Seminar 31.03.2020

Ex 1. Fie Ω un punct în plan, δ o dreaptă şi $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\alpha \neq 0$ (un unghi orientat). În ce condiţii $R_{\Omega,\alpha}(\delta) = \delta$?

Soluţie: Fie $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ şi $\delta : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$.

Fie $P(at + x_0, bt + y_0) \in \delta$.

Scriem $P' = R_{\Omega,\alpha}(P)$: $\begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}$ şi deci

$$\begin{cases} x' = x_\Omega + \cos\alpha(x - x_\Omega) - \sin\alpha(y - y_\Omega) \\ y' = y_\Omega + \sin\alpha(x - x_\Omega) + \cos\alpha(y - y_\Omega) \end{cases}.$$

Punctul $P' \in \delta$, prin urmare,

$$\begin{aligned} & b\left[x_\Omega + \cos\alpha(x_0 - x_\Omega + at) - \sin\alpha(y_0 - y_\Omega + bt)\right] - bx_0 \\ & = a\left[y_\Omega + \sin\alpha(x_0 - x_\Omega + at) + \cos\alpha(y_0 - y_\Omega + bt)\right] - ay_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Relaţia de mai sus reprezintă un polinom de grad I (aparent) în t, identic nul. Prin urmare, coeficienţii sunt zero.

Astfel,

$t:\ \cancel{b\,a\cos\alpha} - b^2\sin\alpha = a^2\sin\alpha + \cancel{a\,b\cos\alpha} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\sin\alpha = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \pi$

Înlocuind în (1), se obţine

$b[x_\Omega - x_0 + x_\Omega] - bx_0 = a[y_\Omega - y_0 + y_\Omega] - ay_0 \Longrightarrow bx_\Omega - bx_0 = ay_\Omega - ay_0 \Longrightarrow \Omega \in \delta.$

Deci, condiţiile pentru ca $R_{\Omega,\alpha}(\delta) = \delta$ sunt $\alpha = \pi$ şi $\Omega \in \delta$.

Ex 2. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ a.î. $\bar{u} \neq \bar{v}$ şi fie δ o dreaptă în plan. Ce condiţie trebuie să fie îndeplinită astfel încât $t_{\bar{u}}(\delta) = t_{\bar{v}}(\delta)$?

Soluţie: Fie $\delta :\ \bar{r} = \bar{r}_A + t\bar{a}$, $t \in \mathbb{R}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ (ecuaţia vectorială).

Notăm $\delta_1 = t_{\bar{u}}(\delta)$ şi $\delta_2 = t_{\bar{v}}(\delta)$.

Avem următoarele ecuaţii vectoriale pentru cele două drepte:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &: \ \bar{r} = \bar{r}_{A_1} + \lambda \bar{a} \\
\delta_2 &: \ \bar{r} = \bar{r}_{A_2} + \mu \bar{a}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

unde $\bar{r}_{A_1} = \bar{r}_A + \bar{u}$ şi $\bar{r}_{A_2} = \bar{r}_A + \bar{v}$.

Pentru ca $\delta_1 = \delta_2$ trebuie ca $\bar{r}_{A_1} - \bar{r}_{A_2}$ să fie coliniar cu $\bar{a}$. Prin urmare, rezultă că $\bar{u} - \bar{v}$ şi $\bar{a}$ sunt proporţionali.

Ex 3. Să se studieze compunerea $S_{d_2} \circ S_{d_1}$, unde d_1 este axa Ox, iar d_2 este prima bisectoare.

Soluţie. Ecuaţiile celor două drepte sunt: $d_1 : \ y = 0$ şi $d_2 : \ y = x$.

Ecuaţiile simetriilor corespunzătoare se scriu: $S_{d_1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ şi $S_{d_2} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Calculăm

$$(S_{d_2} \circ S_{d_1})(x, y) = S_{d_2}(x, -y) = (-y, x).$$

Să studiem acum izometria obţinută: $f : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$, $f(x, y) = (-y, x)$.

Matricial putem scrie $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Evident $A \in O(2)$ şi $\det A = 1$, deci f este o deplasare.

Cum $A \neq I_2$ deducem că f este o rotaţie de unghi α pentru care $\cos \alpha = 0$ şi $\sin \alpha = 1$ (din forma matricii A). Rezultă că $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Pentru a găsi centrul rotaţiei, rezolvăm ecuaţia $f(x, y) = (x, y)$.

Deducem $\begin{cases} x = -y \\ y = x, \end{cases}$ de unde avem că $(x, y) = (0, 0)$.

Aşadar avem o rotaţie de centru O şi unghi $\dfrac{\pi}{2}$. Remarcăm că $\{O\} = d_1 \cap d_2$.

