathcal{S}(\Omega, R) \cap \mathcal{H}$ este hypersfera de centru Ω_0 și rază $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \mathcal{H})^2}$ din hiperplanul $\mathcal{H}$. În acest caz hiperplanul este **secant** hypersferei.

Ne punem acum problema reciprocă: dat un cerc de centru Ω_0 și rază r situat într-un plan dat în $\mathcal{E}^3$, cum pot determina o sferă ce intersectează planul dat după cercul dat? Centrul unei astfel de sfere se găsește pe normala la plan prin centrul cercului Ω_0 . Odată fixat un centru Ω , raza sferei este $R = \sqrt{d(\Omega, \Omega_0)^2 + r^2}$, unde r este raza cercului. Observăm că există o infinitate de sfere ce satisfac condițiile problemei.

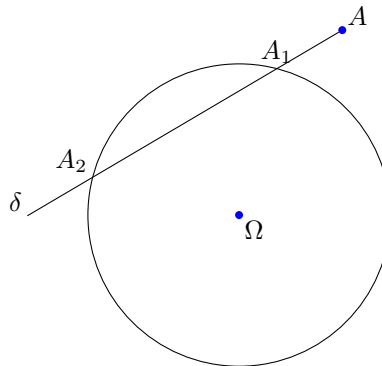
4. PUTEREA UNUI PUNCT FAȚĂ DE O HIPERSFERĂ. HIPERPLANUL RADICAL A DOUĂ HIPERSFERE. (FACULTATIV)

Fie hypersfera $\mathcal{S}(\Omega, R)$ și punctul $A \in E$. Se consideră o dreaptă arbitrară δ prin A care intersectează hypersfera în punctele A_1, A_2 , posibil confundate.

Definiția 2. Se numește **puterea** punctului A față de hypersfera $\mathcal{S}(\Omega, R)$ numărul real

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(A) = \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AA_2} \rangle.$$

Această definiție este corectă, adică $\langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AA_2} \rangle$ nu depinde de dreapta δ , ci numai de punctul A și de hypersferă.



Propoziția 1. Fie hypersfera de ecuație $H(P) := \|\overrightarrow{\Omega P}\|^2 - R^2 = 0$. Atunci puterea punctului A față de hypersferă este

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(A) = H(A).$$

Observația 1. $A \in \text{Int} \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(A) < 0$, $A \in \text{Ext} \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(A) > 0$ și $A \in \mathcal{S}(\Omega, R) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(A) = 0$.

Hiperplanul radical a doua hipersfere. Fie $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1)$ și $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2)$ două hipersfere de centre distincte. Se poate demonstra că locul geometric al punctelor ce au puteri egale față de cele două hipersfere este un hiperplan de direcție normală $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

Într-adevar, fie $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) : \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_1^i x^i + \alpha_1 = 0$ și $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2) : \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_2^i x^i + \alpha_2 = 0$.

Punctul $P(x^1, \dots, x^n)$ are aceeași putere față de cele două hipersfere $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_1^i x^i + \alpha_1 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_2^i x^i + \alpha_2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_1^i - \lambda_2^i) x^i + (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Deoarece hipersferele au centre distincte, rezultă că ecuația anterioară reprezintă un hiperplan de direcție normală $\bar{N}(\lambda_1^1 - \lambda_2^1, \dots, \lambda_1^n - \lambda_2^n) \parallel \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

Acest hiperplan se numește **hiperplanul radical** al celor două hipersfere.

Exemplu În cazul unui plan afin euclidian, date două cercuri neconciclice, locul geometric al punctelor din plan ce au aceeași putere față de cele două cercuri va fi o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, dreapta numită axa radicală celor două cercuri.

De exemplu, date cercurile $S_1 : \underbrace{x^2 + y^2 - 4}_{H_1(x,y)} = 0$ și $S_2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 2x - 4y}_{H_2(x,y)} = 0$, axa lor radicală se obține astfel:

$$H_1(x, y) = H_2(x, y) \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

Intersecția a două cercuri în $\mathcal{E}^2$ Date două cercuri $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1)$ și $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2)$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $R_2 \leq R_1$ într-un plan euclidian, relațiile anterioare se pot rescrie într-un mod analog și obținem:

- (1) dacă $0 < d(\Omega_1, \Omega_2) < R_1 - R_2$, pentru $R_2 < R_1$, avem $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \cap \mathcal{S}(\Omega_2, R_2) = \emptyset$ și $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2) \subset \text{Int } \mathcal{S}(\Omega_1, R_1)$: un cerc este situat în interiorul celuilalt;
- (2) dacă $d(\Omega_1, \Omega_2) = R_1 - R_2$, avem $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \cap \mathcal{S}(\Omega_2, R_2) = \{P\}$ și $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2) \setminus \{P\} \subset \text{Int } \mathcal{S}(\Omega_1, R_1)$: cele două cercuri sunt tangente interioare;
- (3) dacă $R_1 - R_2 < d(\Omega_1, \Omega_2) < R_1 + R_2$, avem $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \cap \mathcal{S}(\Omega_2, R_2) = \{P_1, P_2\}$: cele două cercuri sunt secante;
- (4) dacă $d(\Omega_1, \Omega_2) = R_1 + R_2$, avem $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \cap \mathcal{S}(\Omega_2, R_2) = \{P\}$, $\mathcal{S}(\Omega_2, R_2) \setminus \{P\} \subset \text{Ext } \mathcal{S}(\Omega_1, R_1)$, $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \setminus \{P\} \subset \text{Ext } \mathcal{S}(\Omega_2, R_2)$: cele două cercuri sunt tangente exterioare;
- (5) dacă $d(\Omega_1, \Omega_2) > R_1 + R_2$, avem $\mathcal{S}(\Omega_1, R_1) \cap \mathcal{S}(\Omega_2, R_2) = \emptyset$ și fiecare cerc este inclus în exteriorul celuilalt: cercurile sunt exterioare.

5. EXERCITII

Pentru exercițiile următoare cadrul de lucru este un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}^2$ raportat la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$.

Exercițiul 1. În $\mathcal{E}^2$ se dă cercul de ecuație $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 - 8x + 3y - 72 = 0$.

- (1) Să se determine centrul și raza cercului.

Soluție: Ecuația prezentată se rescrie sub forma:

$$(10) \quad x^2 + y^2 - 4x + \frac{3}{2}y - 36 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{649}{16}.$$

Este vorba despre un cerc de centru $\Omega\left(2, -\frac{3}{4}\right)$ și rază $r = \frac{\sqrt{649}}{4}$.

- (2) Scrieți ecuațiile parametrice și ecuațiile explicite ale cercului.

Soluție::

(a) **Ecuațiile parametrice:**

$$(11) \quad \mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{649}}{4} \cos t \\ y = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{649}}{4} \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

(b) **Ecuațiile explicite:** Avem:

$$(12) \quad \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{649}{16} - (x - 2)^2 \rightarrow x \in \left[-\frac{649}{16} + 2, \frac{649}{16} + 2\right].$$

Obținem

$$(13) \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{649}{16} - (x-2)^2}, & y \geq -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{649}{16} - (x-2)^2}, & y < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Exercițiul 2. Scrieți ecuația cercului cu centrul în $\Omega(1, 2)$ care este tangent dreptei $\delta : x + y + 1 = 0$.

