
Varietăți diferențiabile

- note de curs -

MARIAN IOAN MUNTEANU

Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iași

mate – info

Iași, 2020

Bibliografie

- [1] <http://old.unitbv.ro/mi/DepartamentulMI/Colectiv/Munteanu/CursuriMunteanu.aspx>
- [2] Gheorghe Gheorghiev and Vasile Oproiu,
Varietati Diferentiabile Finit si Infinit Dimensionale
Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1976, 1979.

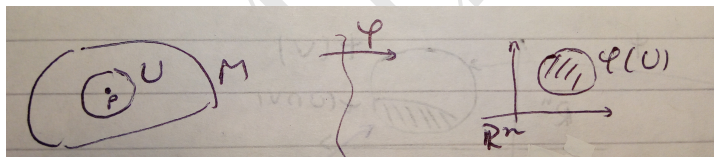
CURS 06-04-2020

Varietati diferentiabile: definitie si exemple

Fie M un spatiu topologic.

Definiția 7.1 M se numeste *local euclidian* de dimensiune n daca

$$\forall p \in M, \exists U_d \subset M, p \in U, \quad \exists \varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \text{ homeomorfism.}$$



Definiția 7.2 M se numeste *varietate topologica* de dimensiune n daca

- M este local euclidian de dimensiune n
- M este separat Hausdorff
- M admite o baza numerabila a topologiei $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Observatie. Un spatiu euclidian este evident separat. Insa un spatiu local euclidian nu este neaparat separat.

Definiția 7.3 O pereche (U, φ) formata dintr-o multime deschisa $U \subset M$ si homeomorfismul $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ce apare in conditia de a fi local euclidian se numeste *harta locala* pentru M . Multimea U este *domeniul hartii locale* (U, φ) , iar φ este homeomorfismul hartii locale.

Pentru un punct $p \in U$ avem ca $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$; avem deci $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Funcțiile $x^1, \dots, x^n$ sunt functii continue pe U numite *funcțiile coordonate* in harta locala (U, φ) sau, simplu, *coordonate locale*.

Notatie: $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n) = (U, [x])$

Fie $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ o alta harta locala pe M .

Dacă $U \cap V \neq \emptyset$ atunci avem schimbarea de harti locale

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \quad y^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

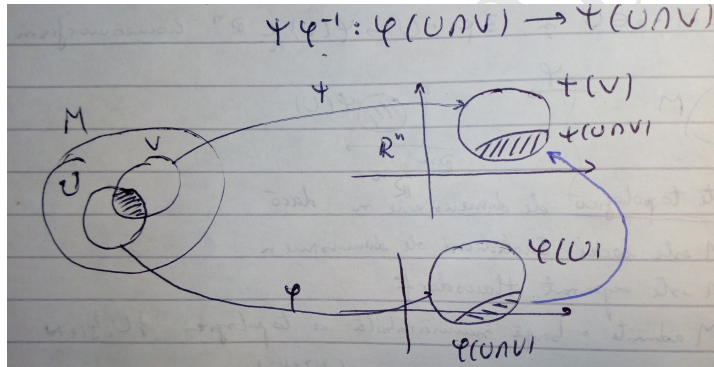


Figura 7.1: Schimbare de harti locale pe M

Definiția 7.4 Spunem ca hartile locale $(U, \varphi); (V, \psi)$ pe M sunt *compatibile* de clasa C^k , $0 \leq k \leq \infty$, daca fie $U \cap V = \emptyset$, fie $U \cap V \neq \emptyset$ iar $\psi \circ \varphi^{-1}$ este un **difeomorfism** de clasa C^k .

Definiția 7.5 O *structura diferentiabila* neteda pe o varietate topologica de dimensiune n este data de o familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de harti locale ce satisface:

$$(1) \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

(2) $\forall \alpha, \beta \in I$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ și (U_β, φ_β) sunt compatibile de clasă C^∞

(3) $\forall (V, \psi)$ o hartă locală pe M compatibilă cu $\forall$ hartă locală $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, atunci $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.

Familia $\mathcal{A}$ se numește *atlas complet*.

O familie de hărți locale $\mathcal{A}$ ce satisface doar (1) și (2) se numește *atlas*.

Definiția 7.6 O *varietate diferentiabilă* de dimensiune n este o varietate topologică de dimensiune n împreună cu o structură diferentiabilă.

Propoziția 7.1 Fie M o varietate topologică de dimensiune n și $\mathcal{A}_0$ un atlas pe M . Atunci $\exists!$ o structură diferentiabilă $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$. Prin urmare, o structură diferentiabilă poate fi dată printr-un atlas care NU este complet.

Observație. Pe o aceeași varietate topologică pot exista mai multe structuri diferentiabile.

De exemplu să considerăm $M = \mathbb{R}$ cu topologia uzuală. Fie $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, id)\}$ un atlas ce definește o structură diferențială. Fie $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^3$, un alt atlas ce definește o (altă) structură diferențială.

Întrebare: Coincid cele două structuri?

Pentru a răspunde la întrebare, să studiem compatibilitatea:

$$id \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (id \circ \varphi^{-1})(t) = \sqrt[3]{t}.$$

Ar trebui să avem un difeomorfism, însă aplicația nu este derivabilă în 0.

Prin urmare, cele două structuri sunt distincte.

Exemple de varietăți diferentiabile sunt furnizate în primul rând de

- $\mathbb{R}^n$ cu topologia indusă: $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$
- $D \subset_d \mathbb{R}^n$ cu topologia uzuală: $\mathcal{A} = \{(D, id)\}$

- subvarietati regulate in spatii euclidiene: schimbarile de parametrizari reprezinta schimbari de harti locale.

Subvarietati regulate in $\mathbb{R}^k$

Daca $n < m$ atunci $\mathbb{R}^n \subset_{s.sp} \mathbb{R}^m$ cu identificarea

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{(u, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\} \subset \mathbb{R}^m \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m : x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}.\end{aligned}$$

Fie $M \subset \mathbb{R}^m$ o submultime si $p_0 \in M$.

Definiția 7.7 Spunem ca M satisface conditia de subvarietate regulata de clasa C^k si dimensiune n in punctul p_0 daca $\exists$

- o vecinatate cubica $V \in C_\varepsilon^m(0)$ a lui 0 in $\mathbb{R}^m$
- o vecinatate U a lui p_0 in $\mathbb{R}^m$
- un C^k -difeomorfism $F: U \rightarrow V$ a.i. $F(p_0) = 0$ si $F(M \cap U) = \mathbb{R}^n \cap V$.

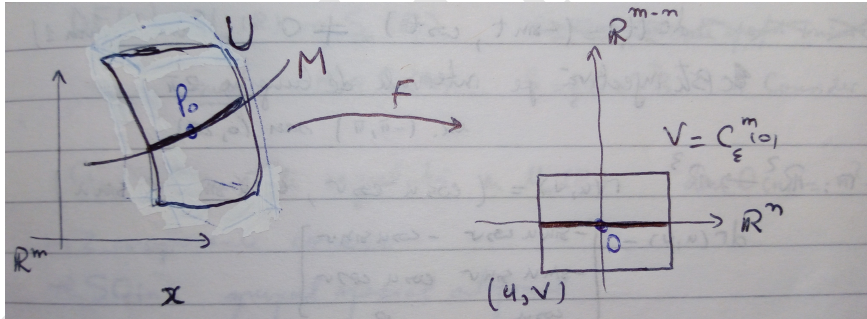


Figura 7.2: Difeomorfism de indreptare: subvarietati regulate

$$x \in M \cap U \subset \mathbb{R}^m: \begin{cases} u^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \dots\dots\dots \\ u^n = f^n(x^1, \dots, x^m) \\ 0 = f^{n+1}(x^1, \dots, x^m) \\ \dots\dots\dots \\ 0 = f^m(x^1, \dots, x^m). \end{cases}$$

Ultimele $m - n$ componente ale lui F se anulează în punctele lui $M \cap U$.

M este *subvarietate regulată* de dimensiune n în $\mathbb{R}^m$ dacă satisface condiția de subvarietate regulată (de clasă resp.) în oricare din punctele sale.

$n = 1$ curba în $\mathbb{R}^m$	$n = 2$ suprafață regulată în $\mathbb{R}^m$
$n = 1$ $m = 2$ curba în plan	$n = 2$ $m = 3$ suprafață în spațiul euclidian
$n = 1$ $m = 3$ curba în spațiu	$m = n + 1$ hipersuprafață regulată în $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 7.1 Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

- (1) M subvarietate regulată de dimensiune n în $\mathbb{R}^m$
- (2) $\forall p \in M, \exists W \in \mathcal{V}(p), \exists f^{n+1}, \dots, f^m$ functional independente pe W a.i.
 $M \cap W : f^{n+1} = \dots = f^m = 0$
- ($\bar{2}$) $\forall p \in M, \exists W \in \mathcal{V}(p), \exists F$ submersie $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ a.i. $M \cap W : F = 0$
- (3) $\forall p \in M, \exists W \in \mathcal{V}(p), \exists V' \subset_{\text{domeniu}} \mathbb{R}^n, \exists r : V' \rightarrow \mathbb{R}^m$ scufundare a.i.
 $r(V') = M \cap W$
- ($\bar{3}$) $M \cap W = \{(u^1, \dots, u^n, h^{n+1}(u), \dots, h^m(u)), u \in W' \subset \mathbb{R}^n\}$.

Observatie. Itemii (2) și ($\bar{2}$) dau reprezentarea implicită a subvarietatii. Condiția (3) da reprezentarea parametrică, iar condiția ($\bar{3}$) da reprezentarea explicită a subvarietatii.

Exemple.

- Sfera $\mathbb{S}^n$ este subvarietate regulată de dimensiune n în $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Cercul $\mathbb{S}^1$ este subvarietate regulată de dimensiune 1 în $\mathbb{R}^2$.
- Grupul liniar general $Gl(n, \mathbb{R})$ (al matricilor inversabile) este varietate diferentiabilă de dimensiune n^2 (fiind deschisă în $\mathcal{M}^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$).
- Grupul special liniar $Sl(n, \mathbb{R})$ este subvarietate regulată de dimensiune $n^2 - 1$ în $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$.
- Grupul ortogonal $O(n)$ și grupul special ortogonal $SO(n)$ sunt subvarietati regulate de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$ în $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$.

Modalitati de a obtine noi varietati diferentiabile:**①** produs direct

Teorema 7.2 Fie M_1 si M_2 doua varietati diferentiabile de dimensiuni n_1 , respectiv n_2 . Atunci produsul lor direct $M_1 \times M_2$ se poate organiza ca varietate diferentiabila de dimensiune $n_1 + n_2$.