Ex 4. (a) Fie $\bar{u} = (1, 2)$ şi $d = Ox$.
Să se determine o izometrie $f : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ a.î. $f \circ S_d = t_u$.
(b) Acelaşi exerciţiu pentru $\bar{u} = (0, 2)$.

Soluţie.

a) Din relaţia dată obţinem imediat $f = t_{\bar{u}} \circ S_d^{-1}$. Ştim că S_d este involutivă, adică $S_d \circ S_d = \mathrm{Id}$, astfel că $S_d^{-1} = S_d$. Deci $f = t_{\bar{u}} \circ S_d$. Rezultă că

$f(x, y) = t_{\bar{u}}\left(S_d(x, y)\right) = t_{\bar{u}}(x, -y) = (x + 1, -y + 2)$.

Scriind matricial, obţinem că $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matricea A este ortogonală şi $\det A = -1$, deci f este o antideplasare.

Să verificăm dacă f are puncte fixe, adică să rezolvăm sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x = x + 1 \\ y = -y + 2. \end{cases}$

Evident, nu avem soluţie, deci f este o alunecare (simetrie alunecată). Dreapta d (faţă de care facem simetria) este unic determinată de mijloacele segmentelor de forma $[PP']$, unde $P' = f(P)$.

De exemplu,

pentru $A(0, 0)$, avem $A' = f(A) = (1, 2)$
pentru $B(1, 1)$, avem $B' = f(B) = (2, 1)$.

Mijloacele coresunzătoare sunt $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A' = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi $N = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B' = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Dreapta d are ecuaţia $y = 1$.

Vectorul $\bar{u}$ (de alunecare) este dat de $\overrightarrow{PP'}$, unde $P \in d$ şi $P' = f(P)$.

Evident $\bar{u}$ nu depinde de punctul ales P. Observăm că $B \in d$, deci $\bar{u} = \overrightarrow{BB'} = (1, 0)$.

b) Pentru celălalt vector $\bar{u} = (0, 2)$, izometria f se scrie $f(x, y) = (x, -y + 2)$. Din nou, f este o antideplasare, însă de data aceasta f are puncte fixe. Acestea sunt de forma $(x, 1)$, deci formează o dreaptă $d: \ y = 1$. Astfel, $f = S_d$.

Ex 5. Fie dreptele

$$d_1 : \ x + 2y - 1 = 0 \ \text{ şi } \ d_2 : \ x + 2y + 1 = 0.$$

Să se arate că $S_{d_2} \circ S_{d_1} = t_{\bar{u}}$, pentru un anumit vector $\bar{u}$ care să se determine.

Soluţie: Ecuaţiile simetriilor sunt următoarele:

$$S_{d_1} : \ \begin{cases} x' = \dfrac{3x - 4y + 2}{5} \\ y' = -\dfrac{4x + 3y - 4}{5} \end{cases} \qquad \text{şi} \quad S_{d_2} : \ \begin{cases} x' = \dfrac{3x - 4y - 2}{5} \\ y' = -\dfrac{4x + 3y + 4}{5} \end{cases}.$$

Calculăm

$$(S_{d_2} \circ S_{d_1})(x, y) = S_{d_2}(S_{d_1}(x, y)) = S_{d_2}\left(\frac{3x - 4y + 2}{5}, -\frac{4x + 3y - 4}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{-2 + \frac{3}{5}(3x - 4y + 2) + \frac{4}{5}(4x + 3y - 4)}{5}, \frac{-4 - \frac{4}{5}(3x - 4y + 2) + \frac{3}{5}(4x + 3y - 4)}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{25x - 20}{25}, \frac{25y - 40}{25}\right) = (x, y) - \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

Deci $\bar{u} = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$.

Se verifică imediat că $d_1 \| d_2$, $\bar{u} \perp \vec{d_1}$ şi $\|\bar{u}\| = 2d(d_1, d_2)$.

Ex 6. Fie $\bar{u} = (1, -2)$ şi dreapta $d : \ y = \dfrac{x}{2}$. Să se determine δ (dacă există), astfel încât $S_\delta \circ S_d = t_{\bar{u}}$.

Soluţie: Deoarece S_d este involutivă, $S_d \circ S_d = \text{Id}$, avem că $S_\delta = t_{\bar{u}} \circ S_d$.

Scriem mai întâi ecuaţiile simetriei S_d, astfel: $S_d : \begin{cases} x' = \dfrac{3x + 4y}{5} \\ y' = \dfrac{4x - 3y}{5} \end{cases}$.

