

Seminariile 1,2,3: spatiul liniar al vectorilor liberi; schimbari de baze.

1. Daca $ABCD$ este un paralelogram si $M \in CD$, calculati urmatoarele sume:

- (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
- (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$;
- (c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM}$;
- (d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}$;
- (e) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$;
- (f) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$.

2. Daca $ABCD$ este un paralelogram de centru O , sa se determine diferenta vectorilor:

- (a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$;
- (b) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{CB}$;
- (c) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB}$;
- (d) $(-\overrightarrow{DA}) - \overrightarrow{AB}$;
- (e) $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{DO}$;
- (f) $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{OB}$;
- (g) $(AD - (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}))$.

3. Fie $ABCD$ este un paralelogram de centru O . Sa se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel incat:

- (a) $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$; (b) $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{OA}$; (c) $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{CA}$; (d) $\overrightarrow{DB} = x\overrightarrow{OB}$.

4. Fie punctele A, B distincte. Spunem ca punctul M , diferit de A si B , imparte segmentul orientat \overrightarrow{AB} in raportul $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, daca $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$. Demonstrati atunci ca M imparte segmentul orientat \overrightarrow{AB} in raportul k daca si numai daca pentru orice punct O din plan/spatiu, avem

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}.$$

5. Notam prin \vec{r}_M vectorul de pozitie al unui punct arbitrar M in raport cu un reper oarecare fixat.

- (a) Fie punctele $A, B, P, A \neq B$. Atunci punctele A, B, P sunt coliniare daca si numai daca exista $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x + y = 1$ si $\vec{r}_P = x\vec{r}_A + y\vec{r}_B$.
- (b) Fie A, B, C, P cu A, B, C necoliniare. Atunci punctele A, B, C, P sunt coplanare daca si numai daca exista $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x + y + z = 1$ si $\vec{r}_P = x\vec{r}_A + y\vec{r}_B + z\vec{r}_C$.

6. Fie triunghiul ABC si punctele M, N, P definite prin

$$2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}, \quad 3\overrightarrow{NC} - 4\overrightarrow{NA} = \vec{0}, \quad 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

Demonstrati ca

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CN} = 4\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Deduceti ca M, P, N sunt coliniare. Construiti figura corespunzatoare.

7. Fie vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nenuli, necoliniari doi cate doi. Atunci exista un triunghi astfel incat vectorii asociati laturilor lor sunt intocmai $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ daca si numai daca $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}) \vee (\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}) \vee (\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}) \vee (\vec{c} + \vec{a} = \vec{b})$.
8. Demonstrati pe cale vectoriala teorema liniei mijlocii in triunghi: fie triunghiul ABC , M mijlocul lui (AB) , N mijlocul lui (AC) . Atunci $MN \parallel BC$ si $MN = \frac{BC}{2}$.
9. Notam cu PQ lungimea segmentului (PQ) , pentru orice puncte date P, Q . Daca $ABCD$ este un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ si E, F sunt mijloacele laturilor (AD) si (BC) , demonstrati pe cale vectoriala ca: a) $EF \parallel AB$ si $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$; b) daca $AC \cap EF = \{M\}$ si $BD \cap EF = \{N\}$, avem $AM = MC$, $EM = \frac{1}{2}DC$, $DN = NB$, $EN = \frac{1}{2}AB$ si $MN = \frac{1}{2}(AB - DC)$.
10. Fie E si F mijloacele laturilor (AD) si (BC) ale patrulaterului convex $ABCD$. Sa se arate ca : a) $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{EF}$; b) $EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$; c) $AB \parallel CD \Leftrightarrow 2EF = AB + CD$; d) daca $AB \parallel CD$, atunci mijloacele segmentelor (DC) , (EF) si (AB) sunt coliniare.
11. Intr-un cerc de centru O coardele (AB) si (CD) se intersecteaza ortogonal in P . Demonstrati ca $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 2\vec{PO}$.
12. Demonstrati pe cale vectoriala teorema lui Thales si reciproca ei: fie triunghiul ABC si punctele $M \in AB$, $N \in AC$, diferite de varfurile triunghiului. Atunci $MN \parallel BC$ daca si numai daca M si N impart segmentele orientate \vec{AB} si \vec{AC} in acelasi raport.
13. Fie triunghiul ABC .
- (a) Demonstrati concurenta medianelor triunghiului. Punctul lor de concurenta se noteaza cu G si se numeste centrul de greutate al triunghiului. Verificati ca $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, $\forall O \in (ABC)$.
- (b) Aratati ca exista un triunghi astfel incat vectorii asociati laturilor lor sunt egali cu vectorii determinati de medianele triunghiului ABC . Construiti efectiv un astfel de triunghi.
14. Numim mediana a unui tetraedru segmentul care uneste un varf cu centrul de greutate al fetei opuse. Bi-medianele unui tetraedru sunt segmentele ce unesc mijloacele a doua muchii opuse ale tetraedrului. Sa se demonstreze ca medianele si bimedianele unui tetraedru sunt concurente intr-un acelasi punct G , numit centrul de greutate al tetraedrului si ca $\vec{r}_G = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$. In plus, G se afla pe fiecare mediana la o patrime de baza si trei patrimi de varf.
15. Demonstrati pe cale vectoriala teorema bisectoarei interioare: dat triunghiul ABC si (AA') bisectoarea interioara a unghiului A , $A' \in (BC)$, atunci $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$. Folosind acest rezultat aratati ca bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente. Fie a, b, c lungimile laturilor (BC) , (CA) si respectiv (AB) . Aratati ca vectorul de pozitie al centrului cercului inscris in triunghi este