Soluție: Raza cercului

$$R = d(\Omega, \delta) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ecuația generală este:

$$(14) \quad \mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8.$$

Exercițiul 3. Demonstrați că dreapta $d : x - 2y - 1 = 0$ este tangentă cercului de ecuație $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$.

Soluție: Trebuie să demonstrăm că $d \cap \mathcal{C} = \text{punct dublu}$:

$$(15) \quad d \cap \mathcal{C} : \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow T(-1, 1) \text{ punct dublu.}$$

Exercițiul 4. Fie cercul de ecuație generală $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 25 = 0$.

(1) Scrieți ecuația tangentei la cerc în punctul $M(3, 4)$.

Soluție: Verificăm mai întâi dacă punctul M se află pe cerc. Se observă că $x_M^2 + y_M^2 = 25 \rightarrow M \in \mathcal{C}$. În acest caz ecuația tangentei se va scrie prin dedublare în ecuația cercului. Obținem:

$$(16) \quad (d) : xx_M + yy_M = 25 \rightarrow (d) : 3x + 4y - 25 = 0$$

(2) Să se scrie ecuația tangentelor la cerc paralele cu dreapta $\delta : 3x - 4y - 1 = 0$.

Soluție: Vom prezenta două variante:

(a) **Metoda I:** Conform teoriei ecuația pantelor la cercul $\mathcal{C} (\Omega(x_0, y_0), R)$ de pantă dată m este:

$$(17) \quad y - y_0 = m(x - x_0) \pm R\sqrt{m^2 + 1}$$

Pentru exemplul prezent $\Omega(0, 0)$, $R = 5$, $m = \frac{3}{4}$. Se obțin următoarele tangente:

$$(18) \quad y = \frac{3}{4}x \pm \frac{25}{4}$$

(b) **Metoda II:** Vom căuta dreptele de pantă $m = \frac{3}{4}$ care intersectează cercul dat într-un punct dublu:

$$d : y = \frac{3}{4}x + n.$$

Îl vom determina pe $n \in \mathbb{R}$ punând condiția ca $d \cap \mathcal{C} = \text{punct dublu}$.

$$(19) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{3}{4}x + n \end{cases} \rightarrow \frac{26}{16}x^2 + \frac{3}{2}xn + n^2 - 25 = 0 \rightarrow 144x^2 + 24xn + 16n^2 = 400$$

Obținem

$$(20) \quad \Delta = -256n^2 + 25 \cdot 400$$

Impunem condiția ca $\Delta = 0 \rightarrow n = \pm \frac{25}{4}$. Se obțin astfel cele două tangente prezentate anterior.

(c) Ecuațiile tangentelor la cerc duse din punctul $P(7, 1)$.

Soluție: Se verifică că $P \in \text{Ext}(\mathcal{C})$. Ecuația unei drepte oarecare prin punctul P este:

$$(21) \quad \delta : y - 1 = m(x - 7).$$

Vom determina valoarea lui m din condiția ca $\delta \cap \mathcal{C}$ să fie punct dublu.

$$(22) \quad \delta \cap \mathcal{C} : \begin{cases} y - 1 = m(x - 7) \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 1 = m(x - 7) \\ (1 + m^2)x^2 + (2m - 14m^2)x + 45m^2 - 14m - 24 = 0 \end{cases}$$

Calculăm discriminantul pentru a doua ecuație și impunem condiția ca acesta să se anuleze:

$$(23) \quad \Delta = -12m^2 + 7m + 12 = 0$$

Soluțiile ecuației precedente sunt

$$(24) \quad \begin{cases} m_1 = -\frac{3}{4} \\ m_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Obținem astfel cele două tangente:

$$(25) \quad \begin{cases} \delta_1 : y - 1 = -\frac{3}{4}(y - 7) \\ \delta_2 : y - 1 = \frac{4}{3}(y - 7). \end{cases}$$

Exercițiul 5. Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului de vârfuri $A_0(1, -1), A_1(1, 2), A_2(2, -3)$.

Soluție: Potrivit teoriei se obține:

$$(26) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1^2 + (-1)^2 & 1 & -1 & 1 \\ 1^2 + 2^2 & 1 & 2 & 1 \\ 2^2 + (-3)^2 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$$

Pentru exercițiile următoare cadrul de lucru este un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}^3$ raportat la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercițiul 6. Scrieți ecuațiile sferei determinate de condițiile:

- (1) are centrul $\Omega(2, -1, 3)$ și raza $R = 6$;
- (2) are centrul în origine și trece prin $B(6, -2, 3)$;
- (3) are centrul $\Omega(1, 4, -7)$ și este tangentă planului $(\pi) : 6x + 6y - 7z + 42 = 0$;
- (4) are centrul $\Omega(6, -8, 3)$ și este tangentă axei Oz .

(1) Obținem ecuația vectorială:

$$\begin{aligned} \|\vec{r} - \vec{r}_\Omega\| &= R \iff \\ \|\vec{r} - (2, -1, 3)\| &= 6. \end{aligned}$$

Explicitând, obținem ecuația generală:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 &= 36 \iff \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 22 &= 0. \end{aligned}$$

(2) Obținem ecuația vectorială:

$$\begin{aligned} \|\vec{r} - \vec{r}_O\| &= \|\vec{OB}\| \iff \\ \|\vec{r}\| &= \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7. \\ x^2 + y^2 + z^2 - 49 &= 0. \end{aligned}$$

(3) Dacă sfera este tangentă planului, rezultă că raza sferei R este egală cu $d(\Omega, \pi) = \frac{|6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot (-7) + 42|}{\sqrt{6^2 + 6^2 + (-7)^2}} = \frac{121}{\sqrt{121}} = 11$.

Obținem ecuația vectorială:

$$\begin{aligned} \|\vec{r} - \vec{r}_\Omega\| &= R \iff \\ \|\vec{r} - (1, 4, -7)\| &= 11. \end{aligned}$$

Explicitând, obținem ecuația generală:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 &= 121 \iff \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 14z - 55 &= 0. \end{aligned}$$

(4) Evident $O \in Oz$ și un vector director al dreptei Oz este $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Dacă sfera este tangentă axei Oz , rezultă

că raza sferei R este egală cu $d(\Omega, Oz) = \sqrt{\frac{G(\vec{O}\vec{O}, \vec{k})}{G(\vec{k})}} = \frac{\left\| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|}{1} = \|(8, 6, 0)\| = 10$. Obținem ecuația vectorială:

$$\begin{aligned} \|\vec{r} - \vec{r}_\Omega\| &= R \iff \\ \|\vec{r} - (6, -8, 3)\| &= 10. \end{aligned}$$

Explicitând, obținem ecuația generală:

$$\begin{aligned} (x - 6)^2 + (y + 8)^2 + (z - 3)^2 &= 100 \iff \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 16y - 6z + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Exercițiul 7. Determinați centrul și raza următoarelor sfere:

- (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 10 = 0$;
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 5z + 8 = 0$;
 (3) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + y - 2z = 0$.

