

Exercițiul 1 În spațiul euclidian 3-dimensional se consideră punctul $A(1, 1, 0)$ și planul $\pi : x + 4y + z + 6 = 0$.

1. Să se scrie ecuația generală a sferei care trece prin A are centrul pe Oz și este tangentă planului π .
2. Scrieți ecuația generală a planului tangent și ecuația normalei la sfera $S' : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$ în A .
3. Să se demonstreze că intersecția dintre sferă S' și planul paralel cu π care trece prin $M(0, 2, 1)$ este un cerc pentru care să se identifice centrul și raza acestuia.

Soluție:

1. Deoarece $\Omega \in Oz \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(0, 0, t)$. Vom identifica valoarea parametrului ținând cont de faptul că sfera trece prin A și este tangentă planului π :

$$d(\Omega, A) = d(\Omega, \pi)$$

Vom scrie cele două distanțe:

$$\begin{cases} d(\Omega, A) = \sqrt{2 + t^2} \\ d(\Omega\pi) = \frac{|t + 6|}{\sqrt{18}} \end{cases} \rightarrow 18(2 + t^2) = t^2 + 12t + 36 \rightarrow 17t^2 - 12t = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{12}{17} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Omega_1(0, 0, 0), \\ \Omega_2\left(0, 0, \frac{12}{17}\right) \end{cases}$$

Razele asociate sunt:

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{2} \\ R_2 = \sqrt{2 + \frac{144}{289}} = \frac{\sqrt{722}}{17}. \end{cases}$$

Sferele obținute sunt:

$$\begin{cases} S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ S_2 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{12}{17}\right)^2 = \frac{722}{289} \end{cases}$$

2. Ecuația planului tangent în A :

$$\pi_A : (x_A - 2)(x - 2) + (y_A - 2)(y - 2) + (z_A - 1)(z - 1) = 3$$

$$\pi_A : (1 - 2)(x - 2) + (1 - 2)(y - 2) + (0 - 1)(z - 1) = 3$$

$$\pi_A : x + y + z - 2 = 0$$

Ecuația normalei la sferă în A

$$N_A : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}.$$

3. Vom studia intersecția sferei cu planul $\pi' : x + 4y + z - 9 = 0$. Se observă că

$$d(\Omega, \pi') = \frac{|2 + 8 + 1 - 9|}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < \sqrt{3} \rightarrow \pi' \cap S = \text{cerc}.$$

Pentru a identifica centrul cercului obținut trebuie să determinăm proiecția centrului sferei pe planul π' . Fie $\{\Omega'\} =$

$$\pi' \cap d', \quad d' \perp \pi', \quad \Omega \in d' : \begin{cases} x + 4y + z - 9 = 0 \\ x = t + 2 \\ y = 4t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \rightarrow t + 2 + 16t + 8 + t + 1 - 9 = 0 \rightarrow 18t = -2 \rightarrow t = -\frac{1}{9} \rightarrow$$

$$\Omega' \left(\frac{17}{9}, \frac{14}{9}, \frac{8}{9} \right).$$

Raza cercului este

$$r = \sqrt{3 - \frac{2}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Exercițiul 2 În spațiul euclidian 3-dimensional se consideră punctul $A(1, 2, 3)$ și dreapta $d : \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

1. Scrieți ecuația generală a sferei de rază $\sqrt{11}$ care trece prin A și care are centrul situat pe dreapta Oy .
2. Determinați punctele de intersecție dintre dreapta d și sfera $S' : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$.
3. Să se determine un plan care conține dreapta d a cărui intersecție cu sfera S' este un cerc de rază $r = \sqrt{\frac{11}{2}}$.

Soluție:

1. Deoarece centrul $\Omega \in Oy \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(0, t, 0)$. Rezultă

$$d(\Omega, A) = \sqrt{11} \rightarrow 1^2 + (t - 2)^2 + 3^2 = 11 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

Obținem:

$$\Delta = 4 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Omega_1(0, 1, 0) \\ \Omega_2(0, 3, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 11 \\ S_2 : x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 11 \end{cases}$$

2. Se obține:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 12 \\ x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \rightarrow t^2 + (t + 1)^2 + (t + 1)^2 = 6 \rightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \rightarrow \Delta = 64 \quad (1)$$

Deci:

$$\begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1(-2, -1, 0) \\ A_2\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \end{cases}$$

3. Fie $\pi : ax + by + cz + d = 0$ planul pe care îl căutăm. Deoarece $d \subset \pi \rightarrow A_1, A_2 \in \pi$. Obținem:

$$\begin{cases} -2a - b + d = 0 \\ 2a + 5b + 8c + 3d = 0 \end{cases}$$

Fie $c = \alpha$, $d = \beta$.

$$\begin{cases} -2a - b = -\beta \\ -2a + 5b = -8\alpha - 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = -2\alpha - \beta \end{cases}$$