Exemplu. Torul n -dimensional $T^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ este varietate diferentiabila de dimensiune n .

② factorizare

Fie (X, τ) un spatiu topologic. Consideram $\sim$ o relatie de echivalenta pe X si notam $X/\sim$ spatiul factor (spatiul cat). Avem proiectia canonica $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $\pi(x) = [x]$ (clasa de echivalenta).

Topologia cat. D deschisa in spatiul factor $X/\sim$ daca $\pi^{-1}(D)$ este deschisa in X , i.e. $\pi^{-1}(D) \in \tau$.

Pentru o submultime $A \subset X$ notam $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ saturata lui A . Evident $A \subset [A]$.

Propoziția 7.2 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ este aplicatie deschisa daca si numai daca relatia $\sim$ este deschisa, adica saturata oricarei multimi deschise este deschisa: $\forall A \subset_d X$, rezulta $[A] \subset_d X$.

Propoziția 7.3 Fie $\pi : X \rightarrow X/\sim$ deschisa. Presupunem ca X admite baza numerabila a topologiei. Atunci $X/\sim$ admite baza numerabila a topologiei.

Definim in continuare graficul unei relatii:

$$\text{Graf } \sim = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\} \subset X \times X.$$

Propoziția 7.4 Fie $\pi : X \rightarrow X/\sim$ deschisa. Atunci $X/\sim$ este separat Hausdorff daca si numai daca $\text{Graf } \sim$ este o multime inchisa in $X \times X$.

Exemplu. Spatiul proiectiv real $\mathbb{R}P^n$ sau $P^n(\mathbb{R})$ este o varietate diferentiabila de dimensiune n .

CURS 13-04-2020

Calcul diferențial pe varietăți

8.1 Funcții diferențiabile

Fie M o varietate diferentiabilă de dimensiune n și $f : W \xrightarrow{d} M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ este o hartă locală pe M astfel încât $U \cap W \neq \emptyset$ atunci pentru orice $p \in U \cap W$ putem scrie

$$f(p) = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(p) = f^\varphi(x),$$

unde $f^\varphi := f \circ \varphi^{-1}$ și $x = \varphi(p)$. Prin urmare, avem

$$f^\varphi : \varphi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

care reprezintă exprimarea locală a lui f în harta locală (U, φ) .

Dacă $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ este o altă hartă locală astfel încât $V \cap W \neq \emptyset$ avem definită, în mod analog, f^ψ .

Legătura între cele două exprimări, pe domeniul comun de definiție, este

$$f^\psi = f^\varphi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}).$$

Definiția 8.1 Funcția $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe deschisul $W \subset M$ se numește *diferentiabilă* în $p \in W$ dacă f^φ este diferentiabilă în $f(p)$.

Observatie. Evident, definitia diferentiabilitatii **NU** depinde de harta locala folosita.

Exemplu. Functiile coordonate $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sunt diferentiabile pe U , adica in orice punct din U .

Intr-adevar $x^i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ are exprimarea $x^i \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = x^i(p) = x^i$ deci este diferentiabila. De fapt, $x^i \circ \varphi^{-1}$ este proiectia de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$ pe componenta i .

Un rezultat "invers", consecinta a teoremei functiilor inverse, este urmatorul:

Propoziția 8.1 Fie $f_1, \dots, f_k : W \rightarrow \mathbb{R}$ un sistem de functii diferentiabile pe deschisul W din M . Presupunem ca pentru un punct $p_0 \in W$, exista harta locala $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ astfel incat $\frac{D(f_1^\varphi, \dots, f_k^\varphi)}{D(x^1, \dots, x^k)}(\varphi(p_0)) \neq 0$. Atunci exista o harta locala (V, ψ) in p_0 astfel incat primele k coordonate locale in aceasta harta sa fie functiile $f_1, \dots, f_k$.

8.2 Aplicații netede între varietăți

Fie N^n si M^m doua varietati diferentiabile si $W \subset_d N$. Fie $F : W \rightarrow M$ o aplicatie (continua) și $p_0 \in W$.

Definiția 8.2 F se numeste *diferentiabila* de clasa C^k in p_0 daca

$\exists$ h.l. in p_0 pe N : $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, $U \subset W$

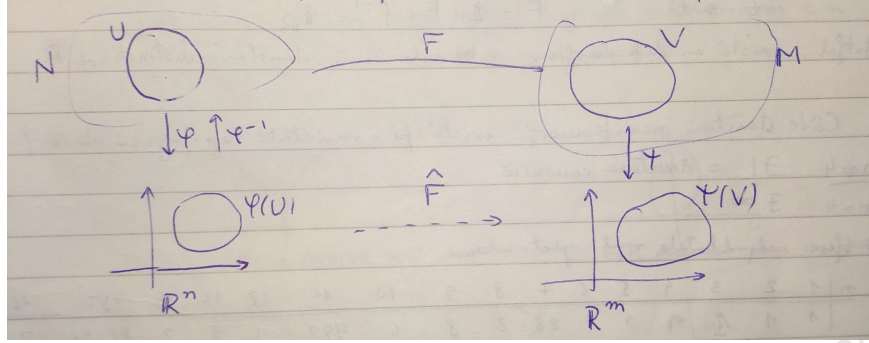
$\exists$ h.l. in $F(p_0)$ pe M : $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$, $F(U) \subset V$

astfel incat $\hat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ este diferentiabila de clasa C^k .

F se numeste diferentiabila pe W daca este diferentiabila in orice punct din W .

Observatie. Definitia este corecta, in sensul ca nu depinde de hartile locale folosite pe cele doua varietati:

$$\tilde{F} := \tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi} \psi^{-1}) \circ \hat{F} \circ (\varphi \tilde{\varphi}^{-1}).$$

Figura 8.1: F și $\hat{F}$

Aplicația $\hat{F}$ se numește *reprezentarea* lui F în cele două hărți locale (U, φ, x) și (V, ψ, y) :

$$\hat{F}: y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Exemplu. Pentru $W = U$ și $F = \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$: F este diferentiabilă deoarece $\hat{\varphi} = \text{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$, $\hat{\varphi} = \text{id}_{\varphi(U)}$.

Compunerea.
$$N \xrightarrow{F} M \xrightarrow{G} P$$

$$\quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$\quad \quad \quad G \circ F \quad \quad \quad$$

Avem imediat că: $\widehat{G \circ F} = \hat{G} \circ \hat{F}$.

Definiția 8.3 Fie N și M de aceeași dimensiune. Aplicația $F: N \rightarrow M$ se numește *difeomorfism* dacă F este bijectivă și F, F^{-1} sunt diferentiabile. În această situație, N și M se numesc *difeomorfe*.

Exemplu. Să ne amintim exemplul din cursul precedent: $\mathbb{R}$ poate înzestrată cu două structuri de varietate "diferite": $N = (\mathbb{R}, f)$, $f(t) = t^3$ și $M = (\mathbb{R}, \text{id})$. Fie $F: N \rightarrow M$, $t \mapsto t^3$. Rezultă $\hat{F} = \text{id} \circ F \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Astfel, există un difeomorfism între cele două structuri distincte pe $\mathbb{R}$.

Problemă. Câte structuri nedifeomorfe există pe o varietate topologică dată?

😊 ... 😊

Definiția 8.4 Rangul unei aplicații $F : W \xrightarrow{d} N \rightarrow M$ diferentiabile în $p \in W$ este dat de

$$\text{rang } F(p) := \text{rang } D\hat{F}(x), \quad x = \varphi(p)$$

unde (U, φ, x) este o harta locala în p .

Observatie. Definiția este bună deoarece schimbarile de harti locale pe varietati sunt difeomorfisme (locale). Prin urmare, rangul este definit de

$$D\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Teorema 8.1 Presupunem că rangul $\text{rang} F(p) = k$ este același în orice punct $p \in W \subset N$. Atunci pentru orice $p_0 \in W$,

$\exists (U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ hartă locală în p_0

$\exists (V, \psi, y^1, \dots, y^m)$ hartă locală în $F(p_0)$

astfel încât $\hat{F}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$.

Demonstrație. Ideea demonstrației este folosirea teoremei de inversare locală. $\square$

Definiția 8.5 Fie $F : N^n \rightarrow M^m$ o aplicație diferentiabilă și $p \in N$.

- F este *imersie* în p dacă $\text{rang} F(p)$ este maxim și este egal cu $n < m$.
 F este imersie dacă este imersie în fiecare punct $p \in N$.
- F este *scufundare* dacă F este imersie și $F : N \rightarrow F(N)$ este homeomorfism; aici $F(N)$ are topologia indusă; proprietatea este **globală**.
- F este *submersie* în p dacă $\text{rang} F(p)$ este maxim și este egal cu $m < n$. F este submersie dacă este submersie în fiecare punct $p \in N$.

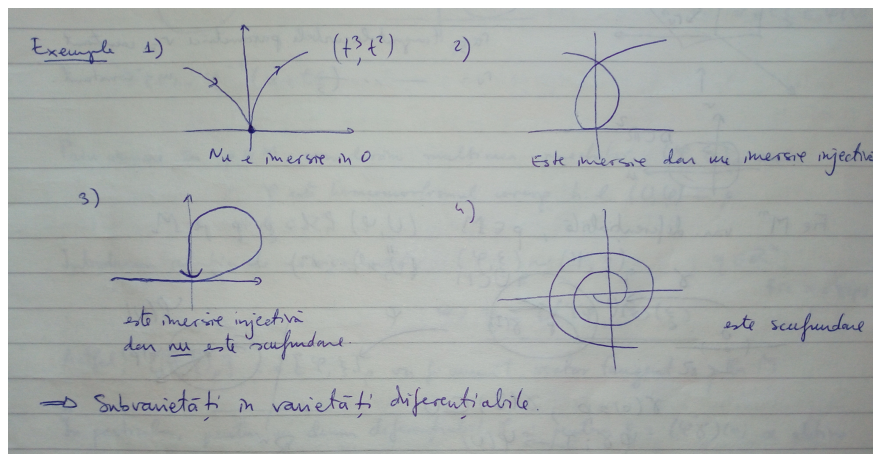


Figura 8.2: imersii; scufundari

8.3 Vectori tangenți într-un punct la o varietate

Pentru a intelege noțiunea, ne amintim mai intai ce se intampla in $\mathbb{R}^2$ și în $\mathbb{R}^3$. Să analizăm mai intai urmatoarele doua figuri:

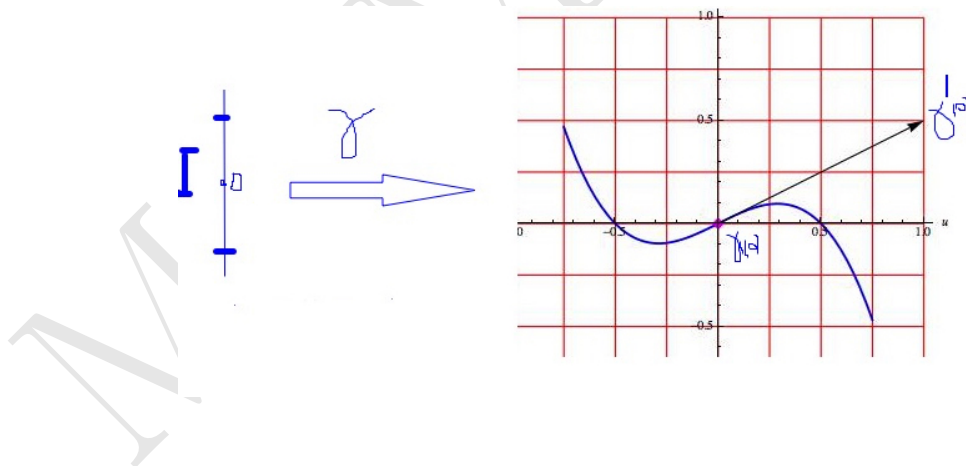


Figura 8.3: curbe; vectori tangenți – în plan

Data curba parametrizată $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ astfel incat $\gamma(0) = p_0$, atunci direcția

tangentă în p_0 la $\gamma(I)$ este dată de $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$.