Deci $S_\delta(x, y) = \left(\dfrac{3x + 4y + 5}{5}, \dfrac{4x - 3y - 10}{5}\right)$.

În scriere matricială, $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Deoarece $A \in O(2)$ şi $\det A = -1$, rezultă că izometria este o antideplasare.

Căutăm punctele fixe şi obţinem sistemul $\begin{cases} 3x + 4y + 5 = 5x \\ 4x - 3y - 10 = 5y \end{cases}$, care are soluţia

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x - 4y - 5 = 0\right\},$$

adică o dreaptă.

Aceasta este dreapta δ faţă de care se face simetria.

Ex 7. Fie dreptele $d_1 : \ x = -1$ şi $d_2 : \ y = \sqrt{3}\, x$. Să se arate că $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este o rotaţie $R_{\Omega,\alpha}$ şi să se determine Ω şi α. Ce se poate spune despre $S_{d_1} \circ S_{d_2}$?

Soluţie. Cele două simetrii se scriu astfel:

$$S_{d_1} : \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{şi} \quad S_{d_2} : \begin{cases} x' = \dfrac{-x + \sqrt{3}\, y}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}\, x + y}{2} \end{cases}.$$

Avem

$$(S_{d_2} \circ S_{d_1})(x, y) = S_{d_2}(-2 - x, y) = \left(\frac{x + \sqrt{3}\, y + 2}{2}, \frac{-\sqrt{3}\, x + y - 2\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$(S_{d_1} \circ S_{d_2})(x, y) = S_{d_1}\left(\frac{-x + \sqrt{3}\, y}{2}, \frac{\sqrt{3}\, x + y}{2}\right) = \left(\frac{-4 + x - \sqrt{3}\, y}{2}, \frac{\sqrt{3}\, x + y}{2}\right).$$

În scriere matricială, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, avem:

- pentru $S_{d_2} \circ S_{d_1}$: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

- pentru $S_{d_1} \circ S_{d_2}$: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

În ambele situaţii $A \in O(2)$, $\det A = +1$ şi $A \neq I_2$, deci avem rotaţii. Astfel:

- pentru $S_{d_2} \circ S_{d_1}$: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, iar $\Omega(-1, -\sqrt{3})$.
- pentru $S_{d_1} \circ S_{d_2}$: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\alpha = \frac{\pi}{3}$, iar $\Omega(-1, -\sqrt{3})$.

Să remarcăm că $\{\Omega\} = d_1 \cap d_2$, iar unghiul neorientat dintre d_1 şi d_2 este $\frac{\pi}{6}$.

Ex 8. Fie dreptele $d_1 :\ y = x$ şi $d_2 :\ x + y - 1 = 0$. Să se arate că $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este o rotaţie $R_{\Omega,\alpha}$ şi să se determine Ω şi α. Ce se poate spune despre $S_{d_1} \circ S_{d_2}$?

Soluţie. Ecuaţiile celor două simetrii sunt:

$$S_{d_1} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{şi} \quad S_{d_2} : \begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = 1 - x \end{cases} .$$

Prin urmare,

$$(S_{d_2} \circ S_{d_1})(x, y) = S_{d_2}(S_{d_1}(x, y)) = S_{d_2}(y, x) = (1 - x, 1 - y). \tag{2}$$

Matricial, această izometrie se scrie $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se verifică: $A \in O(2)$ şi $\det A = 1$. Aşadar $S_{d_2} \circ S_{d_1}$ este o rotaţie de unghi $\alpha = \pi$, deoarece $\cos\alpha = -1$ şi $\sin\alpha = 0$ (din forma matricii A).

Centrul rotaţiei este dat de punctul fix al izometriei, adică de soluţia sistemului $\begin{cases} 1 - x = x \\ 1 - y = y \end{cases}$.

Rezultă $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Se observă că $\{\Omega\} = d_1 \cap d_2$ şi $\pi = 2\sphericalangle(d_1, d_2)$.

Cealaltă compunere se scrie

$$(S_{d_1} \circ S_{d_2})(x, y) = S_{d_1}(S_{d_2}(x, y)) = S_{d_1}(1 - y, 1 - x) = (1 - x, 1 - y). \tag{3}$$

Prin urmare, din (2) şi (3) rezultă că cele două simetrii comută.

Ex 9. Fie dreapta $d:\ 2x-y-3=0$ şi $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Să se determine o dreaptă δ astfel încât $S_\delta\circ S_d=R_{\Omega,\alpha}$, unde $\Omega(1,-1)$.

Soluţie. Deoarece simetria ortogonală faţă de o dreaptă este involutivă, rezultă că $S_d^{-1}=S_d$. Aşadar, trebuie să avem $S_\delta=R_{\Omega,\alpha}\circ S_d$.