Raza cercului căutat este $r = \sqrt{\frac{11}{2}} \rightarrow d(\Omega, \pi') = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Ecuația generală pentru planul căutat este:

$$\pi' : (\alpha + \beta)x - (2\alpha + \beta)y + \alpha z + \beta = 0$$

Observăm

$$d(\Omega, \pi') = \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + (2\alpha + \beta)^2 + \alpha^2}} = \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{6\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow 2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = 6\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta \rightarrow 4\alpha^2 + 2\alpha\beta = 0$$

Avem de rezolvat următoarea ecuație de gradul II.

$$2\alpha^2 + \alpha\beta = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -\frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Se obțin două plane care satisfac condițiile cerute și anume:

$$\begin{cases} \pi'_1 : \beta x - \beta y + \beta = 0 \\ \pi'_2 : \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta}{2}z + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi'_1 : x - y + 1 = 0 \\ \pi'_2 : x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercițiul 3 În spațiul euclidian 3-dimensional se consideră sfera S cu centrul Ω pe Ox care este tangentă planului $\pi : x + y - 2 = 0$.

1. Să se scrie ecuația generală a sferei S știind că distanța de la centrul sferei la originea $O(0,0,0)$ este de 3 unități.
2. Să se scrie ecuația normalei la sfera $S' : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ în punctele de intersecție dintre axa Oz și sfera S' .
3. Să se studieze intersecția dintre sfera S' și planul $\pi' : x + y + z = 0$. Determinați toate elementele necesare pentru descrierea completă a intersecției.

Soluție:

1. Deoarece $\Omega \in Ox \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, 0, 0)$. Avem $d(\Omega, O) = 3 \rightarrow |t| = 3 \rightarrow t = \pm 3$.
Se obțin două centre:

$$\begin{cases} \Omega_1(3, 0, 0) \\ \Omega_2(-3, 0, 0) \end{cases}$$

Știm că sfera este tangentă planului prin urmare distanța de la centrul sferei la plan va fi lungimea razei sferei:

$$\begin{cases} R_1 = d(\Omega_1, \pi) = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ R_2 = d(\Omega_2, \pi) = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{cases} S_1 : (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2} \\ S_2 : (x + 3)^2 + y^2 + z^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$$

2.

$$S' \cap Oz : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \rightarrow (t - 3)^2 = 9 \rightarrow |t - 3| = 3 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1(0, 0, 0) \\ T_2(0, 0, 6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z - 3}{-3} \\ N_2 : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z - 3}{-3} \end{cases}$$

Prin urmare, în ambele situații, normala este axa Oz .

3. Observăm că centrul sferei S' este $\Omega'(0, 0, 3)$.

Verificăm dacă intersecția dintre sferă și plan este un cerc.

Pentru aceasta:

$$d(\Omega', \pi') = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \leq 3 \rightarrow S' \cap \pi' = \text{un cerc cu centrul în planul } \pi'.$$

Determinăm centrul cercului

$$\Omega'' = pr_{\pi'} \Omega' = \pi' \cap d', \quad d' \perp \pi', \quad \Omega' \in d' \rightarrow d' \cap \pi' : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = t + 3 \end{cases} \rightarrow t = -1 \rightarrow \Omega'' = (-1 - 1, 2).$$

Mai avem de determinat raza cercului:

$$r = \sqrt{R'^2 - d^2(\Omega', \pi')} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$

Exercițiul 4 În spațiul euclidian 3-dimensional se consideră punctul $A(2, 1, 1)$ și dreapta $d : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

1. Să se scrie ecuația genenerală a sferei cu centrul pe Ox care trece prin A și este tangentă dreptei d .
2. Să se scrie ecuația normalei în A la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
3. Să se studieze intersecția sferei S cu planul paralel cu xOy care trece prin punctul $B(0, 0, 1)$. Determinați toate elementele necesare pentru descrierea completă a intersecției.

Soluție:

1. Deoarece $\Omega \in Ox \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Omega(t, 0, 0)$. Mai mult deoarece sfera este tangentă dreptei obținem

$$d(\Omega, A) = d(\Omega, d).$$

Să calculăm cele două distanțe:

$$\begin{cases} d(\Omega, d) = \frac{||\vec{\Omega O} \times \vec{a}||}{||\vec{a}||}, & O(0, 0, 0) \in d, \vec{a} \in \vec{d}, \vec{a} = (1, 1, 1), \\ d(\Omega, A) = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2} \end{cases}$$

$$\vec{\Omega O} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -t, t)$$

Deci

$$\begin{cases} d(\Omega, d) = \frac{\sqrt{2t^2}}{\sqrt{3}} \\ d(\Omega, A) = \sqrt{(t-2)^2 + 2} \end{cases} \rightarrow \frac{2t^2}{3} = t^2 - 4t + 6 \rightarrow 2t^2 = 3t^2 - 12t + 18 \rightarrow t^2 - 12t + 18 = 0$$

$$\text{Obținem } \Delta = 72 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 - 3\sqrt{2} \\ t_2 = 6 + 3\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Omega_1(6 - 3\sqrt{2}, 0, 0) \\ \Omega_2(6 + 3\sqrt{2}, 0, 0) \end{cases} \quad \text{Deci razele sunt}$$