- (1) Obținem $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$, i.e. sfera are centru $\Omega(2, -1, 3)$ și rază $R = 2$.
 (2) Obținem $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 + (z + \frac{5}{2})^2 = \frac{3}{4}$, i.e. sfera are centru $\Omega(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ și rază $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 (3) Obținem $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \iff (x - \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$, i.e. sfera are centru $\Omega(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ și rază $R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Exercițiul 8. Determinați raza sferei tangente simultan planelor $(\pi_1) 3x + 2y - 6z - 15 = 0$ și $(\pi_2) 3x + 2y - 6z + 55 = 0$.

Să observăm că $\pi_1 \parallel \pi_2$.

Fie $A_1(5, 0, 0) \in \pi_1$. Dacă sfera este simultan tangentă celor două plane, rezultă că raza sferei este egală cu jumătatea distanței dintre cele două plane: $R = \frac{1}{2}d(\pi_1, \pi_2) = \frac{1}{2}d(A, \pi_2) = \frac{|3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 55|}{2\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = 5$.

Alternativ, fie $\bar{N} = (3, 2, -6)$ direcția normală a celor două plane. Ecuația planelor tangente, de direcție normală $\bar{N}$ sunt:

$$(\pi_2) \langle \overrightarrow{\Omega P}, \bar{N} \rangle + R \|\bar{N}\| = 0,$$

$$(\pi_1) \langle \overrightarrow{\Omega P}, \bar{N} \rangle - R \|\bar{N}\| = 0.$$

Scăzând cele două ecuații, obținem: $2R \|\bar{N}\| = 55 - (-15) = 70 \Rightarrow R = 5$.

Exercițiul 9. Fie sfera $(S) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ și punctele $A(2, 4, 5)$, $B(3, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ pe sferă. Scrieți ecuațiile planelor tangente sferei în aceste puncte.

Obținem:

$$\pi_A : 2 \cdot x + 4 \cdot y + 5 \cdot z - (x + 2) - 2(y + 4) - 3(z + 5) + 5 = 0 \iff x + 2y + 2z - 20 = 0.$$

$$\pi_B : 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z - (x + 3) - 2(y + 1) - 3(z + 1) + 5 = 0 \iff 2x - y - 2z - 3 = 0.$$

$$\pi_C : (-1) \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z - (x - 1) - 2(y + 0) - 3(z + 2) + 5 = 0 \iff -2x - 2y - z = 0.$$

Exercițiul 10. (facultativ) Fie sfera $(S) (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - 25 = 0$ și planele $(\pi_1) 2x - 2y + z = 0$, $(\pi_2) 3x + 4y - 12z = 0$. Scrieți ecuațiile planelor tangente sferei, paralele respectiv cu π_1 , π_2 .

Fie $\bar{N}_1 = (2, -2, 1)$ normala la planul π_1 , $\bar{N}_2 = (3, 4, -12)$ normala la planul π_2 , $\Omega = (2, -1, 4)$ centrul sferei, $R = 5$ raza ei. Ecuațiile planelor tangente sferei paralele cu π_1 sunt:

$$(\mathcal{H}_1^1) 2(x-2) + (-2)(y+1) + (z-4) + 5 \cdot 3 = 0 \iff 2x - 2y + z + 5 = 0, T_1(-4/3, 7/3, 7/3).$$

$$(\mathcal{H}_2^1) 2(x-2) + (-2)(y+1) + (z-4) - 5 \cdot 3 = 0 \iff 2x - 2y + z - 25 = 0, T_2(16/3, -13/3, 17/3).$$

Ecuațiile planelor tangente sferei paralele cu π_2 sunt:

$$(\mathcal{H}_1^2) 3(x-2) + 4(y+1) + (-12)(z-4) + 5 \cdot 13 = 0 \iff 3x + 4y - 12z + 111 = 0, T_3(11/13, -33/13, 112/13).$$

$$(\mathcal{H}_2^2) 3(x-2) + 4(y+1) + (-12)(z-4) - 5 \cdot 13 = 0 \iff 3x + 4y - 12z - 19 = 0, T_4(41/13, 7/13, -8/13).$$

Exercițiul 11. Fie sfera $(S) x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0$ și planul $(\pi) 2x + y - 2z - 2 = 0$.

(1) Demonstrați că intersecția dintre planul π și sfera (S) este un cerc.

(2) Scrieți ecuațiile acestui cerc și aflați coordonatele centrului și raza cercului.

Observăm că centrul sferei este $\Omega(3, -1, 1)$, iar raza sferei este $R = 4$. Distanța de la centrul sferei la plan este $d(\Omega, \pi) = \frac{|6 - 1 - 2 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{1}{3} < 4$, deci intersecția dintre sferă și plan este un cerc (C) .

Ecuația acestui cerc este

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Centrul cercului, notat cu Ω_0 , este proiecția ortogonală a lui Ω pe planul π . Fie p normala prin Ω la π :

$$(p) : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Intersecția dintre p și π este $\Omega_0(\frac{25}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{11}{9})$. Raza cercului (C) este $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \pi)^2} = \frac{\sqrt{143}}{3}$.

Exercițiul 12. Determinați centrul și raza cercului $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$

Observăm că centrul sferei este $\Omega(4, 7, -1)$, iar raza sferei este $R = 6$. Distanța de la centrul sferei la plan este $d(\Omega, \pi) = \frac{|12+7+1-9|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} < 6$, deci intersecția dintre sferă și plan este un cerc ($\mathcal{C}$).

Ecuția acestui cerc este

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 2z + 30 = 0, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

Centrul cercului, notat cu Ω_0 , este proiecția ortogonală a lui Ω pe planul π . Fie p normala prin Ω la π :

$$(p) : \frac{x-4}{3} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Intersecția dintre p și π ($t = -1$) este $\Omega_0(1, 6, 0)$. Raza cercului ($\mathcal{C}$) este $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \pi)^2} = 5$.

Exercițiul 13. Fie sfera ($\mathcal{S}$) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y - 6z + 1 = 0$. Determinați ecuațiile secțiunilor făcute de planele de coordonate în sferă, apoi aflați centrele și razele acestor secțiuni.

$$\text{Planul } xOy : z = 0: \text{ Obținem } \mathcal{C}_z : \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \mathcal{C}_z : \begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}_z \text{ are}$$

centrul $(4, 1, 0)$ și raza $R_z = 4$.

$$\text{Planul } yOz : x = 0: \text{ Obținem } \mathcal{C}_x : \begin{cases} y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \mathcal{C}_x : \begin{cases} (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}_x \text{ are}$$

centrul $(0, 1, 3)$ și raza $R_x = 3$.

$$\text{Planul } zOx : y = 0: \text{ Obținem } \mathcal{C}_y : \begin{cases} x^2 + z^2 - 8x - 6z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \mathcal{C}_y : \begin{cases} (x-4)^2 + (z-3)^2 = 24 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}_y \text{ are}$$

centrul $(4, 0, 3)$ și raza $R_y = \sqrt{24}$.