$$\vec{r}_I = \frac{1}{a + b + c} (a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C).$$

16. Fie triunghiul ABC si punctele A_1, B_1, C_1 , diferite de varfurile triunghiului, care impart segmentele orientate \vec{BC} , \vec{CA} si \vec{AB} in rapoartele k_1, k_2 si respectiv k_3 .
- (a) Demonstrati ca $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{CC_1}$ pot inchide un triunghi daca si numai daca $k_1 = k_2 = k_3$.
- (b) Daca $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului, gasiti conditii necesare si suficiente ca $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}, \vec{CC_1}$ sa inchida un triunghi.

17. (Teorema lui Menelaus si reciproca ei) Fie triunghiul $A_1A_2A_3$ si punctele B_1, B_2, B_3 , astfel incat $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda_1\overrightarrow{B_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \lambda_2\overrightarrow{B_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3B_3} = \lambda_3\overrightarrow{B_3A_1}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $i \in \overline{1, 3}$. Atunci punctele B_1, B_2, B_3 sunt coliniare daca si numai daca $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.
18. Fie triunghiul ABC si $\mathcal{V}^2 = \overline{(ABC)}$ planul vectorial asociat acestuia. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor (BC) , (CA) , respectiv (AB) .
- (a) Justificati ca $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ si $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}\}$ sunt baze in \mathcal{V}^2 . Determinati matricea de trecere de la \mathcal{B}_1 la \mathcal{B}_2 si verificati daca cele doua baze sunt la fel orientate.
- (b) Determinati coordonatele vectorilor \overrightarrow{BC} si $\overrightarrow{AA'}$ in raport cu cele doua baze, prin doua metode.
19. Fie Fie triunghiul ABC si $\mathcal{V}^2 = \overline{(ABC)}$. Consideram punctele M, P astfel incat $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$ si $\overrightarrow{PB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
- (a) Motivati ca $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\}$ si $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\}$ sunt baze in \mathcal{V}^2 . Determinati matricea de trecere de la \mathcal{B}_1 la \mathcal{B}_2 .
- (b) Daca G este centrul de greutate al triunghiului ABC , determinati coordonatele lui \overrightarrow{AG} in raport cu cele doua baze.
20. Fie $ABCD$ un tetraedru, B_1, C_1, D_1 centrele de greutate ale triunghiurilor ACD, ABD si respectiv ABC . Fie M mijlocul lui (AB) si N mijlocul lui (CD) .
- (a) Justificati ca $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ si $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{DD_1}\}$ sunt baze in \mathcal{V}^3 . Determinati matricea de trecere de la \mathcal{B}_1 la \mathcal{B}_2 si verificati daca cele doua baze sunt la fel orientate.
- (b) Determinati coordonatele lui \overrightarrow{MN} in raport cu cele doua baze.
21. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped.
- (a) Demonstrati ca AC' intersecteaza planul $(A'DB)$ in centrul de greutate al triunghiului $A'DB$.
- (b) Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\}$ si $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{C'G}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'D}\}$. Motivati ca \mathcal{B}_1 si \mathcal{B}_2 sunt baze. Determinati matricea e trecere de la \mathcal{B}_1 la \mathcal{B}_2 si coordonatele lui $\overrightarrow{B'C}$ in raport cu \mathcal{B}_2 .