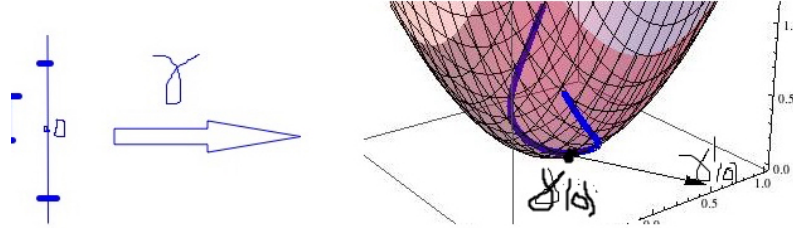


Figura 8.4: curbe; vectori tangenți – în spațiu

Data curba parametrizată $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ astfel încât $\gamma(0) = p_0$, atunci direcția tangentă în p_0 la $\gamma(I)$ este dată de $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$. Mai mult, dacă avem o suprafață parametrizată, un vector tangent într-un punct p_0 la suprafață este dat de un vector tangent la o curbă situată pe suprafață care trece prin acel punct.

Fie acum M^n o varietate diferentiabilă și $p \in M$. Considerăm în p o hartă locală (U, φ, x) . Fie $\gamma : I \rightarrow U$ o curbă pe M prin p ; mai precis

$$0 \in I, \gamma(I) \subset U, \gamma(0) = p.$$

Atunci avem definită o curbă în $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, anume

$$\varphi \gamma : I \rightarrow \varphi(U), \quad x^i = x^i(t), \quad t \in I.$$

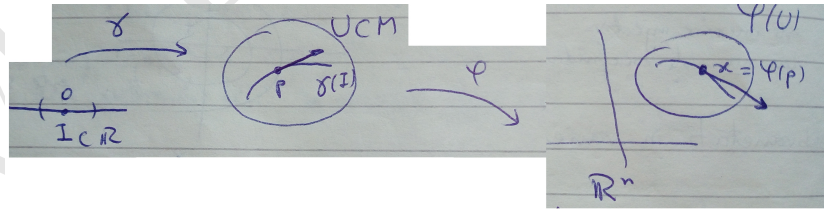


Figura 8.5: vectori tangenți într-un punct la o varietate

Considerăm

$$\underbrace{(\dot{\varphi}\gamma)(0)}_{\text{este doar o notatie}} := \underbrace{(\varphi\gamma(0), D(\varphi\gamma)(0)(1))}_{:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n} = \underbrace{(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)}_{\text{vector legat în } x=\varphi(p)}.$$

Notăție $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}(0)$, $i = 1, \dots, n$.

Daca se considera alta harta locala in p pe M , anume $(V, \psi, y^1, \dots, y^n)$ atunci

$$(\dot{\psi}\gamma)(0) = (\psi\gamma(0), D(\psi\gamma)(0)(1)) = (y, D(\psi\varphi^{-1})_x(\dot{\varphi}\gamma(0)))$$

unde $y = (y^1, \dots, y^n)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, iar $(\dot{\varphi}\gamma)(0) = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ (doar ultimile n componente).

Dorim să definim noțiunea de **vector tangent** în p la M ; mai precis un obiect care sa nu depinda de harta locala folosita (o "săgeată universală").

Fie o altă curbă $\alpha : J \rightarrow M$, $0 \in J$ cu $\alpha(0) = p$ o altă curbă diferențiabilă prin p astfel încât

$$(\dot{\varphi}\alpha)(0) = (\dot{\varphi}\gamma)(0).$$

Să vedem ce se întâmplă în cealaltă hartă locala in p . Vom analiza numai ultimile n componente:

$$(\dot{\psi}\alpha)(0) = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\dot{\varphi}\alpha(0)) = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\dot{\varphi}\gamma(0)) = (\dot{\psi}\gamma)(0).$$

Așadar, dacă $(\dot{\varphi}\alpha)(0) = (\dot{\varphi}\gamma)(0)$ într-o anumita harta locala, ele coincid in orice harta locala. Prin urmare, nu este esentiala curba, ci vectorul din $\mathbb{R}^n$.

Să vedem că, pentru orice vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ există o curbă γ diferențiabilă prin p in M astfel incat $(\dot{\varphi}\gamma)(0) = \xi$ (de fapt $(\dot{\varphi}\alpha)(0) = (x, \xi)$).

In $\varphi(U)$ considerăm un segment deschis dat de $x+t\xi$, $t \in I$ (interval suficient de mic).

Consider

$$\gamma : I \rightarrow U \subset M, \quad \gamma(t) = \varphi^{-1}(x + t\xi).$$

Concluzia este că pentru orice vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ există o curbă γ prin p astfel incat $(\dot{\varphi}\gamma)(0) = \xi$.

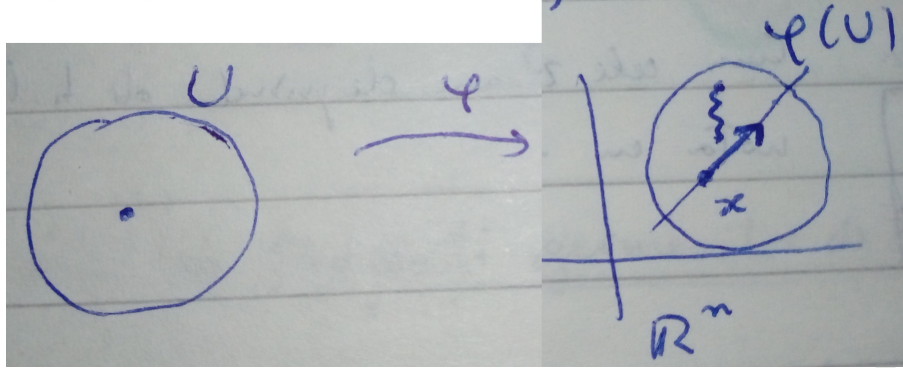


Figura 8.6: Curbă în $\varphi(U)$ cu vector tangent dat

Astfel, în $p \in M$, considerăm mulțimea perechilor $(\varphi, \xi)_p$ unde φ este homeomorfismul corespunzător unei harti locale (U, φ) în p , iar $\xi \in \mathbb{R}^n$. Pe această mulțime introducem o relație de echivalență

$$(\varphi, \xi)_p \sim (\psi, \eta)_p \iff \eta = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\xi)$$

unde $\eta \in \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$.

Definiția 8.6 Numim *vector tangent* în p la M o clasă de echivalență $[(\varphi, \xi)_p]$.

Notăție. $[(\varphi, \xi)_p] := [\varphi, \xi]_p$.

În particular, pentru o curbă diferențiabilă γ și pentru $\xi = (\dot{\varphi}\gamma)(0)$ se obține vectorul tangent în p la imaginea geometrică $\gamma(I)$ a lui γ și notăm

$$\dot{\gamma}(0) = [\varphi, (\dot{\varphi}\gamma)(0)]_p.$$

CURS 27-04-2020

Calcul diferențial pe varietăți (cont.)

9.1 Spațiul tangent într-un punct la o varietate

Definiția 9.1 Numim *spațiul tangent* în p la M și notăm $T_p M$, mulțimea vectorilor tangenți în p la M , adică

$$T_p M = \{[\varphi, \xi]_p : (U, \varphi) \text{ hartă locală în } p \text{ pe } M, \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Fie acum (U, φ) o hartă locală în p , fixată.

Propoziția 9.1 Corespondența $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto [\varphi, \xi]_p \in T_p M$ este o bijecție.

Întrucât pe $\mathbb{R}^n$ avem structură de spațiu vectorial, vom ”transporta” structura pe $T_p M$:

$$(1) [\varphi, \xi_1]_p +_\varphi [\varphi, \xi_2]_p := [\varphi, \xi_1 + \xi_2]_p$$

$$(2) a \cdot_\varphi [\varphi, \xi]_p := [\varphi, a\xi]_p$$

unde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ și $a \in \mathbb{R}$.

Aparent, operațiile definite pe $T_p M$ (adunarea și înmulțirea cu scalari) depind de φ . Însă, dacă se consideră

$$[\psi, \eta_1]_p = [\varphi, \xi_1]_p \text{ și } [\psi, \eta_2]_p = [\varphi, \xi_2]_p$$

avem

$$\eta_1 = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\xi_1) \text{ și } \eta_2 = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\xi_2).$$

Astfel, $\eta_1 + \eta_2 = D(\psi\varphi^{-1})(x)(\xi_1 + \xi_2)$, deci $+_\varphi$ și $+_\psi$ coincid.

Analog se arată și pentru înmulțirea cu scalari. Deci

structura de spațiu vectorial a lui $T_p M$ definită mai sus NU depinde de harta locală folosită.

Notații: $X_p = [\varphi, \xi]_p = [\varphi, D(\varphi\gamma)(0)(1)]$

Baza naturală. Vom transporta acum baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ pe $T_p M$.

Astfel, dacă $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ este o hartă locală în p pe M notăm $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$

sau $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = [\varphi, e_i]_p$.

Atunci, pentru $\xi \in \mathbb{R}^n$ avem descompunerea $\xi = \xi^i e_i$; prin urmare

$$X_p := [\varphi, \xi]_p = [\varphi, \xi^i e_i]_p = \xi^i [\varphi, e_i]_p = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

care reprezintă descompunerea vectorului tangent X_p în **baza naturală**

$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}_{i=1,\dots,n}$, relativ la harta locală (U, φ) .