Exercițiul 14. Scrieți ecuația unei sfere știind că ea trece prin $A(0, 3, 1)$ și intersectează planul (xOy) după cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

Fie ecuația sferei: $\mathcal{S} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Intersectând cu planul $z = 0$, obținem cercul: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 - c^2$, deci $a = b = 0$ și $R^2 - c^2 = 16$. Din faptul că $A \in \mathcal{S} \Rightarrow 3^2 + (c-1)^2 = R^2 \Rightarrow 9 - 2c + 1 = 16 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow \mathcal{S} : x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5^2$.

Exercițiul 15. (facultativ) Determinați locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de sferele: $(S_1) (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$, $(S_2) (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.

Cele două sfere nu sunt conciclice, deci locul geometric cerut este planul radical al celor două sfere dat de $(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 - 9 = (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 - 16 \iff -10x - 6y + 2z + 26 = -14x - 4z + 37 \iff 4x - 6y + 6z - 11 = 0$.

Exercițiul 16. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreapta $\delta : x - y + 1 = 0$

a) Să se găsească un cerc C care trece prin $A(3, 0)$ și care determină pe dreapta δ un segment de lungime $2\sqrt{2}$ al cărui mijloc este $B(2, 3)$.

b) Să se găsească tangentele la cercul C paralele cu dreapta δ .

Rezolvare:

a) Începem prin a reaminti ecuația generală a cercului de centru $\Omega(x_0, y_0)$ și rază R

$$(27) \quad C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Acum vom folosi ipotezele prezentate pentru a determina cele trei neunoscut, anume coordonatele centrului și raza cercului C . În primul rând din faptul că $A \in C$ avem

$$(28) \quad (3 - x_0)^2 + y_0^2 = R^2.$$

Ne îndreptăm atenția asupra celorlalte ipoteze. Să considerăm M și N punctele de intersecție dintre dreapta δ și cercul C .

Deoarece B este mijlocul segmentului determinat de intersecția dintre dreapta și cerc avem următoarele relații

$$(29) \quad \begin{cases} x_M + x_N = 4 \\ y_M + y_N = 6 \end{cases}$$

Mai mult cele două puncte se află pe dreapta δ , lucru care se rescrie sub forma

$$(30) \quad \begin{cases} y_M = x_M + 1 \\ y_N = x_N + 1. \end{cases}$$

O altă informație utilă pentru determinarea coordonatelor celor două puncte este faptul că distanța dintre ele este de $2\sqrt{2}$, prin urmare

$$(31) \quad \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |x_M - x_N| = 2.$$

Din (29), (30) și (31) obținem

$$(32) \quad M(1, 2), N(3, 4) \in C.$$

În final avem de rezolvat sistemul

$$(33) \quad \begin{cases} (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2 \\ (3 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = R^2 \\ (3 - x_0)^2 + y_0^2 = R^2. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul precedent obținem centrul $\Omega(3, 2)$ și rază $R = 2$. Prin urmare ecuația generală a cercului este

$$C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Observație: Alternativ, puteam observa că triunghiul AMN este un triunghi isoscel. Calculăm mai întâi distanța de la punctul $A(3, 0)$ la dreapta δ

$$(34) \quad d(A, \delta) = \frac{|3 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = 2\sqrt{2}.$$

Ipotenuza acestui triunghi este $AM = 4$. Avem $\overrightarrow{MN} = (-2, -2)$, $\overrightarrow{AN} = (-2, 2)$ și $\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AN} \rangle = 0$, deci triunghiul AMN este dreptunghic isoscel. Cercul căutat de noi este cercul circumscris triunghiului AMN . Amintim că pentru un triunghi dreptunghi centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei. Vom obține astfel aceleași rezultate ca mai sus.

b) Dorim să scriem ecuațiile tangentelor la cerc paralele cu dreapta δ . Considerăm dreapta

$$(35) \quad d : y = x + n,$$

o dreapta cu aceeași pantă ca dreapta δ . Dreapta d este tangentă cercului C dacă intersecția dintre cerc și dreaptă este un punct dublu.

$$(36) \quad d \cap C : \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ y = x + n \end{cases}$$

Obținem următoarea ecuație de gradul II

$$(37) \quad 2x^2 + (2n - 10)x + n^2 - 4n + 9 = 0$$

Dreapta este tangentă la cerc dacă discriminantul ecuației anterioare este nul. Se obține

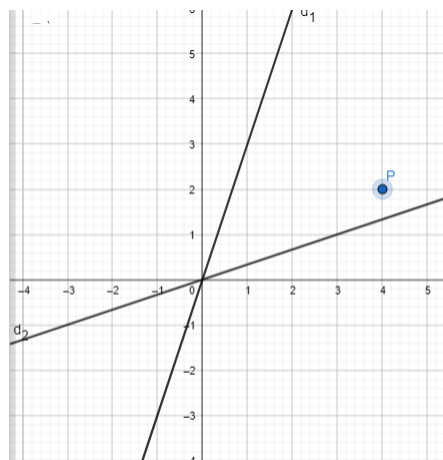
$$\Delta = n^2 + 2n - 7.$$

Deci $\Delta = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$. În concluzie cele două tangente sunt

$$(38) \quad t_{1,2} : y = x - 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

Exercițiul 17. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreptele $d_1 : y = 3x$ și $d_2 : x = 3y$. Să se determine cercurile care trec prin punctul $P(4, 2)$ și sunt tangente dreptelor d_1 și d_2 .

Soluție: Observăm următoarea reprezentare grafică:



Este evident că $d_1 \cap d_2 = O(0,0)$. Prin urmare centrul cercului se va afla pe bisectoarea unghiului format de cele două drepte. Fie deci $\vec{d}_1 \in \vec{d}_1$ și $\vec{d}_2 \in \vec{d}_2$. Se observă că $\vec{d}_1 = (1,3)$, $\vec{d}_2 = (3,1)$. Să presupunem că b este bisectoarea unghiului format de cele două drepte. Atunci:

$$(39) \quad \bar{b} = \frac{\vec{d}_1}{\|\vec{d}_1\|} + \frac{\vec{d}_2}{\|\vec{d}_2\|} = \frac{4}{\sqrt{10}}(1,1) \parallel (1,1)$$

Deoarece

$$b : O + [\bar{b}] \rightarrow b : x = y.$$

Deci centrul cercului nostru va fi situat pe dreapta b . Ecuația generală a cercului este:

$$(40) \quad \mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad \Omega(x_0, y_0).$$

Din

- (1) $P \in \mathcal{C} \rightarrow (4 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2.$
- (2) $\Omega \in b \rightarrow \mathcal{C} : (4 - x_0)^2 + (2 - x_0)^2 = R^2 \rightarrow 2x_0^2 - 12x_0 + 20 = R^2.$

Mai mult $d(\Omega, d_1) = d(\Omega, d_2) = r$. Se obține:

$$(41) \quad r = \frac{|x_0 - 3x_0|}{\sqrt{10}} = \frac{2x_0}{\sqrt{10}}$$

Deci:

