

Exercițiul 1 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră punctele $A(1, 0, 1)$, $B(a, a, 1)$ și $C(2, 0, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Să se determine valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic în vârful A . În continuare vom folosi $a = 1$.
- Să se scrie ecuațiile canonice ale mediatoarei ipotenuzei BC .
- Să se determine un punct astfel încât simetricul său față de ipotenuza BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .
- Să se scrie ecuația generală a planului ABC și ecuațiile parametrice ale normalei la planul ABC duse prin mijlocul ipotenuzei.
- Determinați coordonatele unui punct aflat pe normala determinată anterior care se află la 2 unități distanță de planul ABC .

Soluție:

1. Triunghiul ABC este dreptunghic dacă $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$. Obținem

$$\langle (a-1, a, 0), (1, 0, -1) \rangle = 0 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1. \quad (1)$$

În continuare vom lucra cu

$$A(1, 0, 1), B(1, 1, 1), C(2, 0, 0).$$

2. Mediatoarea segmentului $[BC]$ este perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului. Prin urmare fie M mijlocul segmentului $[BC]$. Coordonatele acestuia sunt $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Mai avem nevoie de un vector director. Pentru aceasta vom utiliza informația că mediatoarea unei laturi dintr-un triunghi este paralelă cu înălțimea dusă din vârful opus. În cele ce urmează vom fi interesați de direcția înălțimii duse din vârful A . Mai întâi considerăm

$$A' = pr_{BC}A = BC \cap \pi, \pi \perp BC, A \in \pi.$$

Din

$$\pi \perp BC \rightarrow \vec{N}_\pi \parallel \overrightarrow{BC} = (1, -1, -1). \quad (2)$$

Momentan

$$(\pi) : x - y - z + d = 0.$$

Dar

$$A \in \pi \rightarrow d = 0.$$

Se obține:

$$\pi \cap BC : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = -t + 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow t + 1 + t - 1 + t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Deci

$$A' \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Vectorul director al înălțimii, deci și al mediatoarei căutate este

$$\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \parallel (1, 2, -1).$$

În final mediatoarea va fi determinată de punctul M și vectorul determinat anterior:

$$m = M + [\overrightarrow{AA'}] : \frac{x - \frac{3}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}.$$

Alternativ mediatoarea este dată de intersecția planului normal dreptei BC care trece prin M cu planul ABC . Fie

$$\pi' \perp BC, M \in \pi' \rightarrow \pi' : \left(x - \frac{3}{2} \right) - \left(y - \frac{1}{2} \right) - \left(z - \frac{1}{2} \right) - 0 \rightarrow \pi' : x - y - z - \frac{1}{2} = 0.$$

$$m : \begin{cases} 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \\ -x - z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -2t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \rightarrow m : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-2} = \frac{z}{1}. \quad (4)$$

3. Amintim mai întâi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC :

$$G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Deci acest centru de greutate este simetricul punctului căutat față de ipotenuza BC . Să determinăm proiecția acestui punct pe ipotenuza BC .

$$G' = pr_{BC}G = BC \cap \pi', \quad \pi' \perp BC, \quad G \in \pi'. \quad (5)$$

Din $\pi' \perp BC \rightarrow \bar{N}_{\pi'} \parallel \overrightarrow{BC} = (1, -1, -1)$

$$\pi' : x - y - z + d = 0.$$

Din

$$G \in \pi' \rightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + d = 0 \rightarrow d = -\frac{1}{3} \rightarrow x - y - z - \frac{1}{3} = 0.$$

Determinăm:

$$G' = \pi' \cap BC : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = -t + 1 \\ x - y - z - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \rightarrow 3t = \frac{4}{3} \rightarrow t = \frac{4}{9} \rightarrow G' \left(\frac{13}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9} \right) \quad (6)$$

Deci G' este mijlocul segmentului $[GG'']$, $G'' = s_{BC}G$. Se obține:

$$\begin{cases} x_{G''} = 2x_{G'} - x_G \\ y_{G''} = 2y_{G'} - y_G \\ z_{G''} = 2z_{G'} - z_G \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{G''} = \frac{14}{9} \\ y_{G''} = \frac{7}{9} \\ z_{G''} = \frac{4}{9} \end{cases} \quad (7)$$

4.

$$\bar{N}_{ABC} \parallel (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -1).$$

Momentan

$$(ABC) : -x - z + d = 0.$$

Impunem condiția ca $A \in (ABC) \rightarrow d = 2 \rightarrow (ABC) : -x - z + 2 = 0$.

Normala pe care o căutăm este determinată de punctul M și vectorul director $\bar{N}_{(BC)}$:

$$n : M + [\bar{N}_{(BC)}] : \begin{cases} x = -t + \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (8)$$

5. Fie $P \in n$. Deci $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $P \left(-t + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -t + \frac{1}{2} \right)$. Știm că $d(P, ABC) = 2 \rightarrow \frac{\left| t - \frac{3}{2} + t - \frac{1}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1+1}} = 2$.

Prin urmare

$$|2t| = 2\sqrt{2} \rightarrow t = \pm\sqrt{2}.$$

Obținem două puncte care satisfac condițiile menționate și anume:

$$\begin{cases} P_1 \left(-\sqrt{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \\ P_2 \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Exercițiul 2 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră dreapta $d : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ și planul $\pi : 4x - 2y + 1 = 0$

- Să se studieze poziția relativă a dreptei d față de planul π .
- Să se determine 2 puncte A și B astfel încât $A \in d$ și $M \in \pi$ unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.
- Determinați unghiul format de dreapta d și planul π .
- Scrieți ecuația planului normal dreptei d care conține originea sistemului de coordonate.
- Determinați coordonatele punctelor aflate pe axa Ox la distanța de 4 unități față de planul π .