Scriem ecuaţiile izometriilor S_d şi $R_{\Omega,\alpha}$, respectiv:

$$S_d:\ \begin{cases} x'=\dfrac{-3x+4y+12}{5}\\ y'=\dfrac{4x+3y-6}{5}\end{cases},\qquad R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}:\ \begin{cases} x'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}+1-\sqrt{2}\\ y'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-1\end{cases}.$$

În urma compunerii $R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}\circ S_d$ se obţine izometria f dată de ecuaţiile:

$$f:\ \begin{cases} x'=\dfrac{-7x+y}{5\sqrt{2}}+1+\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\\ y'=\dfrac{x+7y}{5\sqrt{2}}-1+\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\end{cases}.$$

În notaţiile uzuale din scrierea matricială a lui f avem:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ \text{şi}\ B=\begin{pmatrix} 1+\frac{4\sqrt{2}}{5}\\ -1+\frac{3\sqrt{2}}{5}\end{pmatrix}.$$

Matricea A este ortogonală şi $\det A=-1$, deci avem o antideplasare. Căutând punctele fixe, obţinem simetria S_δ, unde $\delta:\ (5\sqrt{2}+7)x-y-5\sqrt{2}-8=0$.

Ex 10. Fie izometriile $f_1,f_2:\mathcal{E}^2\to\mathcal{E}^2$, date prin:

$$f_1(x,y)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2},\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$f_2(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1,\ \ -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2-\sqrt{3}\right).$$

(a) Să se studieze tipul acestor izometrii.

(b) Să se arate că $f_1\circ f_2$ şi $f_2\circ f_1$ reprezintă rotaţii în plan, cărora să se stabilească elementele.

Soluţie:

(a) Se arată că $f_1 = R_{\Omega_1, \frac{\pi}{3}}$ şi $f_2 = R_{\Omega_2, -\frac{\pi}{6}}$, unde $\Omega_1(-1, 0)$ şi $\Omega_2(0, 2)$.

(b) Rezultă $(f_2 \circ f_1)(x, y) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - 1,\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 3 - \sqrt{3} \right)$.

În scriere matricială, avem: $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$, notaţiile fiind cele uzuale. Se verifică imediat că $A \in O(2)$ şi $\det A = 1$. Întrucât $A \neq I_2$, rezultă că $f_2 \circ f_1$ este o rotaţie de unghi α, unde $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, adică $\alpha = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (suma unghiurilor celor două rotaţii, care este diferită de $0 \mod 2\pi$). Centrul acestei rotaţii este punctul fix, adică $\Omega\left(-2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \right)$.

Lăsăm spre studiu cititorului cea de-a doua izometrie, adică $f_1 \circ f_2$.

Propunem spre rezolvare următoarea problemă.

Fie δ dreapta determinată de Ω_1 și Ω_2. Descompunem cele două izometrii astfel: $f_1 = S_\delta \circ S_{d_1}$ și $f_2 = S_{d_2} \circ S_\delta$, unde d_1 și d_2 sunt două drepte ce vor fi determinate (vezi exercițiile precedente). Să se verifice că $d_1 \cap d_2 = \{\Omega\}$.

Ex 11. Fie izometria $f : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$, dată prin $f(x, y) = (3 - y, 1 + x)$.

(a) Să se arate că f este o rotaţie.

(b) Să se arate că $f^2 = f \circ f$ este o rotaţie.

Soluţie:

(a) Se verifică faptul că $f = R_{\Omega,\alpha}$, unde $\Omega(1, 2)$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calculăm $f^2(x, y) = (2 - x, 4 - y)$, care este o rotaţie de acelaşi centru $\Omega(1, 2)$ şi unghi 2α.

Ex 12. Fie izometriile $f_1, f_2 : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ date prin ecuaţiile:

$$f_1(x,y) = (3-y,\ 1+x),$$
$$f_2(x,y) = (4+y,\ 2-x).$$

(a) Să se determine tipul acestor izometrii.

(b) Să se arate că $f_2 \circ f_1$ şi $f_1 \circ f_2$ sunt translaţii.

Soluţie: Scriind matricial (în notaţiile obişnuite) avem:

- pentru f_1: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- pentru f_2: $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Deci $f_1 = R_{\Omega_1, \frac{\pi}{2}}$ şi $f_2 = R_{\Omega_2, -\frac{\pi}{2}}$, unde $\Omega_1(1,2)$ şi $\Omega_2(3,-1)$.