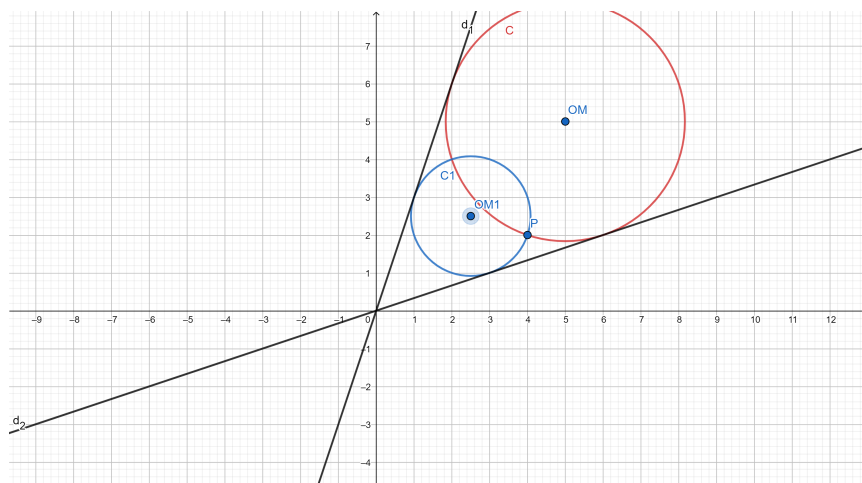
$$(42) \quad 2x_0^2 - 12x_0 + 20 = \frac{2x_0^2}{5} \rightarrow 2x_0^2 - 15x_0 + 25 = 0 \rightarrow x_0 = 5, \quad x'_0 = \frac{5}{2}$$

Avem astfel cele două raze:

$$r_1 = \sqrt{10}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

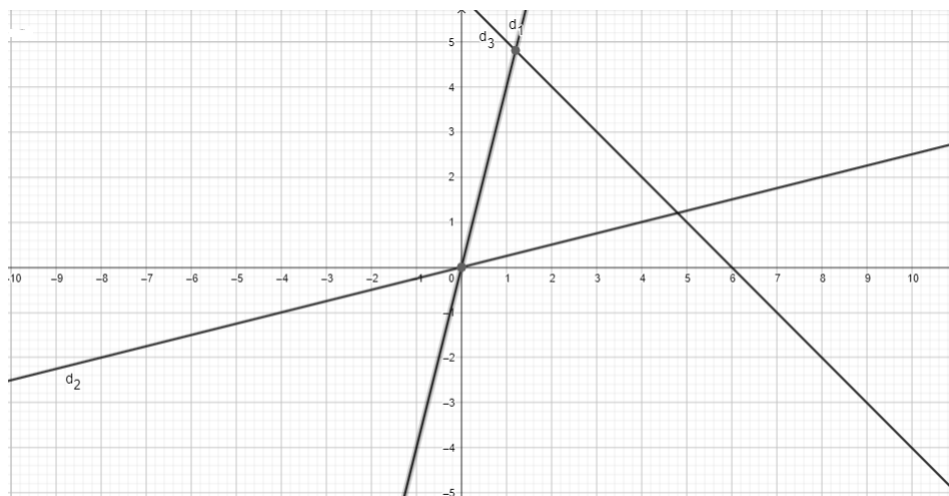
Ecuațiile generale pentru cele două cercuri sunt:

$$(43) \quad \mathcal{C} : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10, \quad \mathcal{C}_1 : \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$



Exercițiul 18. În $\mathcal{E}^2$ se consideră dreptele $d_1 : y = 4x$, $d_2 : y = \frac{1}{4}x$, $d_3 : x + y - 6 = 0$. Să se determine cercurile care sunt tangente simultan dreptelor d_1 , d_2 și d_3 .

Soluție:



Se poate observa din reprezentarea grafică că este vorba despre 4 cercuri tangente simultan celor 3 drepte. Primul cerc pe care îl căutăm este cercul înscris în triunghiul ce are drept vârfuri punctele de intersecție dintre cele trei drepte. Să determinăm mai întâi punctele de intersecție menționate anterior.

$$(44) \quad d_1 \cap d_2 : \begin{cases} y = 4x \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

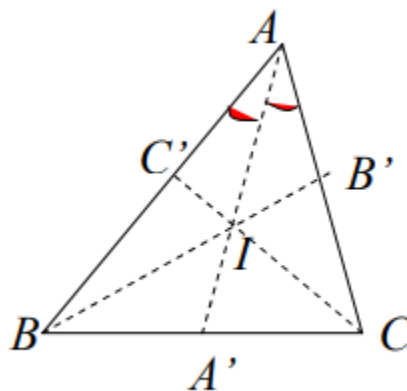
$$(45) \quad d_2 \cap d_3 : \begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ x + \frac{1}{4}x - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ 5x = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$(46) \quad d_1 \cap d_3 : \begin{cases} y = 4x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x + 4x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{6}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Deci cercul pe care îl căutăm este cercul înscris în triunghiul ABC . Ecuația generală a acestuia este:

$$(47) \quad \mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad \Omega(x_0, y_0)$$

Centrul cercului înscris în triunghi se află la intersecția bisectoarelor.



Vom scrie ecuațiile pentru bisectoarele $[AA']$ și $[BB']$. Apoi vom determina coordonatele centrului. Reamintim că vectorul director al bisectoarei poate fi obținut cu ajutorul teoremei bisectoarei. Vom obține astfel raportul în care împarte punctul de intersecție dintre dreaptă și bisectoarea latura pe care o intersectează. Pentru bisectoarea $[AA']$ avem:

$$(48) \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{CA} = \kappa \rightarrow \overrightarrow{BA'} = \kappa \overrightarrow{A'C} \rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{1+\kappa} \overrightarrow{AB} + \frac{\kappa}{1+\kappa} \overrightarrow{AC}$$

Analog pentru bisectoarea $[BB']$ avem:

$$(49) \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{CB}{AB} = \mu \rightarrow \overrightarrow{CB'} = \mu \overrightarrow{B'A} \rightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{1+\mu} \overrightarrow{BC} + \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{BA}$$

Să calculăm cantitățile prezente în relațiile de mai sus:

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5} \right), \quad AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{6\sqrt{17}}{5} \\ (2) \quad \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{6}{5}, \frac{24}{5} \right), \quad AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{6\sqrt{17}}{5} \\ (3) \quad \overrightarrow{BC} &= \left(-\frac{18}{5}, \frac{18}{5} \right), \quad BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \frac{18\sqrt{2}}{5} \\ (4) \quad \kappa &= 1, \quad \mu = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Deci:

$$(50) \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (3, 3) \parallel (1, 1)$$

și

$$(51) \quad \overrightarrow{BB'} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}} \left(-\frac{18}{5}, \frac{18}{5} \right) + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}} \left(-\frac{24}{5}, -\frac{6}{5} \right) \parallel (-\sqrt{17} - 4\sqrt{2}, \sqrt{17} - \sqrt{2})$$

Putem scrie acum ecuațiile celor două bisectoare:

$$(52) \quad AA' : \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} \rightarrow x - y = 0$$

$$(53) \quad BB' : \frac{x - \frac{24}{5}}{-\sqrt{17} - 4\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{6}{5}}{\sqrt{17} - \sqrt{2}} \rightarrow (-\sqrt{17} - 4\sqrt{2}) \left(y - \frac{6}{5} \right) = (\sqrt{17} - \sqrt{2}) \left(x - \frac{24}{5} \right)$$