Soluție:

1. Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei d astfel:

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Studiem acum poziția dreptei față de plan:

$$d \cap \pi : \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = 4t \\ 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 4t - 2t - 4 + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2} \rightarrow d \cap \pi = R\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 6\right). \quad (10)$$

2. Dorim să determinăm cele două puncte. Vom începe de la informația că $A \in d \rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(t, t + 2, 4t)$.
Mai mult $M \in \pi \rightarrow 4x_M - 2y_M + 1 = 0$.
Este evident că vorbim despre o infinitate de soluții. Spre exemplu putem alege:

$$A(0, 2, 0), M\left(-\frac{1}{4}, 0, 2\right) \rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = -\frac{1}{2} \\ y_B = 2y_M - y_A = -2 \\ z_B = 2z_M - z_A = 4. \end{cases} \quad (11)$$

3. Pentru planul π avem direcția normală acestuia $\bar{N}_\pi \in [\vec{\pi}]^\perp$, $\bar{N}_\pi = (4, -2, 0)$. Pentru dreapta $\vec{d} = [\vec{a}]$, $\vec{a} = (1, 1, 4)$.
Calculăm unghiul θ dintre d și π folosind formula

$$\sin \theta = \frac{|\langle \bar{N}_\pi, \vec{a} \rangle|}{\|\bar{N}_\pi\| \cdot \|\vec{a}\|} = \frac{2}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = \frac{2}{6\sqrt{10}} = \frac{1}{3\sqrt{10}} \rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{3\sqrt{10}}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (12)$$

4. Deoarece $\pi' \perp d \rightarrow \bar{N}_{\pi'} \parallel \vec{a}$. Momentan

$$\pi' : x + y + 4z + d = 0.$$

Dar

$$O \in \pi' \rightarrow d = 0.$$

Obținem $\pi' : x + y + 4z = 0$.

5. Fie $P \in Ox \rightarrow P(\lambda, 0, 0)$. Știm că $d(P, \pi) = 4$. Deci

$$d(P, \pi) = \frac{|4\lambda + 1|}{2\sqrt{5}} = 4 \rightarrow |4\lambda + 1| = 8\sqrt{5} \rightarrow 4\lambda + 1 = \pm 8\sqrt{5} \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm 8\sqrt{5}}{4} \quad (13)$$

Se obțin punctele:

$$\begin{pmatrix} P_1\left(\frac{-1 + 8\sqrt{5}}{4}, 0, 0\right) \\ P_2\left(\frac{-1 - 8\sqrt{5}}{4}, 0, 0\right) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Exercițiul 3 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră punctul $A(1, 0, 1)$ și dreapta $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- Determinați coordonatele proiecției punctului A pe dreapta d .
- Determinați coordonatele punctelor B și C de pe dreapta d astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel în vârful A .
- Calculați măsura unghiului $\widehat{BAC}$.
- Scrieți ecuația planului paralel cu xOy care conține punctul A .
- Care este poziția relativă a planului determinat anterior față de dreapta d .

Soluție:

1. Fie $A' = pr_d A = d \cap \pi$, $\pi \perp d$, $A \in \pi$. Din $\pi \perp d \rightarrow \bar{N}_\pi = (1, 2, 3)$. Deci:

$$\pi : x + 2y + 3z + d = 0.$$

Din $A \in \pi \rightarrow d = -4$. Se obține

$$\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

Determinăm proiecția punctului A :

$$d \cap \pi : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{2}{7} \quad (15)$$

Avem:

$$A' \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

2. Dorim să găsim B și C de pe dreapta d astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel. Rezultă că $[AA']$ este mediană și înălțime din vârful A . Fie $B \in d$, $C \in d \rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}$ astfel încât $B(t', 2t', 3t')$ și $C(s, 2s, 3s)$.

Triunghiul ABC este isoscel dacă: $\begin{cases} AB = AC \\ A' \text{ este mijlocul lui } BC. \end{cases}$

Să scriem normele care intervin:

$$\begin{cases} AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(t' - 1)^2 + 4t'^2 + (3t' - 1)^2} \\ AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(s - 1)^2 + 4s^2 + (3s - 1)^2} \end{cases} \quad (16)$$

Alegem spre exemplu $t' = 1 \rightarrow B(1, 2, 3) \in d$ Folosim informația că A' mijlocul lui $[BC]$ și obținem:

$$\begin{cases} x_C = 2x_{A'} - x_B = -\frac{3}{7} \\ y_C = 2y_{A'} - y_B = -\frac{6}{7} \\ z_C = 2z_{A'} - z_B = -\frac{9}{7} \end{cases} \quad (17)$$

Avem:

$$\begin{cases} \vec{AB} = (0, 2, 2) \\ \vec{AC} = \left(-\frac{10}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{16}{7} \right) \end{cases} \quad (18)$$

În final:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ AC = \frac{\sqrt{100 + 36 + 256}}{7} = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (19)$$

La modul general $B(t, 2t, 3t)$ iar simetricul său față de AA' , adică C are coordonatele:

$$\begin{cases} x_C = 2x_{A'} - x_B = \frac{4}{7} - t \\ y_C = 2y_{A'} - y_B = \frac{8}{7} - 2t \\ z_C = 2z_{A'} - z_B = \frac{12}{7} - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle|}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\left| -\frac{12}{7} - \frac{32}{7} \right|}{8} = \frac{44}{56} = \frac{11}{14} \rightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{11}{14}\right). \quad (20)$$