Cele două compuneri se scriu

$(f_2 \circ f_1)(x,y) = (x+5, y-1)$, deci $f_2 \circ f_1 = t_{\bar{u}}$, unde $\bar{u} = (5,-1)$,

$(f_1 \circ f_2)(x,y) = (1+x, 5+y)$, deci $f_1 \circ f_2 = t_{\bar{v}}$, unde $\bar{v} = (1,5)$.

Ex 13. În $\mathcal{E}^3$: Se consideră dreapta

$$\delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

(i) Să se scrie ecuaţiile simetriei ortogonale S_δ faţă de dreapta δ.

(ii) Să se verifice că $S_\delta \circ S_\delta = Id$ (aplicaţie involutivă).

(iii) Să se determine $S_\delta(d)$, unde

$$d : \ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}.$$

(iv) Să se determine $S_\delta(\pi)$, unde $\pi:\ x - y + z - 1 = 0$.

Soluţie:

(i) Fie $P(x_P, y_P, z_P)$ un punct arbitrar din $\mathcal{E}^3$. Prin P ducem planul π normal la δ, intersecţia dintre plan şi dreaptă fiind proiecţia P_0 a lui P pe δ. Planul π are direcţia normală $(2, 1, -1)$ şi prin urmare, ecuaţia sa este:

$$\pi:\ 2(x - x_P) + (y - y_P) - (z - z_P) = 0.$$

Pentru a afla P_0, scriem ecuaţiile parametrice ale dreptei δ: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1. \end{cases}$

Înlocuind, obţinem $2(2t + 1 - x_P) + (t + 1 - y_P) + (t + 1 + z_P) = 0$.

Rezultă $t = \dfrac{2x_P + y_P - z_P - 4}{6}$.

Deci P_0 are coordonatele $\begin{cases} x_0 = \dfrac{2x_P + y_P - z_P - 1}{3} \\ y_0 = \dfrac{2x_P + y_P - z_P + 2}{6} \\ z_0 = \dfrac{-2x_P - y_P + z_P - 2}{6}. \end{cases}$

Dacă P' este simetricul căutat, avem $P' = 2P_0 - P$.

Deducem ecuaţiile simetriei S_δ : $\begin{cases} x' = \dfrac{x + 2y - 2z - 2}{3} \\ y' = \dfrac{2x - 2y - z + 2}{3} \\ z' = -\dfrac{2x + y + 2z + 2}{3}. \end{cases}$

(ii) Se arată, prin calcul direct, că $S_\delta\left(S_\delta(x, y, z)\right) = (x, y, z)$.

(iii) Scriem d în formă parametrică $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -2t \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

Înlocuind în ecuaţiile simetriei S_δ obţinem $\begin{cases} x' = \dfrac{7t-4}{3} \\ y' = \dfrac{2t+4}{3} \\ z' = \dfrac{t-1}{3} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Eliminând t, obţinem ecuaţiile canonice ale dreptei simetrice

$$S_\delta(d) : \frac{x' + \frac{4}{3}}{7} = \frac{y' - \frac{4}{3}}{2} = \frac{z' + \frac{1}{3}}{1}.$$

(iv) Fie $P \in \pi$ şi $P' = S_\delta(P)$. Evident, $P = S_\delta(P')$.

Rezultă că:

$$\frac{x' + 2y' - 2z' - 2}{3} - \frac{2x' - 2y' - z' + 2}{3} - \frac{2x' + y' + 2z' + 2}{3} - 1 = 0.$$

Obţinem ecuaţia planului $\pi' := S_\delta(\pi) : \ x' - y' + z' + 3 = 0$.

Observaţie: Remarcăm că dreapta δ este paralelă cu planul π, prin urmare e firesc ca $\pi' \| \pi$.

Ex 14. În $\mathcal{E}^3$: Se consideră planul $\pi : \ 2x + y - 2z + 5 = 0$.

(i) Să se scrie ecuaţiile simetriei ortogonale S_π faţă de planul π.

(ii) Să se verifice că $S_\pi \circ S_\pi = Id$.

(iii) Să se determine $S_\pi(\delta)$ şi $S_\pi(\alpha)$, unde $\delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ şi $\alpha : x + y + z = 0$.

(iv) Să se arate că $S_\pi(d) = d$, unde $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Justificare.

Soluţie:

(i) Fie $P(x_P, y_P, z_P)$ un punct arbitrar în $\mathcal{E}^3$.

Prin P ducem dreapta d_0 normală la planul π:

$$d_0 : \ \frac{x - x_P}{2} = \frac{y - y_P}{1} = \frac{z - z_P}{-2}.$$

Intersecţia dintre π şi d_0 este proiecţia P_0 a lui P pe π. Să obţinem coordonatele lui P_0.