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{36 - 24\sqrt{2}} \\ R_2 = \sqrt{36 + 24\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 : (x - 6 + 3\sqrt{2})^2 + y^2 + z^2 = 36 - 24\sqrt{2} \\ S_2 : (x - 6 - 3\sqrt{2})^2 + y^2 + z^2 = 36 + 24\sqrt{2} \end{cases}$$

2. Observăm că $\Omega(0, 0, 0)$ este centrul sferei S , deci:

$$N_A = OA : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

3. Ecuația planului căutat este $\pi : z - 1 = 0$. Observăm că

$$d(\Omega, \pi) = 1 < 3 \rightarrow S \cap \pi = \text{cerc cu centrul în } \pi.$$

Determinăm centrul cercului:

$$\Omega' = pr_\pi \Omega = \pi \cap \delta, \delta \perp \pi, \Omega \in \delta \rightarrow \pi \cap \delta : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \rightarrow t = 1 \rightarrow \Omega'(0, 0, 1).$$

Mai avem de identificat raza cercului:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \pi)} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

Exercițiul 5 1. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctele $M(1, 2, -1)$ și $N(2, 1, 1)$ cu proprietatea că intersectează sfera $S : (x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 36$ după un cerc de rază 5.

2. Să se scrie ecuația unui plan tangent la S care trece prin $P(5, 10, 2)$.

Soluție:

1. Fie π planul pe care îl căutăm. Ecuația generală acestuia este:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Știm că punctele M și N sunt conținute în π prin urmare:

$$\begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ 2a + b + c + d = 0 \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem omogen cu două ecuații și patru necunoscute. Prin urmare este un sistem compatibil dublu nedeterminat pentru care considerăm:

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} a + 2b = \alpha - \beta \\ 2a + b = -\alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \frac{-\alpha + \beta}{2} \\ d = -\frac{3(\alpha + \beta)}{2} \end{cases}$$

Ecuația planului devine:

$$\pi : 2\alpha x + 2\beta y + (-\alpha + \beta)z - 3(\alpha + \beta) = 0.$$

Pentru a finaliza trebuie să găsim o relație între parametrii α și β . O vom obține din faptul că planul trebuie să intersecteze sfera de centru $\Omega(3, 6, -2)$ de rază $R = 6$ după un cerc de rază $r = 5$. Obținem

$$d(\Omega, \pi) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$d(\Omega, \pi) = \frac{|6\alpha + 12\beta + 2\alpha - 2\beta - 3\alpha - 3\beta|}{\sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2 + (\alpha + \beta)^2}} = \frac{|5\alpha + 7\beta|}{\sqrt{5\alpha^2 + 5\beta^2 - 2\alpha\beta}}$$

Obținem:

$$25\alpha^2 + 70\alpha\beta + 49\beta^2 = 11(5\alpha^2 + 5\beta^2 - 2\alpha\beta) \rightarrow 30\alpha^2 - 92\alpha\beta + 6\beta^2 = 0 \rightarrow 15\alpha^2 - 46\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$$

O privim ca pe o ecuație de gradul II în necunoscuta β . Se observă că:

$$\Delta = 2116\beta^2 - 180\beta^2 = 1936\beta^2 = (44\beta)^2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{46\beta + 44\beta}{30} = 3\beta \\ \alpha = \frac{46\beta - 44\beta}{20} = \frac{1}{15}\beta \end{cases}$$

Obținem două plane care satisfac condițiile menționate:

$$\begin{cases} \pi_1 : 6\beta x + 2\beta y - 2\beta z - 12\beta = 0 \\ \pi_2 : \frac{2}{15}\beta x + 2\beta y + \frac{14}{15}z - \frac{48}{15}\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi_1 : 3x + y - z - 6 = 0 \\ \pi_2 : x + 15y + 7z - 24 = 0 \end{cases}$$

2. Observăm că $P \in S$, deci ecuația planului tangent se obține prin dedublare:

$$\pi_P : (x_P - 3)(x - 3) + (y_P - 6)(y - 6) + (z_P + 2)(z + 2) = 36.$$

$$\pi_P : (5 - 3)(x - 3) + (10 - 6)(y - 6) + (2 + 2)(z + 2) = 36$$

$$\pi_P : 2x + 4y + 4z - 58 = 0 \rightarrow \pi_P : x + 2y + 2z - 29 = 0.$$