

## Seminar cerc,sfera

Cadrul de lucru: un plan afin euclidian  $\mathcal{E}^2$  raportat la un reper cartezian ortonormat  $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$

1. Scrieti toate tipurile de ecuatii ale cercurilor de centru  $\Omega$  si raza  $R$  pentru

(a)  $\Omega(1, -2), R = 2;$

(b)  $\Omega(2, 0), R = 5;$

(c)  $\Omega(-3, -1), R = 1.$

2. Se dau ecuatiile unor cercuri. Determinati centrul si raza lor:

(a)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0;$

(b)  $2x^2 + 2y^2 - 8x + 3y - 72 = 0;$

(c)  $2x^2 + 2y^2 - 8x - 7y + 6 = 0;$

(d)  $x^2 + y^2 - 6x - 12y - 180 = 0.$

3. Sa se scrie ecuatiile cercurilor determinat prin:

(a) centrul  $\Omega(-2, 1)$  si un punct al sau  $A(1, 3);$

(b) extremitatile unui diametru  $A(-2, 3), B(0, 1);$

(c) centrul  $\Omega(1, 2)$  si tangenta la cerc  $(d) x + y + 1 = 0.$

4. (facultativ) Se da cercul  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ . Calculati puterile punctelor  $A(-2, 3), O(0, 0), B(2, 1)$  fata de cerc si deduceti pozitia fiecarui punct fata de cerc.

5. (facultativ) Fie cercurile

$$(\mathcal{S}_1) \quad x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$(\mathcal{S}_2) \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0,$$

$$(\mathcal{S}_3) \quad x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0.$$

Scrieti ecuatiile axelor radicale ale perechilor de cercuri si determinati centrul lor radical.

6. Fiind dat cercul  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  si punctul  $M(6, 2)$ , verificati ca  $M$  este exterior cercului si calculati lungimea segmentului  $[MT]$ , unde  $MT$  este tangenta cercului si  $T$  este punctul de contact.

7. Demonstrati ca dreptele urmatoare sunt tangente cercului  $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$  si sa se afle punctele de contact:

$$(d_1) \quad 2x - y = 0,$$

$$(d_2) \quad x + 2y - 5 = 0,$$

$$(d_3) \quad x - 2y - 1 = 0.$$

8. Se da cercul  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ .

(a) Scrieti ecuatiile tangentei in punctul  $M(3, 4)$ .

(b) Determinati ecuatiile tangentelor la cerc paralele cu dreapta  $(\delta) 3x - 4y - 1 = 0$ .

(c) Scrieti ecuatiile tangentelor duse din punctul exterior  $P(7, 1)$  la cerc.

9. Se da cercul  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ . Scrieti ecuatiile tangentelor la cerc care

- (a) trec prin  $A(0, 1 + \sqrt{3})$ ;
- (b) trec prin  $B(3, 5)$ ;
- (c) sunt paralele cu dreapta (d)  $3x - y + 1 = 0$ .

---

Pentru problemele urmatoare cadrul de lucru este un spatiu afin euclidian  $\mathcal{E}^3$  raportat la un reper cartezian ortonormat  $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .

1. Scrieti ecuatiile sferei determinate de conditiile:

- (a) are centrul  $\Omega(2, -1, 3)$  si raza  $R = 6$ ;
- (b) are centrul in origine si trece prin  $B(6, -2, 3)$ ;
- (c) are centrul  $\Omega(1, 4, -7)$  si este tangenta planului  $(\pi) 6x + 6y - 7z + 42 = 0$ ;
- (d) are centrul  $\Omega(6, -8, 3)$  si este tangenta axei  $Oz$ .

2. Determinati centrul si raza urmatoarelor sfere:

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ ;
- (b)  $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 5z + 8 = 0$ ;
- (c)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + y - 2z = 0$ .

3. Determinati ecuatiile unei sfere de raza  $R = 5$  tangenta planului  $(\pi) x + 2y - 2z + 3 = 0$  in  $A(1, 1, 3)$ .

4. Determinati raza sferei tangente simultan planelor  $(\pi_1) 3x + 2y - 6z - 15 = 0$  si  $(\pi_2) 3x + 2y - 6z + 55 = 0$ .

5. Fie sfera  $(S) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$  si punctele  $A(2, 4, 5)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  pe sfera. Scrieti ecuatiile planelor tangente sferei in aceste puncte.

6. Fie sfera  $(S) (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - 25 = 0$  si planele  $(\pi_1) 2x - 2y + z = 0$ ,  $(\pi_2) 3x + 4y - 12z = 0$ . Scrieti ecuatiile planelor tangente sferei, paralele respectiv cu  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ .

7. Determinati centrul si raza cercului 
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

8. Fie sfera  $(S) x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y - 6z + 1 = 0$ . Determinati ecuatiile sectiunilor facute de planele de coordonate in sfera, apoi aflati centrele si razele acestor sectiuni.

9. Scrieti ecuatiile unei sfere stiind ca ea trece prin  $A(0, 3, 1)$  si intersecteaza planul  $(xOy)$  dupa cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

10. Determinati locul geometric al punctelor care au aceeasi putere fata de sferele

$$(S_1) (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9, (S_2) (x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16.$$

11. Determinati locul geometric al punctelor care au aceeasi putere fata de sferele  $(S_1) x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y + 21 = 0$ ,  $(S_2) x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 = 0$ ,  $(S_3) x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8z + 8 = 0$ . Verificati ca este o dreapta perpendiculara pe planul ce trece prin centrele celor trei sfere, chiar in centrul cercului circumscris triunghiului determinat de aceste centre.