Să determinăm coordonatele centrului înscris în triunghi:

$$(54) \quad I = AA' \cap BB' : \begin{cases} x = y \\ (-\sqrt{17} - 4\sqrt{2}) \left(y - \frac{6}{5} \right) = (\sqrt{17} - \sqrt{2}) \left(x - \frac{24}{5} \right) \end{cases} \rightarrow x = y = \frac{6\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}.$$

Alternativ observăm că triunghiul ABC este isoscel și

$$(55) \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}, \quad \overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} + \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|}$$

Pentru a determina raza amintim că

$$(56) \quad r = \frac{A}{p}, \quad A \text{ aria triunghiului și } p \text{ semiperimetrul.}$$

Pentru determinarea ariei vom folosi formula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Triunghiul este isoscel deci liniile importante din vârful triunghiului vor coincide. Alegem înălțimea din vârful A . Obținem $A'(3, 3)$. Deci:

$$(57) \quad AA' = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \rightarrow A = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{18\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{54}{5}$$

Valoarea semiperimetrului este:

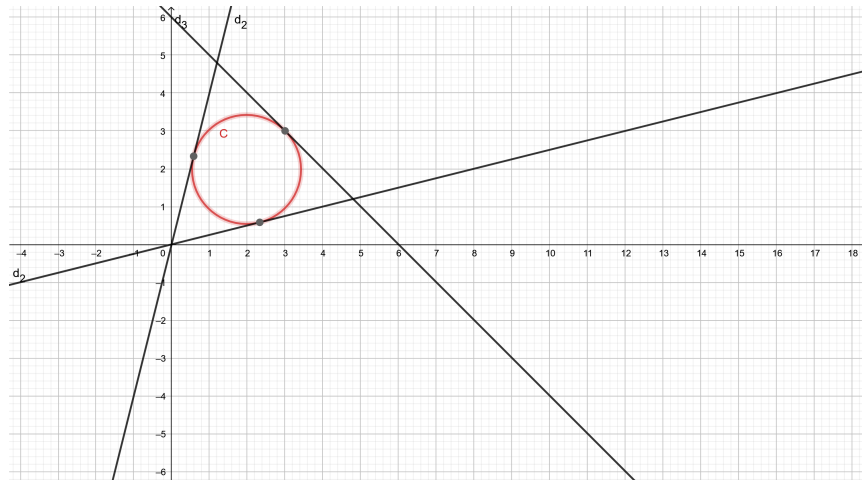
$$(58) \quad p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\frac{12\sqrt{17}}{5} + \frac{18\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{6\sqrt{17}}{5} + \frac{9\sqrt{2}}{5}$$

Se obține:

$$(59) \quad \Omega \left(\frac{6\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}, \frac{6\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}} \right), \quad r = \frac{18}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}.$$

Alternativ pentru determinarea razei cercului puteam folosi că aceasta este egală cu distanța de la Ω la una dintre cele trei drepte tangente la cer.

$$(60) \quad d(\Omega, d_1) = \frac{\frac{18\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} = \frac{18\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}.$$



Pentru identificarea ecuațiilor celorlalte cercuri vom utiliza definiția unei drepte tangente la cerc. Prin urmare să considerăm

$$\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

ecuația cercurilor pe care le căutăm. Vom dori ca acestea să fie tangente celor trei drepte (vom considera $y = mx + n$ apoi vom înlocui valorile pentru fiecare dreaptă).

$$(61) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad y = mx + n$$

Obținem

$$(x - x_0)^2 + (mx + n - y_0)^2 = R^2$$

După efectuarea calculelor:

$$(62) \quad (1 + m^2)x^2 + 2(mn - x_0 - my_0)x + n^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2ny_0 - R^2 = 0$$

Cercul considerat este tangent dreptei dacă discriminantul ecuației scrise anterior este zero. Așadar:

$$(63) \quad \Delta = 4(mn - x_0 - my_0)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2ny_0 - R^2) = 0 \Rightarrow (mx_0 - y_0 + n)^2 = R(m^2 + 1)$$

Obținem

$$n = mx_0 - y_0 \pm R\sqrt{m^2 + 1}$$

Pentru a identifica coordonatele centrelor și ale razelor vom înlocui pe rând valorile pentru m și n din ecuațiile celor trei drepte.

$$(1) \quad y = 4x, \quad m = 4, \quad n = 0 \rightarrow 4x_0 - y_0 = \pm R\sqrt{17} \rightarrow 16x_0^2 + y_0^2 - 8x_0y_0 = 17R^2$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{4}x, \quad m = \frac{1}{4}, \quad n = 0 \rightarrow \frac{1}{4}x_0 - y_0 = \pm R\sqrt{\frac{17}{16}} \rightarrow x_0^2 + 16y_0^2 - 8x_0y_0 = 17R^2.$$

$$(3) \quad x + y - 6 = 0, \quad m = -1, \quad n = 6 \rightarrow -x_0 - y_0 = \pm R\sqrt{2} - 6 \rightarrow 2R^2 = 36 + x_0^2 + y_0^2 - 12x_0 - 12y_0 + 2x_0y_0$$

Din primele două relații scrise anterior obținem

$$x_0^2 = y_0^2$$

Distingem de aici două cazuri:

- $x_0 = -y_0$. Folosind această informație în a treia relație avem:

$$R^2 = 18 \rightarrow R = 3\sqrt{2}.$$

Folosind valoarea razei în a două relație avem

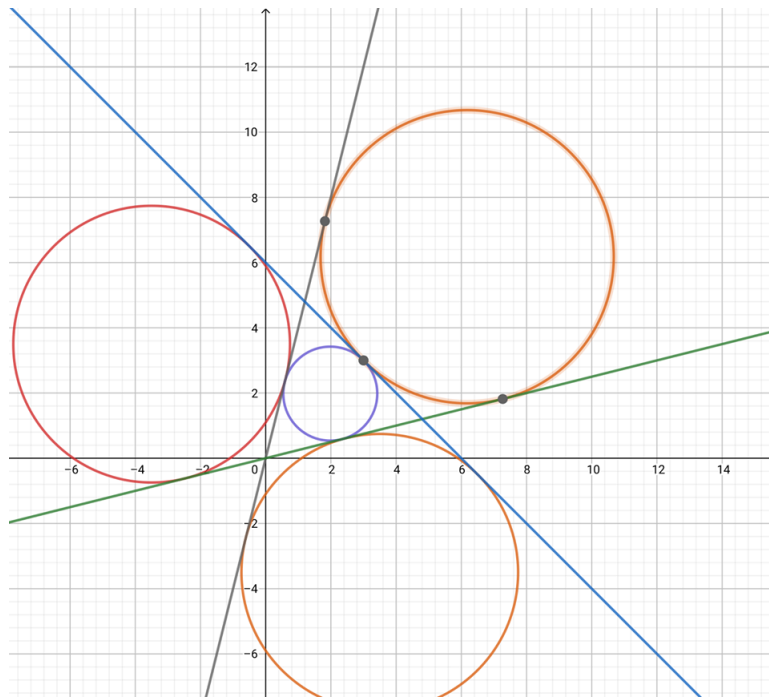
$$25x_0^2 = 18R^2 \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{306}}{5} \\ y_0 = -\frac{\sqrt{306}}{5} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{306}}{5} \\ y_0 = \frac{\sqrt{306}}{5} \end{cases}$$