4. Fie $\pi' \parallel xOy \rightarrow \tilde{N}_{\pi'} = (0, 0, 1)$. Obținem:

$$(\pi') : z + d = 0.$$

Din

$$A \in \pi' \rightarrow d = -1 \rightarrow \pi' : z - 1 = 0.$$

5. Scriem ecuațiile parametrice al dreptei d apoi vom studia poziția acesteia față de planul π' :

$$d \cap \pi' : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \\ z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{3} \rightarrow d \cap \pi' = S\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right). \quad (21)$$

Exercițiul 4 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră dreptele:

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}, \quad d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$$

- Scrieți ecuațiile parametrice ale perpendicularei comune a dreptelor d_1 și d_2 .
- Scrieți ecuația planului normal dreptei d_1 care trece prin $A(1, 1, 1)$.
- Scrieți ecuațiile canonice ale proiecției dreptei d_1 pe planul $x + y + z - 1 = 0$.
- Determinați unghiul neorientat dintre dreptele d_1 și d_2 .
- Calculați $d(d_1, d_2)$.

Soluție:

1. Să verificăm mai întâi dacă cele două drepte sunt necoplanare. Pentru aceasta considerăm: $A_1 \in d_1, A_1(0, 0, 0), A_2 \in d_2, A_2(0, 0, 1), \bar{a}_1 \in \overrightarrow{d_1}, \bar{a}_2 \in \overrightarrow{d_2}$.

$$d_1 \text{ și } d_2 \text{ necoplanare} \Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0. \quad (22)$$

Se obține:

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow d_1, d_2 \text{ necoplanare}. \quad (23)$$

Fie $P_1 \in d_1, P_1(t, 0, 2t)$ și $P_2 \in d_2, P_2(s, s, 3s + 1)$. Dreapta P_1P_2 este perpendiculara comună pentru cele două drepte dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \bar{a}_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \bar{a}_2 \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \langle (s-t, s, 3s-2t+1), (1, 0, 2) \rangle = 0 \\ \langle (s-t, s, 3s-2t+1), (1, 1, 3) \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s-t+6s-4t+2=0 \\ s-t+10s-6t+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7s-5t+2=0 \\ 11s-7t+3=0 \end{cases} \quad (24)$$

Obținem

$$t = \frac{1}{6}, \quad s = -\frac{1}{6} \rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \parallel (-2, -1, 1).$$

Ecuațiile parametrice sunt:

$$P_1P_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{6} - 2t \\ y = -t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

2. Fie $\pi \perp d_1 \rightarrow \bar{N}_\pi = (1, 0, 2)$. Obținem:

$$\pi : x + 2z + d = 0$$

Din $A \in \pi \rightarrow 3 + d = 0 \rightarrow d = -3 \rightarrow \pi : x + 2z - 3 = 0$.

3. Studiem mai întâi poziția relativă a dreptei față de plan:

$$d_1 \cap \pi : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{3} \rightarrow d_1 \cap \pi = R \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right). \quad (26)$$

Deci $pr_\pi R = R$. Observăm că $O \in d_1$. Dorim să determinăm $O' = pr_\pi O = \pi \cap d$, $d \perp \pi$, $O \in d$, $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

$$\pi \cap d : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{3}. \quad (27)$$

Deci $O' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$. Finalizăm cu:

$$O'R = pr_\pi d_1 : \frac{x - \frac{1}{3}}{0} = \frac{y}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}. \quad (28)$$

4. Unghiul dintre cele două drepte este:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \cdot \|\bar{a}_2\|} = \frac{7}{\sqrt{55}} \rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{7}{\sqrt{55}} \right). \quad (29)$$

5.

$$d(d_1, d_2) = \frac{|\left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \right)|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|}.$$

Determinăm mai întâi:

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1) \quad (30)$$

Obținem:

$$d(d_1, d_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Exercițiul 5 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră punctele $A(\lambda, 1 + \lambda, 0)$, $B(1, 0, 1)$ și $C(2, 3, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Determinați valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel ($AB = AC$).
- Pentru $\lambda = 1$ scrieți ecuația planului ABC .
- Scrieți ecuațiile parametrice ale bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$. ($\lambda = 1$)
- Determinați distanța $d(A, BC)$ și simetricul punctului A față de dreapta BC . ($\lambda = 1$)
- Identificați coordonatele unui punct $P \in Oy$ pentru care $d(P, ABC) = 4$.

Soluție:

1. Obținem

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 - \lambda, -1 - \lambda, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2 - \lambda, 2 - \lambda, 0) \end{cases} \quad (31)$$

ABC este isoscel dacă și numai dacă:

$$(1-\lambda)^2 + (-1-\lambda)^2 + 1 = (2-\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 \rightarrow 8\lambda = 5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{8}.$$

2. În continuare

$$A(1, 2, 0), B(1, 0, 1), C(2, 3, 0).$$

$$\bar{N}_{ABC} \parallel (\vec{AB} \times \vec{AC}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 2)$$

Deci $(ABC) : -x + y + 2z + d = 0$. Din $A \in (ABC) \rightarrow d = -1$. Obținem:

$$(ABC) : -x + y + 2z - 1 = 0.$$

3. Fie (AD) bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Avem

$$\vec{AD} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Rezultă:

$$b + A + [\vec{AD}] : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ y = 2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)t \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4.