Astfel, $d_0 : \begin{cases} x = 2t + x_P \\ y = t + y_P \\ z = -2t + z_P, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

şi $2(2t + x_P) + (t + y_P) - 2(-2t + z_P) + 5 = 0$.

Rezultă $t = -\dfrac{2x_P + y_P - 2z_P + 5}{9}$, de unde obţinem coordonatele căutate:

$$P_0 : \begin{cases} x_0 = \dfrac{5x_P - 2y_P + 4z_P - 10}{9} \\ y_0 = \dfrac{-2x_P + 8y_P + 2z_P - 5}{9} \\ z_0 = \dfrac{4x_P + 2y_P + 5z_P + 10}{9}. \end{cases}$$

Deoarece $S_\pi(P) \overset{\text{not}}{=} P' = 2P_0 - P$, obţinem ecuaţiile simetriei:

$$S_\pi : \begin{cases} x' = \dfrac{x - 4y + 8z - 20}{9} \\ y' = \dfrac{-4x + 7y + 4z - 10}{9} \\ z' = \dfrac{8x + 4y + z + 20}{9}. \end{cases}$$

(ii) Se verifică, prin calcul direct, că $S_\pi\left(S_\pi(x, y, z)\right) = (x, y, z)$.

(iii) Scriem ecuaţiile parametrice ale dreptei $\delta : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$

şi înlocuim în ecuaţiile simetriei.

Obţinem $\begin{cases} x' = \dfrac{-7t-16}{9} \\ y' = \dfrac{-t-6}{9} \\ z' = \dfrac{11t+21}{9} \end{cases}$, de unde putem scrie ecuaţiile canonice:

$$S_\pi(\delta): \ \frac{x'+\frac{16}{9}}{-7} = \frac{y'+\frac{2}{3}}{-1} = \frac{z'-\frac{7}{3}}{11}.$$

Deoarece S_π este involutivă, obţinem imediat ecuaţia planului

$$S_\pi(\alpha): \ 5x' + 7y' + 13z' - 10 = 0.$$

(iv) Analog ca la (iii), avem ecuaţiile parametrice ale dreptei $d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-1 \\ z = -2t, \end{cases}$ pe care, dacă le înlocuim în ecuaţiile simetriei, obţinem $\begin{cases} x' = \dfrac{-6t-5}{3} \\ y' = \dfrac{-3t-7}{3} \\ z' = \dfrac{6t+8}{3}, \end{cases}$ Aşadar,

$$S_\pi(d): \ \frac{x'+\frac{5}{3}}{-2} = \frac{y'+\frac{7}{3}}{-1} = \frac{z'-\frac{8}{3}}{2}.$$

Se observă că d şi $S_\pi(d)$ au aceeaşi direcţie, iar $A(1,-1,0)$ aparţine ambelor drepte, prin urmare coincid.

Observăm că dreapta d este perpendiculară pe planul π.

Ex 15. Să se scrie ecuaţiile mişcării elicoidale (rototranslaţie) $R_{Oy,\frac{\pi}{3}} \circ t_{\bar{u}}$, unde $\bar{u} = 2\bar{j}$.

Ex 16. În $\mathcal{E}^3$ se consideră dreapta orientată $\delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Să se descrie rotaţia $R_{\delta,\theta}$ în jurul dreptei δ de unghi $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Soluţie: Vectorul $\bar{a} = (2, 1, -1)$ dă orientarea dreptei δ. Considerăm planul π, printr-un punct $P(x_P, y_P, z_P)$ normal dreptei δ:

$$\pi: \ 2(x - x_P) + (y - y_P) - (z - z_P) = 0.$$

Dorim să aflăm coordonatele proiecţiei $P_0 := \mathrm{Pr}_\delta(P)$; facem deci intersecţia dintre δ şi π.

Punctul P_0 are coordonatele $\begin{cases} x_0 = 2t_0 + 1 \\ y_0 = t_0 - 1 \\ z_0 = -t_0 \end{cases}$, $\quad t_0 \in \mathbb{R}$.

Înlocuind în ecuaţia planului, se obţine $t_0 = \dfrac{2x_P + y_P - z_P - 1}{6}$. În planul π (care urmează a fi orientat) vom face rotaţia de unghi $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Orientarea: În $\overrightarrow{\pi}$ trebuie să găsim o bază ortonormată $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ a.î. $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ să aibă acelaşi sens cu $\bar{a}$.

Fie $\bar{u} \in \overrightarrow{\pi}$, $\bar{u} = (a, b, c)$, $\bar{u} \perp \bar{a}$, deci $2a + b - c = 0$.