Observație. Dacă se consideră o altă hartă locală $(V, \psi, y^1, \dots, y^n)$ în p , același vector tangent X_p se exprimă $[\psi, \eta]_p$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Avem următoarele schimbări (de baze și de coordonate):

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \quad (9.1)$$

$$\eta^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \xi^i. \quad (9.2)$$

Dacă $X_p = \dot{\gamma}(0)$ atunci $\xi = \dot{x}^i e_i$ și, prin urmare, $\dot{\gamma}(0) = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, unde $p = \gamma(0)$.

9.2 Acțiunea vectorilor tangenți asupra ger- menilor de funcții diferentiabile

Fie M^n o varietate diferentiabilă, $p \in M$, U, V două vecinătăți deschise a lui p . Fie $f \in C^\infty(U)$ și $g \in C^\infty(V)$.

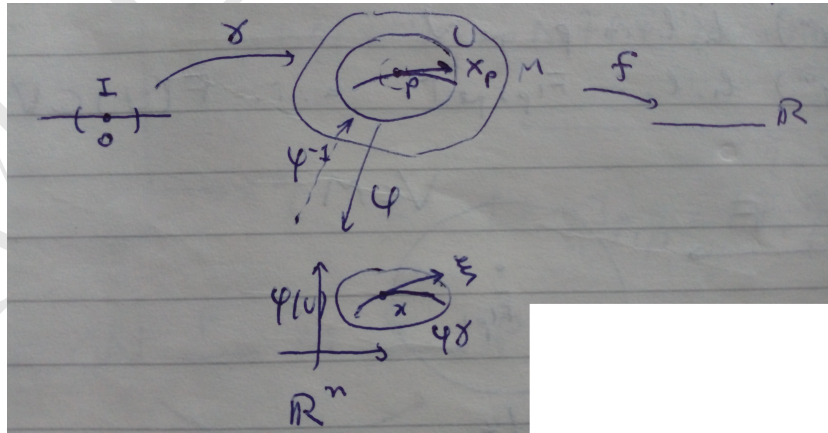
Definiția 9.2 Spunem că f și g definesc același *germene* de funcție diferentiabilă în p dacă există o vecinătate W deschisă a lui p , $W \subset U \cap V$, astfel încât $f|_W = g|_W$.

Avem astfel definită o relație de echivalență (pe mulțimea funcțiilor diferentiabile "în jurul lui p "), iar clasele de echivalență se numesc germeni de funcții diferentiabile în p .

Notății. $[f]_p$ (ca orice clasă de echivalență); însă prin abuz vom nota tot cu f . Mulțimea germenilor în p se notează cu $C^\infty(p)$.

Considerăm:

- $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ hartă locală în p pe M ;
- $\gamma: I \rightarrow U$, $\gamma(0) = p$, $\varphi(\gamma(0)) = x$;
- $X_p = [\varphi, \xi]_p = [x, (\varphi\gamma)'(0)]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;
- $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ funcție diferentiabilă în p .



Evident $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ nu depinde de harta locală (U, φ) și astfel nici $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$.

Pe de altă parte, avem $f \circ \gamma = f \circ (\varphi^{-1}\varphi) \circ \gamma = f^\varphi \circ (\varphi\gamma)$. Astfel

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} = df^\varphi \circ D(\varphi\gamma)(0)(1) = df^\varphi(x)(\xi),$$

astfel, $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$ nu depinde de curba aleasă γ .

Definiția 9.3 Acțiunea vectorului tangent X_p asupra germenului de funcție f este dată de

$$X_p f := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = df^\varphi(x)(\xi),$$

unde $\varphi(p) = x$ și $X_p = [\varphi, \xi]_p$.

Proprietăți. Se pot demonstra următoarele proprietăți:

1. $(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f$;
2. $(aX_p)f = a X_p f$;
3. $X_p(f + g) = X_p f + X_p g$;
4. $X_p(af) = aX_p f$, $a \in \mathbb{R}$;
5. $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$ (Liebnitz).

Caz particular. Dacă $X_p = [\varphi, e_i]_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, atunci

$$X_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = df^\varphi(x)(e_i) = \underbrace{\frac{\partial f^\varphi}{\partial x^i}(x)}_{\text{derivată parțială}}.$$

Spunem despre X_p că definește o *derivare* pe $C^\infty(p)$.

Dăm acum o reciprocă a rezultatului demonstrat mai sus, care reprezintă de fapt un alt mod de a introduce vectori tangenți într-un punct la o varietate.

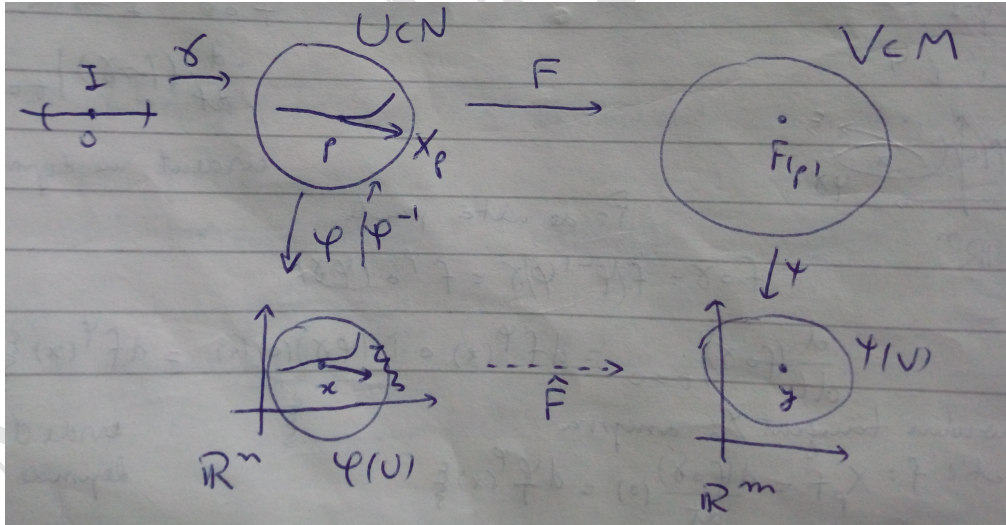
Propoziția 9.2 Fie M^n o varietate diferențiabilă, $p \in M$ și $D : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație $\mathbb{R}$ -liniară, care verifică regula de tip Leibnitz în p : $D(fg) = f(p)Dg + g(p)Df$. Atunci există și este unic un vector tangent în p la M care definește aceeași acțiune asupra germenilor de funcții din $C^\infty(p)$ ca și D .

Prin urmare, vectorii tangenți sunt caracterizați de derivări asupra germenilor de funcții diferențiabile.

9.3 Aplicația liniară tangentă

Ideea acestei noțiuni este de a "transporta" vectori tangenți de pe o varietate pe alta printr-o aplicație diferențiabilă. Fie așadar $F : N^n \rightarrow M^m$ o astfel de aplicație între două varietăți.

Fie $p \in N$, $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ o hartă locală în p pe N și $(V, \psi, y^1, \dots, y^m)$ o hartă locală în $F(p)$ pe M astfel încât $F(U) \subset V$.



Dorim să definim o aplicație între $T_p N$ și $T_{F(p)} M$.

Considerăm așadar $X_p \in T_p N$, $X_p = [\varphi, \xi]_p$ și fie $\gamma : I \rightarrow U$ astfel încât $p = \gamma(0)$ și $\xi = D(\varphi\gamma)(0)(1)$. Astfel, $F\gamma$ este o curbă diferențiabilă în V prin $F(p)$. Calculăm $(F\gamma)(0) = [\psi, \eta]_{F(p)}$:

$$\begin{aligned}\eta &= D(\psi F\gamma)(0)(1) = D(\psi F\varphi^{-1}\varphi\gamma)(0)(1) = D\hat{F}(D(\varphi\gamma)(0)(1)) \\ &= D\hat{F}(x)(\xi).\end{aligned}$$

Am obținut astfel un vector tangent în $F(p)$ la M .

Definiția 9.4 Aplicația

$$\begin{aligned}F_{*,p} : T_p N &\longrightarrow T_{F(p)} M \\ X_p = [\varphi, \xi]_p &\longmapsto [\psi, D\hat{F}(x)(\xi)]_{F(p)}\end{aligned}$$

se numește *aplicația liniară tangentă* a lui F .

Observație. $F_{*,p}$ este într-adevăr o aplicație liniară.

Alte notații: $DF(p)$, $T_p F$ sau $F'(p)$.

Observație. Definiția nu depinde de hărțile locale folosite.

Propoziția 9.3 Dacă N, M, P sunt varietăți și F, G sunt aplicații ca în figură

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{F} & M & \xrightarrow{G} & P \\ & & \searrow & \swarrow & \\ & & G \circ F & & \end{array}$$

atunci $(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}$.

Aplicație. Să se descrie spațiul tangent într-un punct la sfera $\mathbb{S}^n$.

Propoziția 9.4 Fie $F : N \rightarrow M$ o aplicație diferențiabilă între două varietăți. Fie $p \in N$, $X_p \in T_p N$ și $g \in C^\infty(F(p))$ (un germene de funcție diferențiabilă). Atunci

$$(F_{*,p} X_p)g = X_p(g \circ F).$$

Demonstrație. Dacă $X_p = [\varphi, \xi]_p$, atunci avem $F_{*,p} X_p = [\psi, \eta]_{F(p)}$ unde $\eta = D\hat{F}(x)\xi$. Calculăm

$$\begin{aligned}(F_{*,p} X_p)g &= dg^\psi(y)(\eta) = d(g\psi^{-1})D\hat{F}(x)\xi = d(g\psi^{-1}\psi F\varphi^{-1})(x)\xi \\ &= d(gF\varphi^{-1})(x)\xi = d(gF)^\varphi(x)\xi = X_p(g \circ F).\end{aligned}$$

□

Exprimări în coordonate. Dacă notăm coordonatele în cele două hărți locale cu $x = (x^1, \dots, x^n)$ și $y = (y^1, \dots, y^m)$, respectiv, atunci avem reprezentarea lui F în cele două hărți

$$\hat{F}: y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Diferențiala se scrie matricial

$$D\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Pentru $X_p = [\varphi, \xi]_p = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ avem

$$\begin{aligned} F_{*,p}X_p &= [\psi, D\hat{F}(x)\xi]_{F(p)} = \xi^i [\psi, D\hat{F}(x)e_i]_{F(p)} \\ &= \xi^i [\psi, \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} e'_\alpha]_{F(p)} \quad \text{baza canonică în } \mathbb{R}^m \\ &= \xi^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} [\psi, e'_\alpha]_{F(p)} = \xi^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right]_{F(p)}}_{\text{baza naturală în } T_{F(p)}M}. \end{aligned}$$

Exemple.