$$d(A, BC) = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{BC}\|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}. \quad (32)$$

Fie $A'' = s_{BC}A$. Vom determina mai întâi

$$A' = pr_{BC}A = BC \cap \pi, \pi \perp BC, A \in \pi.$$

$$(\pi) : x + 3y - z + d = 0.$$

Din $A \in \pi \rightarrow \pi : d = -7 \rightarrow \pi : x + 3y - z - 7 = 0$. Găsim:

$$BC \cap \pi : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \\ x + 3y - z - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow 1 + t + 9t - 1 + t - 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{11} \rightarrow A' \left(\frac{18}{11}, \frac{21}{11}, \frac{4}{11} \right). \quad (33)$$

$$\text{Fie } A' \text{ mijlocul segmentului } [AA''] \rightarrow \begin{cases} x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = \frac{25}{11} \\ y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = \frac{20}{11} \\ z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = \frac{8}{11} \end{cases}$$

5. $P \in Oy \rightarrow P(0, y_0, 0)$.

$$d(P, ABC) = \frac{|y_0 - 1|}{\sqrt{6}} = 4 \rightarrow |y_0 - 1| = 4\sqrt{6} \rightarrow \lambda = 1 \pm 4\sqrt{6}.$$

Obținem două puncte care satisfac condițiile impuse:

$$\begin{pmatrix} P_1(0, 1 + 4\sqrt{6}, 0) \\ P_2(0, 1 - 4\sqrt{6}, 0) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Exercițiul 6 În spațiul afin euclidian 3-dimensional se consideră dreapta

$$d : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

și planul $\pi : 6x - 2y + 7 = 0$.

- Dați exemple de 2 puncte A și B de pe dreapta d pentru care mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(1, 1, 1)$.
- Scrieți ecuația unui plan care trece prin origine și este normal dreptei d .
- Determinați măsura unghiului neorientat dintre dreapta d și planul π .
- Determinați coordonatele unui punct $P \in Oz$ pentru care $d(P, d) = 2$.
- Calculați distanța dintre d și δ , unde $\delta : x = y = 2z$.

Soluție:

1. Scriem mai întâi ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Observăm că pentru $t = 1$ obținem punctul $M \rightarrow M \in d$. Considerăm

$$t = 0 \rightarrow A \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right).$$

Deoarece M mijlocul segmentului $[AB]$ obținem:

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = \frac{1}{2} \\ y_B = 2y_M - y_A = \frac{1}{2} \\ z_B = 2z_M - z_A = 2 \end{cases} \rightarrow B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) \in d. \quad (36)$$

2. Obținem:

$$\pi' : x + y - 2z = 0.$$

3. Avem $\bar{N}_\pi = (6, -2, 0)$, $\bar{a} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$.

$$\sin \theta = \frac{|\langle \bar{N}_\pi, \bar{a} \rangle|}{\|\bar{N}_\pi\| \cdot \|\bar{a}\|} = \frac{2}{\sqrt{40} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \right). \quad (37)$$

4. $P \in Oz \rightarrow P(0, 0, z_0)$. Avem:

$$d(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{PM} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}, \quad \overrightarrow{PM} = (1, 1, 1 - z_0) \quad (38)$$

$$\overrightarrow{PM} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 - z_0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z_0, -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}z_0, 0 \right) \quad (39)$$

Deci:

$$d(P, d) = \frac{\sqrt{2 \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}z_0 + \frac{1}{4}z_0^2 \right)}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2 \rightarrow \frac{9}{2} - 3z_0 + \frac{1}{2}z_0^2 = 6 \rightarrow z_0^2 - 6z_0 - 3 = 0 \quad (40)$$

Deci

$$\Delta = 36 + 12 = 48.$$

Soluțiile sunt:

$$\begin{cases} P_1 \left(0, 0, 3 + 2\sqrt{3} \right) \\ P_1 \left(0, 0, 3 - 2\sqrt{3} \right) \end{cases} \quad (41)$$

5. Verificăm dacă dreptele sunt necoplanare. Fie $O(0,0,0) \in \delta$. Atunci d și δ sunt necoplanare dacă și numai dacă:

$$(\overrightarrow{OM}, \bar{a}, \bar{\delta}) \neq 0, \quad \bar{\delta} = \left(1, 1, \frac{1}{2} \right).$$

Obținem:

$$(\overrightarrow{OM}, \bar{a}, \bar{\delta}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow d \text{ și } \delta \text{ sunt coplanare} \rightarrow d(d, \delta) = 0 \text{ dreptele nu sunt paralele} \quad (42)$$

Exercițiul 7 1. Se consideră $d : 2x + y = 0$, $\delta : 2x + y + 2 = 0$. Să se demonstreze că prin compunerea simetriilor ortogonale $S_d \circ S_\delta$ se obține o izometrie care să fie determinată ulterior.