- $x_0 = y_0$. Din a doua relație obținem

$$R^2 = \frac{9x_0^2}{17}$$

Apoi a treia relație ne conduce către ecuația:

$$25x_0^2 - 204x_0 + 306 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{25} (34 + 3\sqrt{34}) \\ y_0 = \frac{3}{25} (34 + 3\sqrt{34}) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{3}{25} (34 - 3\sqrt{34}) \\ y_0 = \frac{3}{25} (34 - 3\sqrt{34}) \end{cases} \quad \text{acestea sunt coordonatele cercului înscris.}$$



Exercițiul 19. În $\mathcal{E}^3$, fie sfera

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$$

și dreapta $\delta : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

- Să se determine intersecția sferei S cu dreapta δ .
- Să se scrie ecuația planului tangent la S care trece prin $A(2, 1, 2)$.
- Să se determine un plan π care conține δ și care determină pe S un cerc C de rază $r = \sqrt{\frac{18}{5}}$.
- Care este valoarea minimă pe care o poate lua r de la punctul c)?

Rezolvare:

- Pentru de găsi intersecția dintre sferă și dreaptă vom scrie mai întâi ecuațiile dreptei δ sub forma parametrică astfel:

$$(\delta) : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t - 3, \\ z = t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deci vom avea de rezolvat următorul sistem

$$S \cap \delta : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5 \\ x = t, \\ y = 2t - 3, \\ z = t. \end{cases}$$

Obținem pentru t valorile $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$, prin urmare cele două puncte de intersecție vor fi

$$M(2, 1, 2), \quad N(1, -1, 1).$$

- Observăm că punctul $A \in S$, prin urmare ecuația planului tangent se va scrie prin dedublare astfel

$$\pi_A : (x - 1)(x_A - 1) + (y - 1)(y_A - 1) + zz_A = 5 \Leftrightarrow x + 2z - 6 = 0$$

- Ne propunem să determinăm ecuația planului ce conține dreapta δ și care formează pe sferă un cerc de rază $r = \sqrt{\frac{18}{5}}$. Să analizăm informațiile pe care le deținem. În primul rând, deoarece δ este conținută în plan rezultă că punctele de intersecție de la punctul a) verifică ecuația planului. Mai mult cunoaștem raza cercului pe care în formează planul căutat pe sferă. Centrul cercului format este proiecția cercului sferei pe planul pe care îl căutăm. Fie deci $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ecuația generală a planului pe care îl căutăm.

- Din faptul că $M \in \pi$ obținem $2a + b + 2c + d = 0$,
- Din faptul că $N \in \pi$ obținem $a - b + c + d = 0$,

- În final avem că

$$(64) \quad r^2 = R^2 - d^2(\Omega, \pi) \Rightarrow d(\Omega, \pi) = \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow \frac{|a+b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Prin urmare avem trei ecuații și patru necunoscute cu ajutorul cărora formăm următorul sistem

$$(65) \quad \begin{cases} 2a + b + 2c + d = 0, \\ a - b + c + d = 0, \\ \frac{|a+b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{\frac{7}{5}} \end{cases}$$

Pentru ușurință vom considera mai întâi primele două ecuații, ulterior vom înlocui în a treia pentru a determina soluția finală. Considerăm matricea asociată sistemului format din primele trei ecuații

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Rang} A = 2$, prin urmare avem un sistem compatibil dublu nedeterminat. Fie $c = \alpha, d = \beta$ necunoscutele secundare. Sistemul devine

$$(66) \quad \begin{cases} 2a + b = -2\alpha + \beta \\ a - b = -\alpha - \beta \end{cases}$$

Soluția sistemului precedent este

$$(67) \quad a = -\alpha - \frac{2\beta}{3}, \quad b = \frac{\beta}{3}$$

Momentan ecuația planului are forma

$$(68) \quad \pi : \left(-\alpha - \frac{2\beta}{3}\right)x + \frac{\beta}{3}y + \alpha z + \beta = 0.$$

Rescriem formula pentru distanța de la centrul sferei la plan astfel

$$(69) \quad d(\Omega, \pi) = \frac{\left|-\alpha - \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta}{3} + \beta\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} + \alpha^2 + \frac{4\beta^2}{9} + \frac{4\alpha\beta}{3}}} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Obținem următoarea ecuație de gradul doi în α

$$27\alpha^2 + 48\alpha\beta + 5\beta^2 = 0$$

Discriminantul este:

$$\Delta = (42\beta)^2$$

Obținem

$$\begin{aligned} -\alpha_1 &= -\frac{\beta}{9}, \\ -\alpha_2 &= -\frac{5\beta}{3}. \end{aligned}$$

Înlocuind cele două valori găsite anterior în ecuația (68) obținem două plane care satisfac condițiile impuse:

$$\pi_1 : 5x - 3y + z - 9 = 0,$$

$$\pi_2 : 3x + y - 5z + 3 = 0$$

- d) Reamintim că $r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \pi)}$. Prin urmare r este minimă atunci când $d(\Omega, \pi)$ este maximă, planul π fiind planul ce conține dreapta δ . Distanța menționată anterior este distanța de la centrul sferei la proiecția centrului pe planul ce conține dreapta. Maximul acestei distanțe se atinge atunci când centrul cercului este chiar pe dreaptă.

Prin urmare centrul cercului va fi chiar mijlocul segmentului MN , iar raza cercului $r = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Exercițiul 20. În $\mathcal{E}^3$ se consideră o sferă cu centrul Ω pe axa Oz care este tangentă planului $\pi : 3x + 4y - 25 = 0$.

- (1) Să se scrie ecuația sferei S știind că distanța de la Ω la $A(3, 4, 3)$ este 5.
- (2) Există $P_0 \in S$ cu proprietatea că normala la S în P_0 trece prin origine? În caz afirmativ să se găsească acest punct.
- (3) Să se descrie intersecția sferei S cu planul $(\pi_1) : 3x + 4y - 15 = 0$.