1. Fie $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ o hartă locală pe M și $p \in M$. Considerăm aplicația

$$\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n,$$

pentru care $\hat{\varphi} = \mathbf{1}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbf{1}_{\varphi(U)}$. Aplicația liniară tangentă în p este

$$\varphi_{*,p}: T_p M \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$$

$$X_p = [\varphi, \xi]_p \longmapsto \varphi_{*,p} X_p = \xi.$$

Observație. Avem, de asemenea, că

$$\varphi_{*,x}^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p U \equiv T_p M$$

$$\xi \longmapsto \varphi_{*,x}^{-1} \xi = [\varphi, \xi]_p.$$

2. Fie $\gamma : I \xrightarrow{d} \mathbb{R} \rightarrow M$ o curbă netedă. Atunci

$$\gamma_{*,t_0} : T_{t_0}I \cong \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t_0)}M$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0} = [\mathbf{1}_{\mathbb{R}}, 1]_{t_0} \equiv 1 \mapsto \gamma_{*,t_0}(1) = \gamma'(t_0) := [\varphi, (\varphi\gamma)'(t_0)]_{\gamma(t_0)}.$$

Propoziția 9.5 Fie $F : N^n \rightarrow M^m$, $p \in N$. Atunci

- (a) F este imersie în p dacă și numai dacă $F_{*,p} : T_pN \rightarrow T_{F(p)}M$ este injectivă.
- (b) F este submersie în p dacă și numai dacă $F_{*,p} : T_pN \rightarrow T_{F(p)}M$ este surjectivă.

CURS 04-05-2020

Calcul diferențial pe varietăți (cont.)

Fie V un spațiu vectorial real. Atunci dualul său este un spațiu vectorial real, definit astfel

$$V^* = \{\theta : V \rightarrow \mathbb{R} : \theta \text{ aplicație liniară}\}.$$

10.1 Spațiul cotangent și aplicația liniară cotangentă

Fie M^n o varietate diferențiabilă, $p \in M$ și $T_p M$ spațiul tangent în p la M .

Definiția 10.1 Numim *spațiul cotangent* în p la M și notăm $T_p^* M$, dualul spațiului tangent în p a M , adică

$$T_p^* M = \{\theta_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} : \theta_p \text{ aplicație liniară}\}.$$

Un element θ_p din $T_p^* M$ se numește *vector tangent* sau *covector tangent*.

Observație. Spațiul $T_p^* M$ se organizează în mod natural ca spațiu vectorial real de dimensiune n .

Vom pune în evidență niște covectori ”speciali”.

Fie $f \in C^\infty(p)$ (germene de funcție diferențiabilă în p). Definim

$$df_p \in T_p^* M \text{ prin } df_p(X_p) := X_p f.$$

Evident că df_p este liniară.

Avem, în plus, că

- ⊗ $d(f + g)_p = df_p + dg_p$
- ⊗ $d(af)_p = a df_p$
- ⊗ $d(fg)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p$, $f, g \in C^\infty(p)$, $a \in \mathbb{R}$.

Structura de spațiu vectorial real este cea pe care o avem din cadrul general (de la dualul unui spațiu vectorial real). Căutăm o bază în T_p^*M :

Considerăm funcțiile coordonate $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ într-o hartă locală (U, φ, x^i) în p . Atunci $dx_p^i \in T_p^*M$ și **formează o bază**:

$$dx_p^i(X_p) = X_p(x^i) = \left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)(x^i) = \xi^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x) = \xi^i.$$

Rezultă $dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$ adică **$\{dx_p^i\}$ este duala bazei naturale din T_pM** .

Observație. Dacă $\theta_p \in T_p^*M$ atunci există n numere reale θ_i astfel încât $\theta_p = \theta_i dx_p^i$.

Observație. Dacă $f \in C^\infty(p)$, atunci $df_p = \frac{\partial f^p}{\partial x^i}(x) dx_p^i$.

Observație. Într-o altă hartă locală $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{x})$ putem considera același scenariu. Trecerea de la o hartă locală la alta se face astfel

$$d\tilde{x}_p^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x) dx_p^i.$$

Dacă $\theta_p \in T_p^*M$ se scrie $\theta_p = \theta_i dx_p^i = \tilde{\theta}_j d\tilde{x}_p^j$, atunci

$$\theta_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x) \tilde{\theta}_j.$$

10.2 Aplicația liniară cotangentă

Fie $F : N^n \rightarrow M^m$ o aplicație diferențiabilă, $p \in N$, iar T_pN și $T_{F(p)}M$ spațiile tangente corespunzătoare. Fie T_p^*N și $T_{F(p)}^*M$ spațiile cotangente (obținute prin dualitate).

Pentru aplicația liniară tangentă $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{*,F(p)} M$ considerăm duala

$$F_p^* : T_{F(p)}^* M \rightarrow T_p^* N, \quad \omega_{F(p)} \mapsto F_p^* \omega_{F(p)}$$

$$(F_p^* \omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_{*,p} X_p).$$

Atenție! Se notează F_p^* și **NU** $F_{F(p)}^*$!

Propoziția 10.1 Fie $F : N \rightarrow M$ o aplicație diferențiabilă și $g \in C^\infty(F(p))$.

Atunci $F_p^* dg_{F(p)} \in T_p^* N$ și

$$F_p^* dg_{F(p)} = d(g \circ F)_p.$$

Demonstrație. Evident $F_p^* dg_{F(p)}$ este liniară pe $T_p N$. Este de asemenea evident că $g \circ F$ definește un germene de funcție diferențiabilă pe N .

Considerăm $X_p \in T_p N$ și facem următorul calcul:

$$(F_p^* dg_{F(p)})(X_p) = dg_{F(p)}(F_{*,p} X_p) = (F_{*,p} X_p)(g) = X_p(g \circ F) = d(g \circ F)_p(X_p).$$

Cum X_p a fost ales arbitrar, rezultă concluzia. $\square$

Observație. Notăm $F^* g := g \circ F$ aplicația indusă la nivel de funcții. Putem rescrie relația din propoziția precedentă

$$F_p^* \circ d = d \circ F_p^*$$

(cei doi "operatori" comută).

Vom reveni!

Compunerea.

Propoziția 10.2 Dacă N, M, P sunt varietăți și F, G sunt aplicații ca în figură

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{F} & M & \xrightarrow{G} & P \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ & & G \circ F & & \end{array}$$

atunci $(G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^*$.

Exprimări în coordonate locale.

Fie (U, φ, x^i) și (V, ψ, y^α) două hărți locale în $p \in N$ și $F(p) \in M$, respectiv. Scriem $\omega_{F(p)} = \omega_\alpha dy_{F(p)}^\alpha$. Dacă $\hat{F} : y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n)$, $\alpha = 1, \dots, m$ este exprimarea lui F în cele două hărți atunci

$$F_p^* \omega_{F(p)} = \omega_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(x) dx_p^i.$$

10.3 Spații de tensori

Noțiunea de *tensor* reprezintă o generalizare a noțiunii de vector și covector, respectiv. Vom insista pe cazul tensorilor de ordinul al doilea, urmând ca extinderea pentru ordin arbitrar să se facă în mod natural.

10.3.1 Tensori covarianți de ordinul al doilea

Definiția 10.2 Un *tensor covariant* (de ordinul al doilea) în p pe M este o aplicație biliniară pe $T_p M$

$$\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

adică $\omega_p \in L_2(T_p M)$.

Notăție. Mulțimea tensorilor covarianți de ordinul al doilea în p se notează $\mathcal{T}_{2,p}^0(M)$.

Cum putem construi un tensor de ordinul al doilea în p ? Fie θ_p^1 și θ_p^2 doi covectori în p (adică aparțin spațiului $T_p^* M$); definim *produsul tensorial*

$$\begin{aligned} \theta_p^1 \otimes \theta_p^2 : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\mapsto \theta_p^1(X_p)\theta_p^2(Y_p). \end{aligned}$$

Propoziția 10.3 Produsul tensorial este un tensor (adică o aplicație biliniară) covariant de ordinul al doilea în p .

Proprietăți. Avem

- ★ $\theta_p^1 \otimes (\theta_p^2 + \theta_p^3) = \theta_p^1 \otimes \theta_p^2 + \theta_p^1 \otimes \theta_p^3;$
- ★ $(\theta_p^1 + \theta_p^2) \otimes \theta_p^3 = \theta_p^1 \otimes \theta_p^3 + \theta_p^2 \otimes \theta_p^3;$
- ★ $(a\theta_p^1) \otimes \theta_p^2 = \theta_p^1 \otimes (a\theta_p^2) = a\theta_p^1 \otimes \theta_p^2, a \in \mathbb{R}.$

Teorema 10.1 Mulțimea $\mathcal{T}_{2,p}^0(M)$ se poate organiza ca spațiu vectorial real de dimensiune n^2 . Dacă (U, φ, x^i) este o hartă locală în p pe M atunci sistemul $\{dx_p^i \otimes dx_p^j : i, j = 1, \dots, n\}$ formează o bază în $\mathcal{T}_{2,p}^0(M)$.

Demonstrație. Demonstrația se rezumă la calcule simple de algebră liniară.

Astfel, dacă $\omega_p \in \mathcal{T}_{2,p}^0(M)$, atunci există n^2 numere reale ω_{ij} astfel încât $\omega_p = \omega_{ij} dx_p^i \otimes dx_p^j$. Aceste numere reprezintă

$$\omega_{ij} = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right).$$

Avem astfel posibilitatea introducerii unei alte notații pentru $L_2(T_p M)$ și anume

$$L_2(T_p M) = T_p^* M \otimes T_p^* M = \otimes^2 T_p^* M.$$

Simetrie / antisimetrie.

Definiția 10.3 Un tensor covariant ω_p de ordinul al doilea în p pe M se numește

- *simetric* dacă $\omega_p(X_p, Y_p) = \omega_p(Y_p, X_p)$;
- *antisimetric* dacă $\omega_p(X_p, Y_p) = -\omega_p(Y_p, X_p)$,

pentru orice $X_p, Y_p \in T_p M$.