2. Să se scrie ecuațiile rotației $R_{Oy, -\frac{\pi}{4}} \circ t_{\bar{u}}$, $\bar{u} = (0, 4, 0)$.

Soluție:

1. Vom începe cu compunerea $S_d \circ S_\delta$. Pentru aceasta considerăm:

$$P \xrightarrow{S_\delta} P' \xrightarrow{S_d} P'' \quad (43)$$

Prin urmare dorim mai întâi să scriem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ . Pentru aceasta pornim de la punctul $P(x, y)$ și îl simetrizăm față de dreapta δ . Pentru a obține simetricul acestuia mai întâi îl vom proiecta pe dreapta δ și vom găsi $P_0 = PP' \cap \delta$, $P_0 = pr_d P$. Avem toate informațiile necesare pentru scrierea ecuațiilor dreptei PP' . Deci:

$$PP' : \begin{cases} x' = x + 2t \\ y' = y + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (44)$$

P_0 este mijlocul segmentului $[PP']$ prin urmare $P_0 \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x+2t}{2}, \frac{2y+t}{2} \right)$. Valoarea lui t va fi obținută din faptul că $P_0 \in \delta$:

$$4x + 4t + 2y + t + 4 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{5}(4x + 2y + 4). \quad (45)$$

Înlocuim în (44) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ :

$$S_\delta : \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases} \quad (46)$$

Continuăm cu ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d . De această dată pornim cu $P'(x', y') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'')$. De această dată $P'_0 = d \cap P'P'' = pr_d P'$. Putem scrie ecuațiile dreptei $P'P''$:

$$P'P'' : \begin{cases} x'' = 2t + x' \\ y'' = t + y' \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Deoarece $P'_0 \in d$ rezultă $t = -\frac{1}{5}(4x' + 2y')$. Așadar ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d sunt:

$$S_d : \begin{cases} x'' = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y'' = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases} \quad (48)$$

Putem scrie acum ecuațiile compunerii celor două simetrii:

$$S_d \circ S_\delta : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Prin urmare de această dată vorbim despre o translație. A se observa că în cazul de față dreptele propuse sunt paralele, motiv pentru care compunerea celor două simetrii a condus către o translație de vector $\bar{u} = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right)$. Mai mult

$$d(d, \delta) = d(O, \delta) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \|\bar{u}\| = \frac{1}{5}\sqrt{64 + 16} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \rightarrow \|\bar{u}\| = 2d(d, \delta). \quad (50)$$

2. Avem:

$$P(x, y, z) \xrightarrow{t_{\bar{u}}} P'(x, y', z') \xrightarrow{R_{Oy, \frac{\pi}{4}}} P''(x'', y'', z''). \quad (51)$$

Avem:

$$t_{\bar{u}} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 4 \\ z' = z \end{cases} \quad (52)$$

$$P'' = O + \overrightarrow{OP''} \rightarrow R_{Oy,\theta}(P'') = R_{Oy,\theta}(O) + R_{j,\theta}(\overrightarrow{OP''}) = R_{j,\theta}(\overrightarrow{OP''}). \quad (53)$$

Matricea lui $R_{\bar{j},\theta}$ în raport cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (54)$$

Deci:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (55)$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$R_{Oy,\frac{\pi}{4}} : \begin{cases} x'' = x' \cos \frac{\pi}{4} + z' \sin \frac{\pi}{4} \\ y'' = y' \\ z'' = -x' \sin \frac{\pi}{4} + z' \cos \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ y'' = y' \\ z'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases} \quad (56)$$

Deci:

$$R_{Oy,\frac{\pi}{4}} \circ t_{\bar{u}} : \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y'' = y + 4 \\ z'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{cases} \quad (57)$$

Exercițiul 8 1. În raport cu un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ se dau ecuațiile aplicației

$$f : E \rightarrow E, \quad f : \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$$

Demonstrați că f este o izometrie, precizând specia ei. Determinați dacă f are puncte fixe, apoi precizați natura lui f .

2. Să se studieze ce se obține prin compunerea:

$$R_{Ox,\frac{\pi}{4}} \circ R_{Ox,\frac{\pi}{2}}.$$

Soluție:

1. Scriem f matriceal $X' = f(X) = AX + B \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (58)$$

f este morfism afn.

În cele ce urmează verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (59)$$

Din (69) și (70), rezultă că f izometrie.

Deoarece

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \rightarrow f \text{ antideplasare.} \quad (60)$$

Studiem punctele fixe, adică soluțiile sistemului $f(\Omega) = \Omega$. Se obține că avem o infinitate de puncte fixe.

$$\begin{cases} x = -y + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow x + y - 2 = 0 \rightarrow \text{toate punctele fixe aparțin dreptei } d : x + y - 2 = 0 \rightarrow \text{izometria este } S_d. \quad (61)$$

2. Pornim cu:

$$P(x, y, z) \xrightarrow{R_{Ox, \frac{\pi}{2}}} P'(x', y', z') \xrightarrow{R_{Ox, \frac{\pi}{4}}} P''(x'', y'', z'') \quad (62)$$

Vom scrie mai întâi ecuațiile celor două rotații și apoi vom analiza compunerea celor două rotații:

$$R_{Ox, \frac{\pi}{2}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$R_{Ox, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (64)$$

Prin compunerea celor două rotații se obține:

$$R_{Ox, \frac{\pi}{4}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{2}} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (65)$$

(a) Aplicația anterioară este morfism potrivit scrierii matriceale.

(b) Verificăm dacă matricea asociată este ortogonală:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I_3 \rightarrow R_{Ox, \frac{\pi}{4}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{2}} \text{ izometrie.} \quad (66)$$

Calculăm $\det A = 1 > 0 \rightarrow R_{Ox, \frac{\pi}{4}} \circ R_{Ox, \frac{\pi}{2}}$ deplasare. Vom analiza mulțimea punctelor fixe asociate, adică soluțiile sistemului:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (67)$$

Rezultă că avem o infinitate de puncte fixe toate aparținând axei Ox . Unghiul de rotație se identifică cu ajutorul matricei A care este o matrice de rotație în jurul axei Ox .