Considerăm, de exemplu, vectorul $\bar{u}_1 := \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Rezultă că $\bar{u}_2 := \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} \times \bar{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Evident $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \bar{a}$.

Dacă exprimăm vectorul

$$\overrightarrow{P_0P} = \left(\frac{x_P - y_P + z_P - 2}{3}, \frac{-2x_P + 5y_P + z_P + 7}{6}, \frac{2x_P + y_P + 5z_P - 1}{6}\right)$$

în baza $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ obţinem $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2$, unde

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_P + z_P + 1) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x_P - y_P + z_P - 2). \end{cases}$$

Deci, scrierea matricială a lui $\overrightarrow{P_0P}$ în baza $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ este $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

În urma rotaţiei, coordonatele punctului P' se găsesc astfel: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

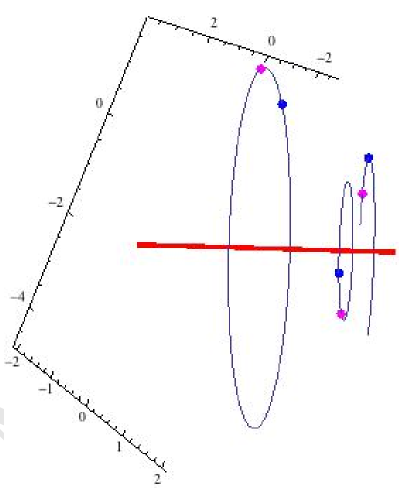
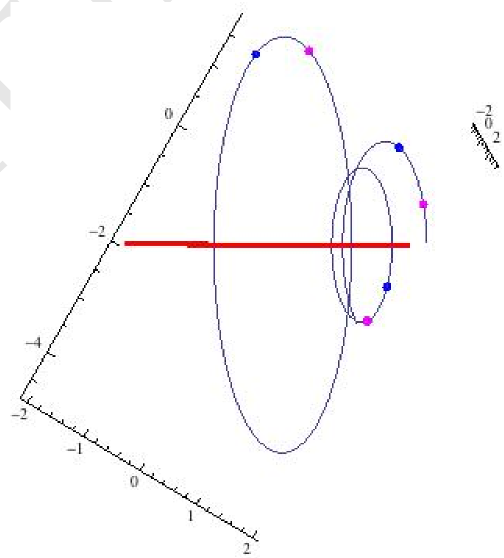
Astfel,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\bar{u}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\bar{u}_2\\ &=(\lambda_1-\lambda_2)\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).\end{aligned}$$

Obţinem

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{6}\left[(4-2\sqrt{2}+\sqrt{3})+(4+\sqrt{2})x_P+(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})y_P+(-2+\sqrt{2}+\sqrt{3})z_P\right]\\ y' &= \frac{1}{12}\left[(-14+7\sqrt{2}+2\sqrt{3})+2(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})x_P+(2+5\sqrt{2})y_P+(-2+\sqrt{2}-4\sqrt{3})z_P\right]\\ z' &= \frac{1}{12}\left[(2-\sqrt{2}+6\sqrt{3})+2(-2+\sqrt{2}-\sqrt{3})x_P+(-2+\sqrt{2}+4\sqrt{3})y_P+(2+5\sqrt{2})z_P\right].\end{aligned}$$

Să vizualizăm această rotaţie:

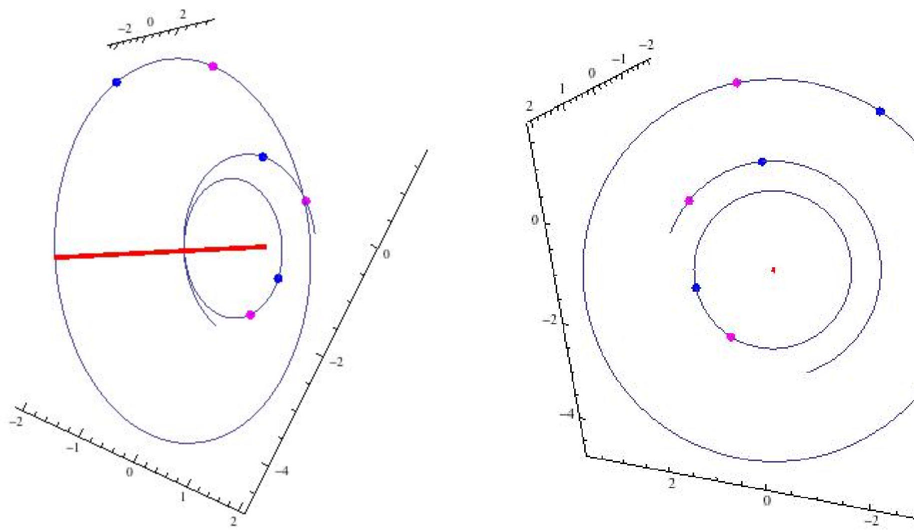


Figura 1: Rotaţia a trei puncte în jurul unei drepte; cele albastre sunt duse în cele magenta (vizualizări din unghiuri diferite)

