

Examen geometrie diferențială: partea I - curbe și suprafețe

15 mai 2020

GD-0 Să se arate că dacă $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ este parametrizată natural, atunci

$$\ddot{\rho} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa} N + \tau \kappa B,$$

notațiile fiind cele uzuale.

GD-1 Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$, $a > 0$.

- (i) Să se studieze regularitatea lui ρ .
- (ii) Să se determine f astfel încât ρ să fie o curbă plană.
- (iii) Să se determine f astfel încât tangentele la ρ (în $\rho(t)$) să formeze unghi constant $\frac{\pi}{4}$ cu axa Oz .
- (iv) Pentru $f(t) = b \sin t + c$, ($b, c \in \mathbb{R}$) să se studieze curba.

GD-2 Fie curba $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (at^3 + b, t^2, \lambda t^3 + \mu t)$, unde $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (i) Să se determine a, b, λ și μ astfel încât $P(0, 1, -2) \in \rho(I)$, iar tangenta în P la ρ are direcția dată de vectorul $(3, -2, 4)$.
- (ii) Să se determine curbura și torsiune lui ρ într-un punct arbitrar.
- (iii) Să se determine a, b, λ și μ astfel încât ρ să aibă torsiune constantă.

GD-3 Fie curba $\rho : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (at + bt^3, 3t^2, \lambda t + \mu t^3)$, unde $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (i) Să se determine a, b, λ și μ astfel încât $P(2, 3, 2) \in \rho(I)$, iar tangenta în P la ρ are direcția dată de vectorul $(4, 6, 4)$.
- (ii) Pentru $a = 3, b = -1, \lambda = 3$ și $\mu = 1$ să se determine curbura și torsiunea lui ρ într-un punct arbitrar.
- (iii) Să se determine a, b, λ și μ astfel încât binormalele la ρ să formeze unghi constant $\frac{\pi}{4}$ cu axa Oz (indiferent de t).

GD-4 Fie suprafața $\mathcal{S}$ parametrizată $r : D \subseteq \mathbb{R}^2$, $r(u, v) = (u + v, u - v, A(u) + B(v))$, unde A și B sunt două funcții derivabile pe domeniile de definiție corespunzătoare.

(i) Pentru $A(u) = u^3$ și $B(v) = -v^3$:

- Să se scrie planul tangent la $\mathcal{S}$ în $P(2, 0, 0)$.
- Există puncte Q pe suprafața $\mathcal{S}$ astfel încât normala în Q să aibă direcția $(9, 15, -2)$?

În caz afirmativ, să se determine aceste puncte.

(ii) Determinați A și B astfel încât

- $\mathcal{S}$ să fie suprafață minimală (eventual dați doar exemple);
- $\mathcal{S}$ să fie suprafață plată.

GD-5 Fie suprafața $\mathcal{S}$ parametrizată $r : D \subseteq \mathbb{R}^2$, $r(u, v) = (\cos v, u + \sin v, A(u))$, unde A este o funcție derivabilă pe domeniul de definiție corespunzător.

(i) Pentru $A(u) = u^3$:

- Să se scrie planul tangent la $\mathcal{S}$ în $P(0, 2, 1)$.
- Există puncte Q pe suprafața $\mathcal{S}$ astfel încât normala în Q să aibă direcția $(0, -3, 1)$?

În caz afirmativ, să se determine aceste puncte.

(ii) Determinați A astfel încât

- $\mathcal{S}$ să fie suprafață minimală;
- $\mathcal{S}$ să fie suprafață plată;

(eventual dați doar exemple).

GD-6 Fie suprafața $\mathcal{S}$ parametrizată $r : D \subseteq \mathbb{R}^2$, $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, A(v) + bu)$, unde A este o funcție derivabilă pe domeniul de definiție corespunzător, iar $b \in \mathbb{R}$.

(i) Să se studieze regularitatea lui $\mathcal{S}$.

(ii) Pentru $A(v) = v^3$ și $b = 1$:

- Să se scrie planul tangent la $\mathcal{S}$ în $P(2, 0, 2)$.
- Există puncte Q pe suprafața $\mathcal{S}$ astfel încât normala în Q să aibă direcția $(-1, 0, 1)$?

În caz afirmativ, să se determine aceste puncte.

(ii) Determinați A și b astfel încât

- $\mathcal{S}$ să fie suprafață minimală;
- $\mathcal{S}$ să fie suprafață plată;

(eventual dați doar exemple).