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}. \quad (68)$$

Exercițiul 9 1. În raport cu un reper ortonormat pozitiv în $\mathcal{E}^2$ se dau ecuațiile aplicației

$$f : E \rightarrow E, \quad f : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2, \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

Demonstrați că f este o izometrie, precizând specia ei. Determinați dacă f are puncte fixe, apoi precizați natura lui f .

2. Să se determine izometria f pentru care $f \circ S_d = t_{\bar{u}}$, $d : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$, $\bar{u} = (2, 2, 0)$.

Soluție:

1. Se observă că f este morfism afin din forma ecuațiilor sale. Scriem f matriceal $X' = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, obținem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (69)$$

f este morfism afin. Verificăm dacă aplicația liniară asociată $\vec{f}$ este ortogonală, adică dacă matricea A este ortogonală. Pentru aceasta calculăm

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \vec{f} \text{ este ortogonală.} \quad (70)$$

Din (69) și (70), rezultă că f izometrie.

Deoarece:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow f \text{ deplasare} \quad (71)$$

Observăm că $\vec{f} = R_\theta$, unde deoarece $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\sin \theta = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$.

Ω este singurul punct fix al izometriei. Vom determina coordonatele acestui din rezolvarea sistemului

$$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} (1 - \cos \theta)x + \sin \theta y = 2, \\ -\sin \theta x + (1 - \cos \theta)y = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Obținem

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2 - \sqrt{3}}. \end{cases}$$

Deci f este rotația de unghi θ și centru $\Omega = \left(-1, -\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)$. Obținem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (74)$$

2. Deoarece S_d este involutivă avem

$$S_d \circ S_d = Id \rightarrow f = t_{\bar{u}} \circ S_d.$$

Prin urmare:

$$P(x, y, z) \xrightarrow{S_d} P'(x', y', z') \xrightarrow{t_{\bar{u}}} P''(x'', y'', z'') \quad (75)$$

Vom începe cu ecuațiile simetriei față de dreapta

$$d: \frac{X}{1} = \frac{Y - 2}{1} = \frac{Z}{0}.$$

Fie

$$P_0 = pr_d P = d \cap \pi, \quad \pi \perp d, P \in \pi.$$

Obținem:

$$P_0 = d \cap \pi: \begin{cases} X + Y - x - y = 0 \\ X = t, \\ Y = t + 2 \\ Z = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{2}(x + y - 2) \quad (76)$$

Deci

$$P_0 \left(\frac{1}{2}(x + y - 2), \frac{1}{2}(x + y + 2), 0 \right)$$

Considerăm P_0 mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul P și simetricul lui față de dreapta P' .

$$\begin{cases} x_{P'} = 2x_{P_0} - x_P = y - 2 \\ y_{P'} = 2y_{P_0} - y_P = x + 2 \\ z_{P'} = 2z_{P_0} - z_P = -z \end{cases} \quad (77)$$

Scriem și ecuațiile translației:

$$P'' = t_{\bar{u}}(P') \begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' + 2 \\ z'' = z' \end{cases}$$

Compunerea celor două izometrii este dată de:

$$t_{\bar{u}} \circ S_d : \begin{cases} x'' = y \\ y'' = x + 4 \\ z'' = -z \end{cases}.$$

Să studiem aplicația obținută:

- Avem:

$$f : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow f \text{ morfism}$$

-

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow f \text{ izometrie}.$$

Observăm că

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow f \text{ deplasare.}$$

Studiem mulțimea punctelor fixe:

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = -4 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad (78)$$

Observăm că $\det(A - I_3) = 0$ în timp ce $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ prin urmare sistemul este incompatibil. Vorbim despre compunerea dintre o rotație și o translație:

$$f = R_{d, \theta} \circ t_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in \vec{d}$$

Deoarece rotația are aceeași urmă cu compunerea prezentată anterior vom determina vectorul director al dreptei în jurul căreia se efectuează rotația prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t, \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (79)$$

Prin urmare:

$$f(X) = X - t(1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obținem valoarea parametrului din egalarea următorului determinant cu zero (asigurăm compatibilitatea sistemului)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -t \\ 1 & 0 & 4-t \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(4-2t) = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow \bar{u} = (2, 2, 0).$$

Dreapta în jurul căreia ne rotim:

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (80)$$

Unghiul de rotație va fi $\theta = \pi$.

Verificare:

$$R_{d,\pi} : A + \cos \pi \overrightarrow{AP} + (1 - \cos \pi) \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} = (0, 2, 0) - (x, y - 2, z) + (x + y - 2)(1, 1, 0) = (y - 2, x + 2, -z) \quad (81)$$

$$R_{d,\pi} \circ t_{\vec{u}} : \begin{cases} x' = y \\ y = x + 4 \\ z' = -z. \end{cases}$$

Exercițiul 10 1. Să se scrie ecuațiile rotației de centru $\Omega(1, 2)$ și unghi $\theta = \frac{\pi}{4}$. Determinați imaginea dreptei $d : x - y + 2 = 0$ prin această izometrie și reprezentați grafic.