Notații. Spațiul vectorial al tensorilor simetrici de ordinul al doilea se notează cu $S_2(T_p M)$ și are dimensiunea $\frac{n(n+1)}{2}$. Spațiul vectorial al tensorilor antisimetrici de ordinul al doilea se notează cu $A_2(T_p M)$ și are dimensiunea $\frac{n(n-1)}{2}$. Avem evident

$$L_2(T_p M) = S_2(T_p M) \oplus A_2(T_p M).$$

Dacă $\omega_p = \theta_p^1 \otimes \theta_p^2$ atunci descompunem ω_p în

- *partea simetrică*, obținută cu ajutorul *produsului simetric* a doi covectori

$$\theta_p^1 \cdot \theta_p^2(X_p, Y_p) = \frac{1}{2}(\theta_p^1(X_p)\theta_p^2(Y_p) + \theta_p^1(Y_p)\theta_p^2(X_p))$$

- *partea antisimetrică*, obținută cu ajutorul *produsului antisimetric* a doi covectori

$$\theta_p^1 \wedge \theta_p^2(X_p, Y_p) = \frac{1}{2}(\theta_p^1(X_p)\theta_p^2(Y_p) - \theta_p^1(Y_p)\theta_p^2(X_p)).$$

Punem astfel în evidență baze pentru cele două spații:

◇ pentru $S_2(T_p M)$: $\{dx_p^i \cdot dx_p^j : 1 \leq i \leq j \leq n\}$

◇ pentru $A_2(T_p M)$: $\{dx_p^i \wedge dx_p^j : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Observație. Dacă $\theta_p \in T_p^* M$ atunci $\theta_p \wedge \theta_p = 0$.

CURS 11-05-2020

Calcul diferențial pe varietăți (cont.)

11.1 Spații de tensori (cont.)

11.1.1 Tensori covarianți de ordinul al doilea (cont.)

Aplicația liniară indusă.

Fie $F : N^n \rightarrow M^m$, $p \in N$ și $\omega_{F(p)}$ un tensor covariant de ordinul al doilea în $F(p)$ pe M . Dorim să "aducem" $\omega_{F(p)}$ în p pe N .

Definim $F_p^* : \mathcal{T}_{2,F(p)}^0(M) \rightarrow \mathcal{T}_{2,p}^0(N)$

$$F_p^* \omega_{F(p)}(X_p, Y_p) := \omega_{F(p)}(F_{*,p} X_p, F_{*,p} Y_p), \quad \forall X_p, Y_p \in T_p N.$$

Tensori covarianți de ordin arbitrar: Extindem produsul tensorial astfel:

Pentru $\omega_p \in \mathcal{T}_{k,p}^0(M)$ și $\theta_p \in \mathcal{T}_{l,p}^0(M)$ definim

$$\omega_p \otimes \theta_p \in \mathcal{T}_{k+l,p}^0(M)$$

$$\omega_p \otimes \theta_p(X_{1,p}, \dots, X_{k,p}, X_{k+1,p}, \dots, X_{k+l,p}) = \omega_p(X_{1,p}, \dots, X_{k,p}) \theta_p(X_{k+1,p}, \dots, X_{k+l,p}).$$

11.1.2 Tensori contravarianți de ordinul al doilea

Se definesc analog (prin dualitate): S_p este un tensor contravariant în p pe M dacă S_p este o aplicație biliniară pe $T_p^*M \times T_p^*M$. Mulțimea tensorilor contravarianți de ordinul al doilea pe M se notează $\mathcal{T}_{0,p}^2(M)$.

Local, într-o hartă (U, φ, x) , un tensor contravariat S_p de ordinul al doilea se scrie

$$S_p = S^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

unde produsul tensorial se definește analog.

Observație. Definim $X_p : T_p^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $X_p(\omega_p) = \omega_p(X_p)$ pentru orice $\omega_p \in T_p^*(M)$.

11.1.3 Tensori micști de ordinul al doilea

Un astfel de tensor (care va fi definit imediat) este o dată covariant și o dată contravariant.

Definiția 11.1 Un *tensor mixt* (de ordinul al doilea) în p pe M este o aplicație biliniară pe $T_pM \times T_p^*(M)$

$$J_p : T_pM \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R},$$

adică $J_p \in L_2(T_pM, T_p^*M)$.

Notăție. Mulțimea tensorilor covarianți de ordinul al doilea în p se notează $\mathcal{T}_{1,p}^1(M)$.

Cum putem construi un tensor mixt de ordinul al doilea în p ? Fie θ_p și X_p un covector, respectiv un vector în p ; definim *produsul tensorial*

$$\begin{aligned} \theta_p \otimes X_p &: T_pM \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R} \\ (Y_p, \omega_p) &\mapsto \theta_p(Y_p) \omega_p(X_p). \end{aligned}$$

Propoziția 11.1 Produsul tensorial definit mai sus este un tensor mixt de ordinul al doilea în p .

Prin urmare, într-o hartă locală (U, φ, x) în p pe M , un tensor mixt se scrie

$$J_p = J_j^i dx_p^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Schimbarea de hărți locale.

individual

Observație. Se știe de la algebra liniară că pentru un spațiu vectorial V avem $L_2(V, V^*) \sim \text{End}(V)$. Vom aplica acea teorie pe cazul tensorilor micști de ordinul al doilea.

Dacă $J_p \in \mathcal{T}_{1,p}^1(M)$, atunci lui J_p i se poate asocia $\tilde{J}_p : T_p M \rightarrow T_p M$ (endomorfism). Să stabilim legătura dintre cele două obiecte J_p și $\tilde{J}_p$.

- Fie $X_p \in T_p M$; atunci $\tilde{J}_p X_p \in T_p M$. Pentru $\omega_p \in T_p^* M$, definim

$$\omega_p(\tilde{J}_p X_p) := J_p(X_p, \omega_p)$$

relație ce definește în mod unic endomorfismul $\tilde{J}_p$.

Prin urmare am definit o aplicație, evident liniară, de la $\mathcal{T}_{1,p}^1(M)$ la $\text{End}(T_p M)$ dată prin $J_p \mapsto \tilde{J}_p$.

Întrucât dimensiunile celor două spații sunt egale (cu n^2) rezultă ca ele sunt izomorfe.

Caz special $J_p = \theta_p \otimes X_p$; cine este $\tilde{J}_p$?

Definim $\omega_p(\tilde{J}_p Y_p) = (\theta_p \otimes X_p)(Y_p, \omega_p) = \theta_p(Y_p) \omega_p(X_p)$. Astfel

$$(\theta_p \otimes X_p) Y_p \equiv \theta_p(Y_p) X_p.$$

Local, dacă $J_p = J_i^j dx_p^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ atunci $\tilde{J}_p$ se definește astfel

$$\tilde{J}_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = J_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Prin urmare, coeficienții sunt aceiași și astfel vom renunța la $\sim$ pentru $\tilde{J}_p$.

Schimbări de coordonate. Fie (U, φ, x) și $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{x})$ două hărți locale în p , în care $J_p \in \mathcal{T}_{1,p}^1(M)$ are exprimările

$$J_p = J_i^j dx_p^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad J_p = \tilde{J}_a^b d\tilde{x}_p^a \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b} \Big|_p.$$

Atunci

$$\tilde{J}_a^b = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^j}(x) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^a}(\tilde{x}) J_i^j.$$

11.1.4 Tensori micști de ordin superior

Punem în evidență doar doi astfel de tensori

- $T_p \in \mathcal{T}_{2,p}^1(M)$, $T_p : T_p M \times T_p M \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$, trilineară

Analog ca în cazul tensorilor de tip $(1,1)$ pe M , adică din $\mathcal{T}_{1,p}^1(M)$ putem gândi $T_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$.

- $R_p \in \mathcal{T}_{3,p}^1(M)$, $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$, 4-liniară

Analog ca mai sus putem gândi $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$.

Astfel de tensori vor fi întâlniți în capitolul **Conexiuni liniare pe varietăți**, când vom studia torsiunea și curbura unei conexiuni liniare pe M .

11.2 Fibratul tangent

Fie M^n o varietate diferențibilă de dimensiune n . Dorim să construim o nouă varietate diferențibilă strâns legată de M .

Fie $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M$ mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M .

Mulțimea $T(M)$ se numește *fibratul tangent* al lui M , iar $T_p M$ se numește *fibra* în p . Momentan această mulțime este una abstractă pe care vrem să definim o topologie și o structură diferențială.

Definiția 11.2 Aplicația $\pi : T(M) \rightarrow M$ care asociază fiecărui vector $v \in T(M)$ punctul său de tangență se numește *proiecția canonică*. Mai precis,

$$\pi(v) = p \quad \text{dacă } v \in T_p M.$$

Definiția 11.3 Dacă $A \subset M$ este o submulțime a lui M , definim

$$T(M)|_A = \bigcup_{p \in A} T_p M = \pi^{-1}(A).$$

În cazul particular $A = \{p_0\}$ avem $T(M)|_{\{p_0\}} = \pi^{-1}(p_0) = T_{p_0}M$.

Teorema 11.1 Mulțimea $T(M)$ poate fi organizată ca varietate diferențiabilă de dimensiune $2n$. Dacă M este de clasă C^k ($k < \infty$), atunci $T(M)$ este de clasă $k - 1$.

Demonstrație. (schiță)

Vom defini topologia și structura diferențială pe $T(M)$, evident pornind de la M .

Fie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas pe M ; $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$

Definim $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $v \mapsto (\varphi_\alpha(\pi(v)), (\varphi_\alpha)_{*,\pi(v)}v)$.

Mai precis primele n componente sunt **coordonatele punctului de tangentă** $p = \pi(v)$, iar ultimele n componente sunt **coordonatele lui v prin aplicația liniară tangentă** $(\varphi_\alpha)_{*,p}$.

• Arătăm căm obținut un homeomorfism.

Dacă $(x, \xi) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ atunci există unic $p \in U_\alpha$ astfel încât $\varphi(p) = x$. Luăm $v = [\varphi_\alpha, \xi]_p \in T(M)_{U_\alpha}$.

Topologia: mulțimile deschise din $T(M)$ sunt reuniuni arbitrare de intersecții finite de mulțimi de tipul $\Phi^{-1}(D)$ cu $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ (deschisă). Prin urmare există bază numărabilă a topologiei pe $T(M)$.

Deoarece $\Phi_\alpha^{-1}(D)$ este deschis, rezultă că Φ_α este continuă.

Avem:

1. $\pi : T(M) \rightarrow M$ este continuă;
2. topologia definită anterior este separată Hausdorff.

Anticipăm că $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ vor fi hărțile pe $T(M)$.

Aplicația $\Phi_\alpha^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ ne dă proprietatea de a fi local euclidian de dimensiune $2n$.