Soluție:

- (1) Deoarece $\Omega \in Oz$ rezultă că $\Omega(0, 0, z_0)$. Vom identifica valoarea lui z_0 folosind faptul că este situat la 5 unități distanța de punctul A :

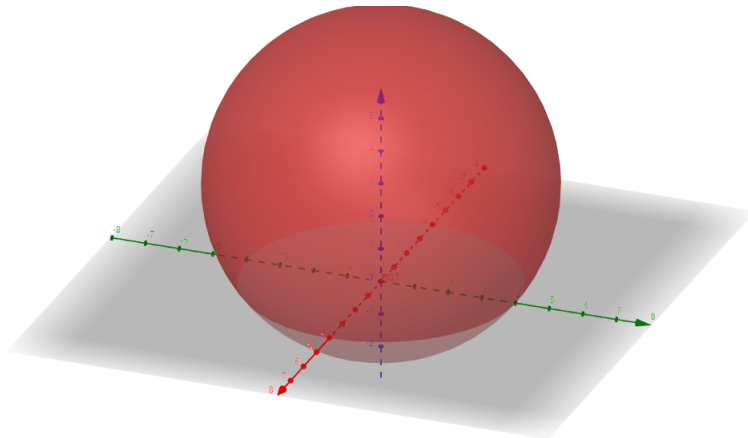
$$(70) \quad d(A, \Omega) = \sqrt{3^2 + 4^2 + (3 - z_0)^2} = 5 \rightarrow z_0 = 3 \rightarrow \Omega(0, 0, 3).$$

- (2) Să scriem mai întâi ecuația generală a sferei. Pentru a finaliza mai avem nevoie de rază. Vom utiliza faptul că sfera este tangentă planului π , deci:

$$(71) \quad R = d(\Omega, \pi) = \frac{|25|}{\sqrt{9 + 16}} = 5$$

Avem:

$$(72) \quad S : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25.$$



Este cunoscut faptul că direcția normalei la sferă într-un punct este coliniară cu direcția normalei la plan în punct. Fie $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ecuația planului tangent la sferă în S este:

$$(73) \quad T : xx_0 + yy_0 + (z - 3)(z_0 - 3) = 9 \rightarrow \bar{N} = (x_0, y_0, z_0 - 3).$$

Mai întâi de toate să observăm că originea sistemului de axe de coordonate se află pe sfera noastră. Se observă din desen că dacă ar exista o normală care să treacă prin origine singura variantă ar fi să fie chiar axa Oz . (este cunoscut faptul că normala trece prin centrul sferei) Să determinăm punctele de intersecție dintre axă și sferă:

$$(74) \quad S \cap Oz \rightarrow (z_0 - 3)^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} z_0 = 8 \\ z'_0 = -2 \end{cases}.$$

Deci există o normală care trece prin origine aceasta fiind axa Oz care intersectează sfera în $P_0(0, 0, 8)$ și $P'_0(0, 0, -2)$.

- (3) Avem de analizat:

$$(75) \quad S \cap \pi : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25 \\ 3x + 4y - 15 = 0 \end{cases}$$

Avem $d(\Omega, \pi) = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = 3 < 5 \rightarrow S \cap \pi$ un cerc cu centrul aflat în planul π . Dorim să determinăm centrul și raza cercului: $C_0(\Omega_0, r)$.

$$\Omega_0 = pr_\pi \Omega = \pi \cap d, \quad d \perp \pi, \quad \Omega \in d.$$

$$(76) \quad \Omega_0 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ z = 3 \\ 3x + 4y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{3}{5} \rightarrow \Omega_0 \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 3 \right).$$

Mai mult

$$r = \sqrt{25 - d^2(\Omega, \pi)} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

6. EXERCITII PROPUSE SPRE REZOLVARE

Exercițiul 21. Cadrul de lucru: un plan afin euclidian $\mathcal{E}^2$ raportat la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$.

- (1) Scrieți toate tipurile de ecuații ale cercurilor de centru Ω și rază R pentru
 - (a) $\Omega(1, 0)$, $R = 1$;
 - (b) $\Omega(2, 3)$, $R = 5$;
 - (c) $\Omega(-1, -1)$, $R = 2$.
- (2) Se dau ecuațiile unor cercuri. Determinați centrul și raza lor:
 - (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;
 - (b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$;
 - (c) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;
 - (d) $x^2 + y^2 - 8y = 0$.
- (3) Să se scrie ecuația cercului determinat prin:
 - (a) centrul $\Omega(0, 1)$ și un punct al său $A(2, 1)$;
 - (b) extremitățile unui diametru $A(1, 1)$, $B(3, 5)$;
 - (c) centrul $\Omega(1, 1)$ și tangenta la cerc $(d) x + 2y + 3 = 0$.
- (4) Fiind dat cercul $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ și punctul $M(7, 1)$, verificați că M este exterior cercului și calculați lungimea segmentului $[MT]$, unde MT este tangenta cercului și T este punctul de contact.
- (5) Verificați dacă dreptele următoare sunt tangente cercului $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ și aflați punctele de contact:

$$\begin{aligned} (d_1) \quad 2x - y - 1 &= 0, \\ (d_2) \quad y - 3 &= 0, \\ (d_3) \quad x + 3 &= 0. \end{aligned}$$
- (6) Se dă cercul $x^2 + y^2 - 16 = 0$.
 - (a) Scrieți ecuația tangentei în punctul $M(2, 2\sqrt{3})$.
 - (b) Determinați ecuațiile tangentelor la cerc paralele cu dreapta $(\delta) x - 2y + 1 = 0$.
 - (c) Scrieți ecuațiile tangentelor duse din punctul exterior $P(4, 2)$ la cerc.
- (7) Se dă cercul $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$. Scrieți ecuațiile tangentelor la cerc care
 - (a) trec prin $A(1, 3)$;
 - (b) trec prin $B(5, 4)$;
 - (c) sunt paralele cu dreapta $(d) x - y + 1 = 0$.

Pentru exercițiile următoare cadrul de lucru este un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}^3$ raportat la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercițiul 22. Scrieți ecuațiile sferei determinate de condițiile:

- (a) are centrul $\Omega(2, 0, 1)$ și raza $R = 5$;
- (b) are centrul în origine și trece prin $B(2, 1, 3)$;
- (c) are centrul $\Omega(1, 2, 3)$ și este tangentă planului $(\pi) : x + 2y - 7z + 5 = 0$;
- (d) are centrul $\Omega(2, 3, 5)$ și este tangentă aței Oy .

Exercițiul 23. Determinați centrul și raza următoarelor sfere:

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 8 = 0$;
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 10z + 15 = 0$;

Exercițiul 24. Determinați ecuația unei sfere de rază $R = 2$ tangentă planului $(\pi) : x + 2y - z + 5 = 0$ în $A(-1, -2, 0)$.

Exercițiul 25. Determinați raza sferei tangente simultan planelor

$$(\pi_1) : x + 2y - 3z - 3 = 0 \text{ și } (\pi_2) : x + 2y - 3z + 10 = 0.$$

Exercițiul 26. Fie sfera $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ și punctele $A(1, 4, 3)$, $B(3, 2, 3)$, $C(1, 2, 1)$ pe sferă. Scrieți ecuațiile planelor tangente sferei în aceste puncte.

Exercițiul 27. Fie sfera $(S) : (x)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0$ și planul $(\pi_1) : x - y + z = 0$. Scrieți ecuațiile planelor tangente sferei, paralele cu π_1 .

Exercițiul 28. Fie sfera $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 11 = 0$ și planul $(\pi) : x + y - 2z = 0$.

- (a) Demonstrați că intersecția dintre planul π și sfera (S) este un cerc.
- (b) Scrieți ecuațiile acestui cerc și aflați coordonatele centrului și raza cercului.

Exercițiul 29. Determinați centrul și raza cercului $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$