2. Să se studieze ce se obține din compunerea:

$$S_d \circ S_\delta, \quad d : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - 4}{1}, \quad \delta : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z}{2}.$$

Soluție:

1. Fie $P(x, y) \in E$. Vom începe cu ecuațiile rotației de centru Ω și unghi $\frac{\pi}{4}$:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - 2) + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - 2) + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \end{cases} \quad (82)$$

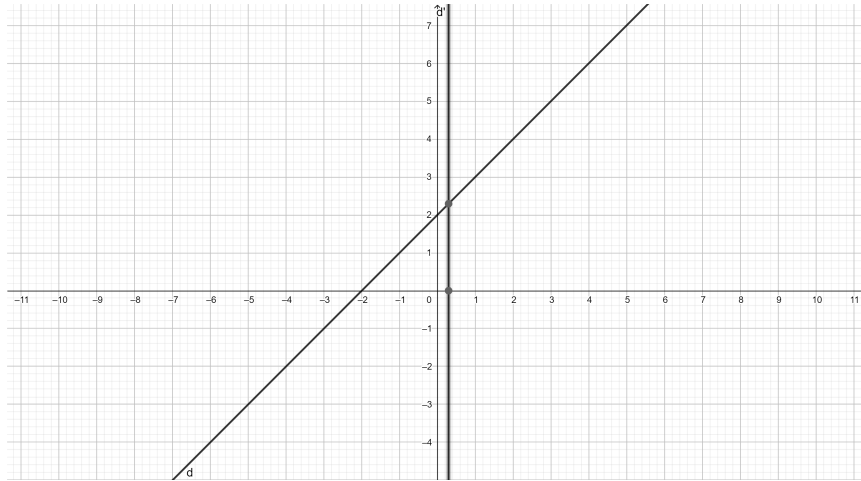
Dorim acum să determinăm imaginea dreptei d prin această rotație:

În cele ce urmează dorim să obținem exprimarea coordonatelor punctului inițial în funcție de punctul rotit pentru a înlocui în ecuația dreptei d . Prin adunarea, respectiv scăderea celor două relații scrise anterior obținem

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y' + \sqrt{2} - 3) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x' + 2\sqrt{2} - 1) \end{cases} \quad (83)$$

Înlocuim în ecuațiile dreptei d și obținem imaginea acesteia prin rotația analizată:

$$d' : \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y' + \sqrt{2} - 3 - y' + x' - 2\sqrt{2} + 1) + 2 = 0 \rightarrow 2x' + \sqrt{2} - 2 = 0. \quad (84)$$



2. Avem

$$P(x, y, z) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'', z''). \quad (85)$$

Fie $P_0 = pr_\delta P = \delta \cap \pi$, $\pi \perp \delta$, $P \in \pi$. Obținem:

$$\delta \cap \pi : \begin{cases} X + Z - x - z = 0 \\ X = t \\ Y = 0 \\ Z = t + 4 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{2}(x + z - 4) \rightarrow P_0 \left(\frac{1}{2}(x + z - 4), 0, \frac{1}{2}(x + z + 4) \right). \quad (86)$$

Considerăm P_0 mijlocul segmentului $[PP'] \rightarrow \begin{cases} X_{P'} = z - 4 \\ Y_{P'} = -y \\ Z_{P'} = x + 4 \end{cases}$

Analog, fie $P'_0 = pr_d P' = d \cap \pi'$, $\pi' \perp d$, $P' \in \pi'$. Avem:

$$d \cap \pi' : \begin{cases} X = 2t + 1 \\ Y = -1 \\ Z = 2t \\ 2X + 2Z - 2x' - 2z' = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{4}(x' + z' - 1) \rightarrow P'_0 \left(\frac{1}{2}(x' + z' + 1), -1, \frac{1}{2}(x' + z' - 1) \right). \quad (87)$$

Considerăm P'_0 mijlocul segmentului $[P'P''] \rightarrow \begin{cases} X_{P''} = z' + 1 \\ Y_{P''} = -2 - y' \\ Z_{P''} = x' - 1 \end{cases}$

Studiem compunerea celor două izometrii:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Am obținut o translație de vector $\bar{u} = (5, -2, 5)$, $\|\bar{u}\| = \sqrt{54}$.

Mai mult deoarece $d \parallel \delta \rightarrow d(d, \delta) = d(A, \delta)$, $A \in \delta$.

$$d(A, \delta) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \bar{\delta}\|}{\|\bar{\delta}\|} = \frac{\sqrt{54}}{2}, \quad A(0, 0, 4), B(1, -1, 0).$$

Deci

$$\|\bar{u}\| = 2d(d, \delta).$$

Exercițiul 11 1. Să se studieze $S_d \circ S_\delta$, $d : x + 2y - 2 = 0$, $\delta : 2x - y = 0$.

2. Să se scrie ecuațiile izometriei $S_\pi \circ R_{Oy, \frac{\pi}{2}}$, $\pi : y + 6 = 0$.

Soluție:

1.

$$P(x, y) \xrightarrow{S_\delta} P'(x', y') \xrightarrow{S_d} P''(x'', y'') \quad (88)$$

Mai întâi vom scrie ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ . Deci vom considera $P' = s_\delta P$. În cele ce urmează suntem interesați de coordonatele punctului P' .

Pentru a identifica aceste coordonate vom proiecta mai întâi punctul pe dreaptă și vom obține punctul P_0 apoi vom considera acest punct mijlocul segmentului ce are drept extremități punctul și simetricul lui P .

Se observă că dreapta PP' este perpendiculară pe dreapta δ , intersecția celor două fiind chiar proiecția punctului P . Avem:

$$PP' \perp \delta \rightarrow \overrightarrow{PP'} \parallel \bar{N}_d = (2, -1). \quad (89)$$

Deci:

$$PP' : \begin{cases} x' = 2t + x \\ y' = -t + y \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (90)$$

Următorul pas este identificarea parametrului $t \in \mathbb{R}$. Pentru aceasta observăm că $P_0 \in \delta$ și P_0 mijloc pentru $[PP']$.