Compatibilitatea hărților:

Fie (U, φ) și (V, ψ) hărți locale pe M și Φ , respectiv Ψ definite ca mai sus. Fie de asemenea $v \in \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ cu $\pi(v) = p \in U \cap V$. Punem

$$\varphi(p) = x, \quad \psi(p) = y, \quad \varphi_{*,p}v = \xi, \quad \psi_{*,p}v = \eta.$$

Atunci

$$\Phi(v) = (x, \xi) \quad \Psi(v) = (y, \eta).$$

Compunerea este dată de relațiile

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi^{-1})(x, \xi) &= \Psi([\varphi, \xi]_p) = (\psi\varphi^{-1}(x), D(\psi\varphi^{-1})(x)\xi) \\ &= (\psi\varphi^{-1}(x), \psi_{*,p}\varphi_{*,x}^{-1}\xi). \end{aligned}$$

Deci $\Psi\Phi^{-1}$ este difeomorfism.

Observație. Referitor la clasa de diferențiabilitate, se observă că, dacă pe prima componentă (vectorială) avem k , atunci pe a doua componentă avem $k-1$ deoarece se face o "derivare" prin operatorul diferențialei Fréchet, deci clasa scade cu 1.

□

Propoziția 11.2 Aplicația $\pi : T(M) \rightarrow M$ este o submersie.

Demonstrație. Lucru individual.

CURS 18-05-2020

Calcul diferențial pe varietăți (cont.)

12.1 Câmpuri vectoriale pe varietăți

Fie M^n o varietate diferențiabilă, $T(M)$ fibratul său tangent și fie $\pi : T(M) \rightarrow M$ proiecția canonică.

Definiția 12.1 O aplicație diferențiabilă $X : W \subset M \rightarrow T(M)$ cu proprietatea $\pi \circ X = \mathbf{1}_W$ se numește *câmp vectorial* pe W .

Precizări. Condiția din enunț se rescrie $X(p) \in T_p M$ pentru orice $p \in W$, ceea ce înseamnă (pentru $W = M$) că diagrama de mai jos este comutativă

$$\begin{array}{ccc} X : M & \longrightarrow & T(M) \\ & \searrow \scriptstyle \mathbf{1}_M & \downarrow \scriptstyle \pi \\ & & M \end{array}$$

Un câmp vectorial este o "colecție" de vectori tangenți care se schimbă diferențiabil la trecerea de la un punct la altul.

Exprimări locale. Dacă $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$ este o hartă locală pe M . Definim, pentru fiecare $i = 1, \dots, n$, aplicația

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow T(M), \quad p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M.$$

Cu alte cuvinte, $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$.

Trebuie să demonstrăm că aplicația este diferențiabilă (pe U). Pentru aceasta, să găsim reprezentarea aplicației de mai sus în două hărți, adică

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} : \varphi(U) \rightarrow \Phi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \Phi \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi^{-1}.$$

Avem

$$\mathbb{R}^n \ni x \xrightarrow{\varphi^{-1}} p \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \xrightarrow{\Phi} (x, e_i) \in \mathbb{R}^{2n},$$

care este evident diferențiabilă.

Am obținut astfel, un set de n câmpuri vectoriale (locale) pe U .

Fie acum un câmp vectorial arbitrar X ; atunci $X(p) \in T_p M$, deci $X(p) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, unde $\xi^i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Când p variază, atunci ξ^i variază, prin urmare se obțin funcții pe U (depind de p). Așadar,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \xi^i \in C^\infty(U).$$

Mulțimea câmpurilor vectoriale pe o varietate M se notează cu $\chi(M)$ sau $\mathfrak{X}(M)$.

Am văzut că pentru vectori tangenți avem la dispoziție aplicația liniară tangentă pentru a-i ”transporta” de pe o varietate pe alta. Formulă același tip de problemă și în cazul câmpurilor vectoriale:

Fie $F : N^n \rightarrow M^m$ o aplicație diferențiabilă între cele două varietăți. Presupunem că avem X un câmp vectorial pe N . În general, **NU** putem defini $F_* X$. Totuși, dacă F este un difeomorfism, definirea este posibilă, anume $F_* X$ este câmp vectorial pe M . Mai precis,

$$(F_* X)(q) := F_{*,p} X(p), \quad \text{unde } p = F^{-1}(q).$$

Scris succint $F_* X = F_* \circ X \circ F^{-1}$.

12.1.1 Acțiunea câmpurilor vectoriale asupra funcțiilor diferențiabile

Fie $X \in \mathfrak{X}(M)$ un câmp vectorial, iar $f \in C^\infty(M)$ o funcție diferențiabilă pe o varietate M .

Definiția 12.2 Acțiunea câmpului X asupra funcției f este $Xf \in C^\infty(M)$ dată prin

$$Xf : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto (Xf)(p) := X_p f,$$

unde $X_p = X(p) \in T_p M$, iar f definește germenele f (aceeași notație).

Proprietăți. Pentru $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $a \in \mathbb{R}$ avem:

1. $X(f + g) = Xf + Xg$;
2. $X(af) = aXf$;
3. $X(fg) = fX(g) + X(f)g$;
4. acțiunea lui X asupra lui f este locală, adică dacă $f|_W = 0$, atunci $Xf|_W = 0$;
5. $(X + Y)f = Xf + Yf$;
6. $(aX)f = aXf$.

Propoziția 12.1 Fie $D : C^\infty(M) \mapsto C^\infty(M)$ cu următoarele proprietăți:

- $\mathbb{R}$ -liniară;
- este derivare ("verifică Leibnitz")
- este locală.

Atunci există și este unic un câmp vectorial X pe M care definește aceeași acțiune ca și D .

12.1.2 Croșetul a două câmpuri vectoriale

Fie (U, φ, x) o hartă locală pe M și fie $f \in C^\infty(U)$. Atunci $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial f^\varphi}{\partial x^i}$.

Apoi, $\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f = \frac{\partial^2 f^\varphi}{\partial x^i \partial x^j} f$ iar $\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial^2 f^\varphi}{\partial x^j \partial x^i} f$.

Cele două expresii sunt egale grație legii de comutare Schwarz.

Definiția 12.3 Fie $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Numim *croșetul* câmpurilor vectoriale X cu Y un alt câmp vectorial notat $[X, Y]$, definit prin acțiunea asupra funcțiilor astfel:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Observație. Croșetul $[X, Y]$ ”măsoară abaterea” de la regula de comutare Schwarz pentru X, Y . Conform celor de mai sus, $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0, \forall i, j$.

Observație. Se arată că, într-adevăr, $[X, Y]$ este un câmp vectorial pe M .

Proprietăți. Croșetul a două câmpuri vectoriale X, Y verifică:

- (i) antisimetria: $[Y, X] = -[X, Y]$;
- (ii) $\mathbb{R}$ -biliniaritate: $[aX, bY] = ab[X, Y], a, b \in \mathbb{R}$;
- (iii) **identitatea lui Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ ¹
- (iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$, pentru orice $f, g \in C^\infty(M)$.

Scrisoare locală. Dacă (U, φ, x) este o hartă locală pe M , iar $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ cu ajutorul căreia $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, atunci

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Încheiem această parte cu două rezultate care implică aplicația liniară tangentă.

¹de arătat!

Propoziția 12.2 Fie $F : N \rightarrow M$ un difeomorfism, $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ două câmpuri vectoriale pe N și $g \in C^\infty(M)$ o funcție diferențiabilă pe M . Atunci

1. $(F_*X)g = X(g \circ F) \circ F^{-1}$;
2. $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

12.2 Fibratul cotangent - forme diferențiale pe varietăți

Fibratul cotangent – schiță.

Fie $T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ mulțimea tuturor spațiilor cotangente pe M . Definim proiecția canonică

$$\tau : T^*(M) \rightarrow M, \quad \text{proiecția canonică}$$

aplicația care asociază unui covector punctul său de tangență.

Teorema 12.1 Fibratul cotangent se poate organiza ca o varietate diferențiabilă de dimensiune $2n$.

În continuare, teoria se dezvoltă prin dualitate cu fibratul tangent.

Forme diferențiale – schiță.

Definiția 12.4 O *formă diferențială* pe M sau o *1-formă* este o secțiune în fibratul cotangent, adică $\theta : M \rightarrow T^*(M)$ este o aplicație diferențiabilă astfel încât $\tau \circ \theta = \mathbf{1}_M$.

Mulțimea 1-formelor se notează cu $\Lambda^1(M)$ sau cu $\Omega^1(M)$.

Sciere locală. Într-o hartă locală definim 1-formele locale $dx^i : U \rightarrow T^*M$ prin $dx^i(p) = dx_p^i$. Astfel, o 1-formă θ se exprimă local astfel $\theta = \theta_i dx^i$, unde $\theta_i \in C^\infty(U)$.

Definiția 12.5 O *formă diferențială* (exterioară) de grad k pe M (sau o k -formă pe M) este o secțiune diferențiabilă în $A_k(T(M))$ adică $\omega : M \rightarrow A_k(T(M))$ astfel încât $\omega(p) \in A_k(T_p M)$ (spațiul tensorilor de grad k antisimetrice în p).

De fapt avem

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{de } k \text{ ori}} \rightarrow C^\infty(M), (X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)$$

total antisimetrică.

Proprietate. Fie $\omega \in \Lambda^k(M)$ (o k -formă) și $\sigma \in \mathcal{S}_k$ (permutare). Atunci

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) \omega(X_1, \dots, X_k).$$

De fapt, aceasta este și condiția ca un câmp tensorial covariant arbitrar să fie o k -formă.

CURS 25-05-2020

Calcul diferențial pe varietăți (cont.)

13.1 Fluxul unui câmp vectorial

Fie M^n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ și fie $\gamma : I \rightarrow M$ un drum C^∞ diferențiabil pe M . Am definit în cursurile precedente noțiunea de vector tangent într-un punct la o varietate cu ajutorul curbelor; prin urmare știm noțiunea de vector tangent la γ într-un punct al său $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$, unde $\hat{\gamma} = \varphi\gamma : I \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Fie X un câmp vectorial de clasă C^∞ pe M (de fapt $X \in \mathfrak{X}(U)$, unde U este domeniu de hartă locală).

Problemă. Dat X , să se găsească un drum $\gamma : I \rightarrow M$ astfel încât în fiecare punct al său valoarea vectorului tangent $\dot{\gamma}(t)$ să fie valoarea câmpului X în $\gamma(t)$, adică

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in I. \quad (13.1)$$

Exemplu:

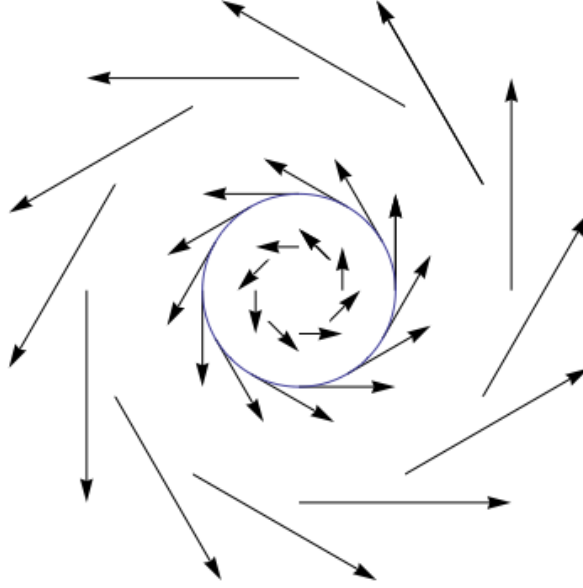


Figura 13.1: $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Definiția 13.1 Drumul γ se numește *curbă integrală* a câmpului vectorial X .