Ex 17. În $\mathcal{E}^3$ se consideră punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$, $z_0 \neq 1$, a. î. $\|\overrightarrow{OP_0}\| = 1$. Să se scrie ecuaţiile rotaţiei de unghi α în jurul unei drepte ce trece prin origine şi are orientarea dată de vectorul $\bar{k} \times \overrightarrow{OP_0}$.

Caz particular: $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a.î. $\cos\alpha = z_0$.

Obsevaţie: În această situaţie particulară, rotaţia duce axa Oz^+ in semidreapta $[OP_0$.

Soluţie: Dreapta în jurul căreia se face rotaţia are ecuaţia $\bar{r} = O + t\bar{a}$, unde $O(0,0,0)$ este orginea reperului cartezian, iar $\bar{a} = \bar{k} \times \overrightarrow{OP_0}$ este unitar.

Dacă P este un punct arbitrar în $\mathcal{E}^3$ şi $P' = R_{\delta,\alpha}(P)$, atunci avem ecuaţia vectorială a lui P':

$$\bar{r}_{P'} = \bar{r}_O + \frac{\langle \overrightarrow{OP}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2}(1 - \cos\alpha)\bar{a} + \cos\alpha\, \overrightarrow{OP} + \frac{\sin\alpha}{\|\bar{a}\|}\bar{a} \times \overrightarrow{OP}.$$

Avem: $\bar{r}_O = (0,0,0)$, $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P)$, $\bar{a} = (-y_0, x_0, 0)$, $\|\bar{a}\|^2 = x_0^2 + y_0^2$,

$$\langle \overrightarrow{OP}, \bar{a} \rangle = -x_P y_0 + y_P x_0,\ \bar{a} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} -y_0 & x_P & \bar{i} \\ x_0 & y_P & \bar{j} \\ 0 & z_P & \bar{k} \end{vmatrix} = (x_0 z_P, y_0 z_P, -y_0 y_P - x_0 x_P).$$

Rezultă coordonatele lui P':

$$\begin{cases} x' = (1-\cos\alpha)(y_0^2 x_P - x_0 y_0 y_P) + \cos\alpha\ x_P + \sin\alpha\ x_0 z_P \\ y' = (1-\cos\alpha)(x_0^2 y_P - x_0 y_0 y_P) + \cos\alpha\ y_P + \sin\alpha\ y_0 z_P \\ z' = \cos\alpha\ z_P - \sin\alpha\ (x_0 x_P + y_0 y_P). \end{cases}$$

În cazul particular avem $\sin\alpha = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ şi $\cos\alpha = z_0$. Astfel, P' are coordonatele:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{y_0}{1+z_0}(y_0 x_P - x_0 y_P) + z_0 x_P + x_0 z_P \\ y' = \dfrac{x_0}{1+z_0}(x_0 y_P - y_0 x_P) + z_0 y_P + y_0 z_P \\ z' = z_0 z_P - (x_0 x_P + y_0 y_P). \end{cases}$$

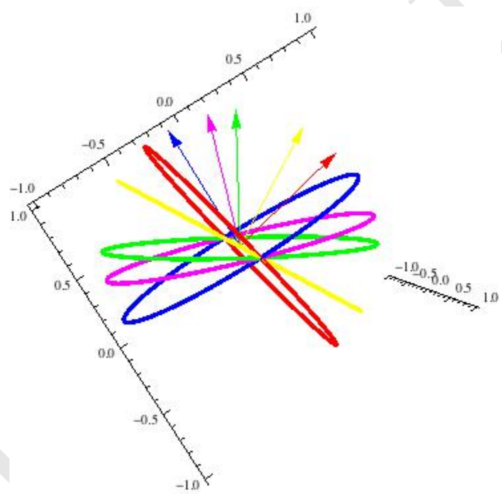


Figura 2: Rotaţia unei figuri (un cerc) în jurul unei drepte; diferite unghiuri de rotaţie

Ex 18. Fie dreapta δ orientată care trece prin $A(1,1,1)$ şi are direcţia (pozitivă) dată de $\bar{a} = (1,0,1)$.

(i) Să se scrie rotaţia $R_{\delta,\alpha}$ în jurul dreptei δ de unghi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

(ii) Să se calculeze $R_{\delta,\alpha}(d)$ unde $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ şi $d: \ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.