Deci:

$$P_0 \left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2} \right) \rightarrow P_0 \left(\frac{2x + 2t}{2}, \frac{2y - t}{2} \right) \quad (91)$$

Din

$$P_0 \in \delta \rightarrow 2 \frac{2x + 2t}{2} - \frac{2y - t}{2} = 0 \rightarrow t = \frac{1}{5}(-4x + 2y) \quad (92)$$

Înlocuim valoarea parametrului în (90) și obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta δ :

$$S_\delta : \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \quad (93)$$

Într-o manieră asemănătoare vom proceda pentru a determina ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d . Pornim cu $P'(x', y')$ pe care dorim să îl simetrizăm față de dreapta d pentru a obține $P'' = s_d P'$. Fie $P'_0 = pr_d P' = P'' P' \cap d$.

Deoarece $P'P'' \perp d \rightarrow P'P'' :$

$$\begin{cases} x'' = t + x' \\ y'' = 2t + y' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (94)$$

Vom obține valoarea parametrului t utilizând informațiile referitoare la P'_0 . Mai exact, deoarece P'_0 este mijlocul segmentului $[P'P'']$ obținem:

$$P'_0 \left(\frac{x'' + x'}{2}, \frac{y'' + y'}{2} \right) \rightarrow P'_0 \left(\frac{2x' + t}{2}, \frac{2y' + 2t}{2} \right) \quad (95)$$

Fiindcă

$$P'_0 \in d \rightarrow \frac{2x' + t}{2} + 2\frac{2y' + 2t}{2} - 2 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{5}(-2x' - 4y' + 4) \quad (96)$$

Înlocuind valoarea parametrului t în (94) obținem ecuațiile simetriei ortogonale față de dreapta d :

$$S_d : \begin{cases} x'' = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5} \\ y'' = -\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{8}{5} \end{cases} \quad (97)$$

Să analizăm acum compunerea

$$S_d \circ S_\delta : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Verificăm mai întâi dacă aplicația obținută este o izometrie. Pentru aceasta:

- (a) $S_d \circ S_\delta(X) = AX + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow S_d \circ S_\delta$ morfism.
- (b) Verificăm dacă $AA^t = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_d \circ S_\delta$ izometrie.

Mai departe dorim să determinăm tipul izometriei. Calculăm:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow S_d \circ S_\delta$$

deplasare.

Identificăm punctele fixe prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + \frac{4}{5} = x \\ -y + \frac{8}{5} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \quad (98)$$

Am obținut un unic punct fix deci izometria $S_d \circ S_\delta$ este rotația de centru $\Omega \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right) = d \cap \delta$. În continuarea vom determina unghiul din relațiile:

$$\begin{cases} \cos \theta = -1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \theta = \pi. \quad (99)$$

Am obținut că $S_d \circ S_\delta = R_{\Omega, \pi}$.

2. Considerăm:

$$P(x, y, z) \xrightarrow{R_{Oy, \bar{j}}} P'(x', y', z') \xrightarrow{S_\pi} P''(x'', y'', z''). \quad (100)$$

Începem cu ecuațiile rotației:

$$P' = O + \overrightarrow{OP'} \rightarrow R_{Oy, \theta}(P') = R_{Oy, \theta}(O) + R_{\bar{j}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = R_{\bar{j}, \theta}(\overrightarrow{OP'}). \quad (101)$$

Matricea lui $R_{\bar{j}, \theta}$ în raport cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{\bar{j}, \theta}(\overrightarrow{OP'}) = x' \bar{i} + y' \bar{j} + z' \bar{k}. \quad (102)$$

Deci:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (103)$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$R_{Oy, \frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{2} + z \sin \frac{\pi}{2} \\ y' = y \\ z' = -x \sin \frac{\pi}{2} + z \cos \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = -x \end{cases} \quad (104)$$

Mai avem de determinat ecuațiile simetriei ortogonale față de planul π . Pentru aceasta considerăm $P''(x'', y'', z'') \in E$ și $P''(x'', y'', z'') = s_\pi P'$. Observăm următoarele:

$$\begin{cases} P'P'' \perp \pi \\ Oy \perp \pi \end{cases} \rightarrow P'P'' \parallel Oy \rightarrow \overrightarrow{P'P''} \parallel \bar{j} \quad (105)$$

Putem scrie ecuațiile dreptei $P'P''$:

$$P'P'' : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + t \\ z'' = z' \end{cases} \quad (106)$$

Determinăm valoarea parametrului t folosind faptul că este mijlocul segmentului $[P'P'']$ și se află în planul π . Din

$$P_0 \text{ mijlocul lui } [P'P''] \text{ obținem } P_0 \left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}, \frac{z' + z''}{2} \right) = \left(x', \frac{2y' + t}{2}, z' \right)$$

$$\text{Din } P_0 \in \pi \rightarrow \frac{2y' + t}{2} + 6 = 0 \rightarrow 2y' + t = -12 \rightarrow t = -12 - 2y'.$$

Ecuațiile simetriei devin:

$$S_\pi : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -12 - y' \\ z'' = z' \end{cases} \quad (107)$$

În final compunerea dintre cele două izometrii are ecuația:

$$S_\pi \circ R_{Oy, \frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x'' = z \\ y'' = -12 - y \\ z'' = -x \end{cases} \quad (108)$$