Să scriem problema în coordonate locale folosind harta locală $(U, \varphi, x^1, \dots, x^n)$.

Mai întâi avem: $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\gamma(t)}$, unde $\dot{x}^i(t) = \frac{dx^i}{dt}$.

Dacă $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ pe U (cu X^j funcții diferențiabile pe U) atunci

$$X(\gamma(t)) = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\gamma(t)}.$$

Ecuția (13.1) se scrie

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.2)$$

Se obține un sistem de ecuații diferențiale ordinare autonom.

În problema de mai sus considerăm și o condiție inițială, anume:

$$\gamma(0) = p_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

(i.e. la momentul $t = 0$ curba γ "trece" prin punctul p_0).

Dacă adăugăm la (13.2) și condiția inițială

$$(CI) \quad x^i(0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

atunci din teoria ecuațiilor diferențiale obținem că există (și este unică) o soluție locală care depinde neted de condițiile inițiale. Prin urmare, pe M există întotdeauna o curbă integrală locală.

Să dovedim acum unicitatea curbelor integrale ale lui X pe întreg domeniul lor de definiție.

Fie $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ și $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ două curbe integrale ale lui X astfel încât $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$. Atunci cele două curbe coincid pe $I_1 \cap I_2$.

Demonstrație. [Schiță] Mulțimea $I_1 \cap I_2$ este un interval, deci este conexă.

Fie $I^* = \{t : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Evident $0 \in I^*$, deci I^* este nevidă.

Cum γ_1 și γ_2 sunt diferențiabile, deci continue, iar M este separat Hausdorff, rezultă că I^* este o mulțime închisă.

Arătăm că I^* este și deschisă în $I_1 \cap I_2$ și în baza faptului că acesta din urmă este conex, va rezulta că $I^* = I_1 \cap I_2$.

Fie $t_0 \in I^*$; considerăm drumurile $d_{1,2} = \gamma_{1,2}(t_0 + t)$, pentru t situat într-un interval suficient de mic ce conține originea. Se arată ușor că $d_{1,2}$ sunt curbe integrale ale lui X cu condiția inițială $d_1(t_0) = d_2(t_0)$. În baza unicității soluției, ele coincid pe o vecinătate deschisă a lui t_0 . Deci I^* este deschisă în $I_1 \cap I_2$.

Fie $I(p_0)$ intervalul maximal, care conține originea, domeniu de definiție al curbei integrale a lui X cu condiția inițială $\gamma(0) = p_0$: $I(p_0) = (t^-(p_0), t^+(p_0))$ (limitele acestui interval pot fi și $-\infty$, respectiv $+\infty$).

Prin urmare, pentru fiecare $p \in M$ avem câte un astfel de interval deschis $I(p)$. Considerăm:

$$\mathcal{D}(X) = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t^-(p) < t < t^+(p)\} \subseteq \mathbb{R} \times M.$$

Definiția 13.2 Se numește *fluxul* câmpului vectorial X o aplicație

$$\Phi : \mathcal{D}(X) \longrightarrow M$$

astfel încât pentru orice $p \in M$ aplicația $\phi_p : I(p) \longrightarrow M$ dată prin $\phi_p(t) := \Phi(t, p)$ este o curbă integrală a lui X cu condiția inițială $\phi_p(0) = p$.

Exemplul 1. Fie $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ și $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

Atunci curba

$$\gamma_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \gamma_{(x_0, y_0)}(t) = (x_0 + t, y_0)$$

este curba integrală a lui X cu condiția inițială $\gamma_{(x_0, y_0)}(0) = (x_0, y_0)$. În acest caz $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$ pentru orice $(x_0, y_0) \in M$, prin urmare $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times M$. Fluxul lui X este

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \Phi(t, x, y) = (x + t, y).$$

Exemplul 2. Fie $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ și $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Atunci curba

$$\gamma_{(x_0, y_0)} : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \gamma_{(x_0, y_0)}(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, y_0 \cos t + x_0 \sin t)$$

este curba integrală a lui X cu condiția inițială $\gamma_{(x_0, y_0)}(0) = (x_0, y_0)$. Vezi figura de mai sus.

Și în acest caz $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$ pentru orice $(x_0, y_0) \in M$, prin urmare $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times M$. Fluxul lui X este

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \Phi(t, x, y) = (x \cos t - y \sin t, y \cos t + x \sin t).$$

Exemplul 3. (la seminar) Fie $M = \mathbb{R}^3(x, y, z)$ și $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine fluxul lui X .

Exemplul 4. Fie $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ și $X = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$.

Să determinăm curbele integrale ale lui X : Condiția pentru $\gamma : I \rightarrow M$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ să fie curbă integrală pentru X se scrie

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

Impunem acum condiția inițială $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Se obține

$$\gamma(t) = \left(x_0, \frac{y_0}{1 - y_0 t} \right).$$

Rezultă

$$I_{(x_0, y_0)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{y_0}, +\infty \right) & \text{pentru } y_0 \in (-\infty, 0) \\ \mathbb{R} & \text{pentru } y_0 = 0 \\ \left(-\infty, \frac{1}{y_0} \right) & \text{pentru } y_0 \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Avem că $\mathcal{D}(X) = \bigcup_{(x_0, y_0) \in M} I_{(x_0, y_0)} \times \{(x_0, y_0)\}$.

Definiția 13.3 Un câmp vectorial X pe M se numește *complet* dacă $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times M$. O varietate M se numește *completă* dacă orice câmp vectorial definit pe M este complet.

Observație. Orice câmp vectorial cu suport compact este complet și orice varietate compactă este completă.

În continuare vom folosi și notația $\phi_t(p) = \Phi(t, p)$, analogă notației $\phi_p(t)$, cu observația că atunci când fixăm un argument în Φ îl vom scrie ca indice.

Propoziția 13.1 (fără demonstrație) Fie $t, s \in \mathbb{R}$, $p \in M$ astfel încât expresiile $(\phi_s \circ \phi_t)(p)$, $(\phi_t \circ \phi_s)(p)$ și $\phi_{t+s}(p)$ să fie definite.

Atunci $(\phi_s \circ \phi_t)(p) = (\phi_t \circ \phi_s)(p) = \phi_{t+s}(p)$.

Mai mult, aplicația ϕ_t este un difeomorfism local.

Observație. Avem $\phi_0(p) = p$ și $\phi_t^{-1}(p) = \phi_{-t}(p)$.

Definiția 13.4 Familia de difeomorfisme $\{\phi_t\}_t$ se numește *grupul 1-parametric local* generat de câmpul vectorial X .

Propoziția 13.2 Reciproc, avem ca orice grup 1-parametric pe M , adică $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ aplicație diferențiabilă așa încât

- $\phi_t : M \rightarrow M$ este un difeomorfism;
- $\phi_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ este un drum diferentiabil a.i. $\phi_p(0) = p$;
- $\phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$

determină un câmp vectorial pe M .

Vom vedea în continuare cum se "transportă" fluxul de pe o varietate pe alta prin intermediul difeomorfismelor.

Fie $F : N^n \rightarrow M^m$ un difeomorfism. Fie $X \in \mathfrak{X}(N)$ în câmp vectorial și $\{\phi_t\}_t$ grupul 1-parametric local generat de acesta.

Întrebare. Ce grup 1-parametric local generează F_*X ?

Răspuns. $\{\Psi_t = F \circ \Phi_t \circ F^{-1}\}_t$.

Demonstrație. [Schită de demonstrație.] Din faptul că Φ este fluxul lui X avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) = X(\Phi(t, p)) \\ \Phi(0, p) = p, \quad \forall p \in N. \end{cases}$$

Fie $q \in M$ și fie $p = F^{-1}(q)$.

Avem imediat că $\Psi(0, q) = F(\Phi(0, F^{-1}(q))) = F(p) = q$.

Apoi calculăm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, q) &= \frac{\partial}{\partial t} F(\Phi(t, p)) = F_{*, \Phi(t, p)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) = F_{*, \phi_t(p)} X(\phi_t(p)) = \\ &= (F_*X)(F\phi_t(p)) = (F_*X)(F\Phi F^{-1}(t, q)). \end{aligned}$$

Propoziția 13.3 (Consecință) Un câmp vectorial este invariant prin grupul său 1-parametric.

Demonstrație. [Schită de demonstrație.]

Fie X un câmp vectorial complet și $\{\phi_t\}_t$ grupul său 1-parametric: $\phi_t : M \rightarrow M$ este un difeomorfism.

Avem $(\phi_t)_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{\phi_t(p)} M$

$$X(p) \mapsto \phi_{t,*} X(p) = X(\phi_t(p)) \quad (\text{de demonstrat}).$$

Consider $\{\phi_s\}_s$ grupul 1-parametric al lui X pe varietatea de plecare. Atunci grupul 1-parametric al lui $(\phi_t)_* X$ (pe varietatea de sosire) este $\phi_t \circ \phi_s \circ \phi_t^{-1}$ (conform cu rezultatul de mai sus).

$$\text{Calculăm: } \phi_t \circ \phi_s \circ \phi_t^{-1} = \phi_t \circ \phi_s \circ \phi_{-t} = \phi_{t+s-t} = \phi_s.$$

Acest grup 1-parametric determină un câmp vectorial pe M (varietatea de sosire) care este exact X .

Aplicații ale fluxului. **Derivata Lie:** pentru funcții diferențiabile, pentru câmpuri vectoriale, pentru 1-forme, etc.

Derivata Lie pentru . . .	Definiție	Formulă
funcții	$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* f - f) = \frac{d}{dt} (\phi_t^* f) _{t=0}$	$\mathcal{L}_X f = Xf$
câmpuri vectoriale	$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\phi_{-t,*} Y)(p) - Y(p) \right)$	$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$
1-forme	$(\mathcal{L}_X \theta)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\phi_t^* \theta)(p) - \theta(p) \right)$	$(\mathcal{L}_X \theta)(Y) = X\theta(Y) - \theta([X, Y])$
câmpuri tensoriale	. . .	. . .

Derivata Lie duce un câmp tensorial de tip (k, l) într-un câmp tensorial de tip (k, l) .