

Seminar Elipsa

13 aprilie 2021

Partea I

Exerciții rezolvate

Exercițiul 1. Pentru următoarele elipse, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor, apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil. De asemenea, scrieți celelalte tipuri de ecuații pentru elipsă.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$

3. $4x^2 + 5y^2 - 20 = 0$

4. $2x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

5. $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 13 \sin t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Demonstrație. 1. **Elipsă**

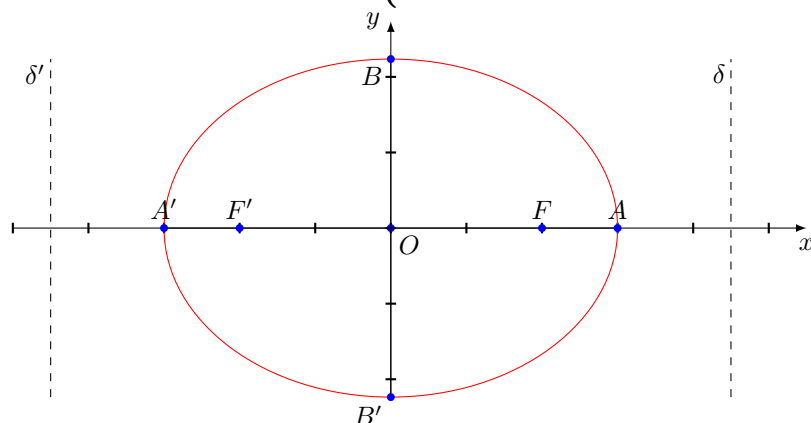
Semiaxe sunt $a = 3, b = \sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|9 - 5|} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow$

Vârfurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(3, 0), A'(-a, 0) = A'(-3, 0), B(0, b) = B(0, \sqrt{5}), B'(0, -b) = B'(0, -\sqrt{5}).$

$a > b \Rightarrow$ axa focală este $Ox \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(2, 0), F'(-2, 0).$

Excentricitatea este $e = \frac{c}{\max(a, b)} = \frac{2}{3}.$

Ecuațiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{\max(a, b)^2}{c} \iff \delta : x = \frac{9}{2} \\ \delta' : x = -\frac{\max(a, b)^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{9}{2}. \end{cases}$



Aducând la același numitor, obținem **ecuația generală** $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0.$

Izolând termenul y^2 , obținem $y^2 = \frac{5}{9}(9 - x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 3],$ ceea ce reprezintă **ecuațiile explicite.**

Ecuațiile parametriche sunt date de $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = \sqrt{5} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{cases}$

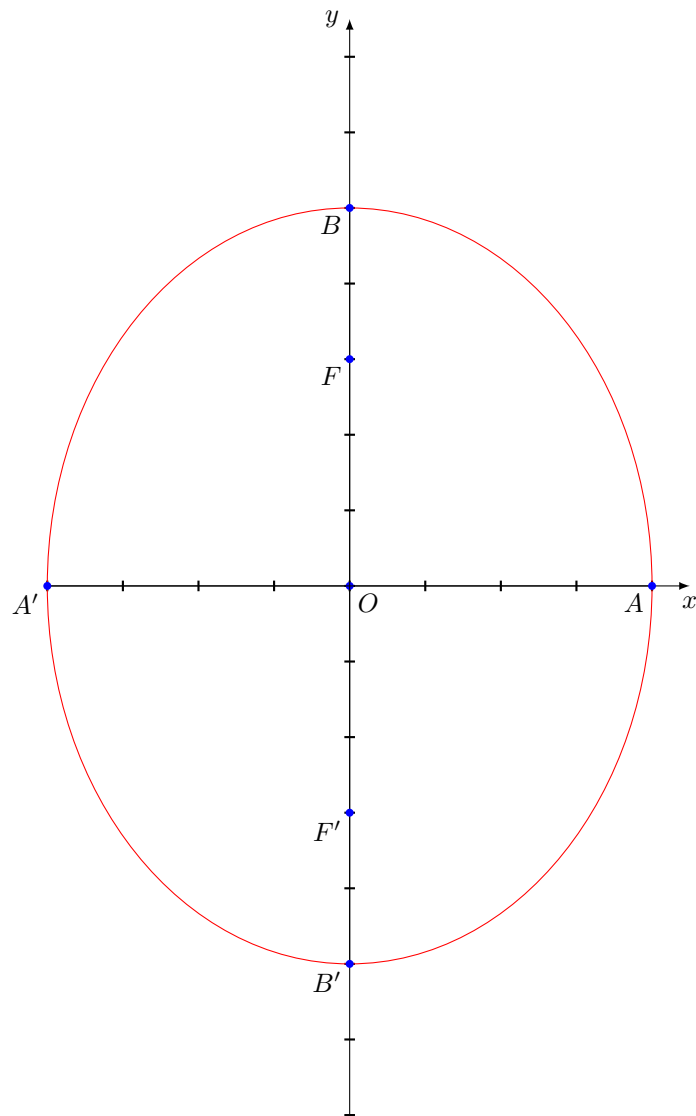
2. **Elipsă**

Semiaxe sunt $a = 4, b = 5 \Rightarrow c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|16 - 25|} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$

Vârfulurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(4, 0), A(-a, 0) = A(-4, 0), B(0, b) = B(0, 5), B(0, -b) = B(0, -5)$.
 $a < b \Rightarrow$ axa focală este $Oy \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(0, 3), F'(0, -3)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{\max(a,b)} = \frac{3}{5}$.

Ecuțiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : y = \frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta : x = \frac{25}{3} \\ \delta' : y = -\frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{25}{3}. \end{cases}$



Aducând la același numitor, obținem **ecuația generală** $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$.

Isolând termenul y^2 , obținem $y^2 = \frac{25}{16}(16 - x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}, x \in [-4, 4]$, ceea ce reprezintă **ecuațiile explicite**.

Ecuțiile parametrice sunt date de $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{cases}$

3. Elipsă

Pentru a putea reprezenta grafic elipsa, îi determinăm întâi ecuația canonică.

Ne propunem ca termenul liber să fie 1 și obținem **ecuația canonică** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

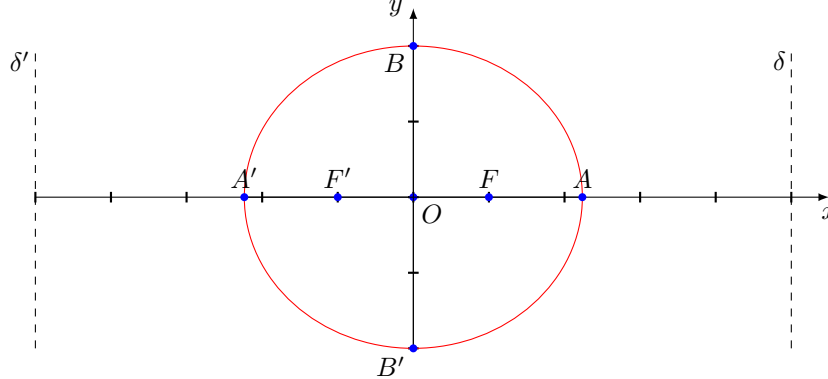
Semiaxele sunt $a = \sqrt{5}, b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|5 - 4|} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

Vârfulurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(\sqrt{5}, 0), A'(-a, 0) = A'(-\sqrt{5}, 0), B(0, b) = B(0, 2), B'(0, -b) = B'(0, -2)$.

$a > b \Rightarrow$ axa focală este $Ox \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(1, 0), F'(-1, 0)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{\max(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ecuțiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta : x = \frac{5}{1} \\ \delta' : x = -\frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{5}{1}. \end{cases}$



Izolând termenul y^2 , obținem $y^2 = \frac{4}{5}(5 - x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5 - x^2}, x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, ceea ce reprezintă **ecuațiile explicite**.

Ecuțiile parametriche sunt date de $\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{cases}$

4. Elipsă

Pentru a o putea reprezenta grafic, îi deducem ecuația canonică: $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0$.

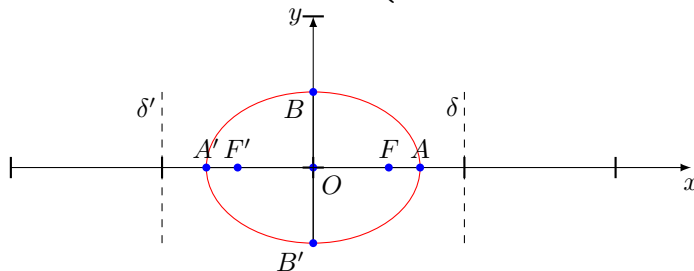
Semiaxele sunt $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}|} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Vârfurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), A'(-a, 0) = A'(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), B(0, b) = B(0, \frac{1}{2}), B'(0, -b) = B'(0, -\frac{1}{2})$.

$a > b \Rightarrow$ axa focală este $Ox \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(\frac{1}{2}, 0), F'(-\frac{1}{2}, 0)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{\max(a,b)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ecuțiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta : x = \frac{2}{2} = 1 \\ \delta' : x = -\frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{2}{2} = -1. \end{cases}$



Izolând termenul y^2 , obținem $y^2 = \frac{2}{4}(\frac{1}{2} - x^2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - x^2), x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, ceea ce reprezintă **ecuațiile explicite**.

Ecuțiile parametriche sunt date de $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{cases}$

5. Elipsă

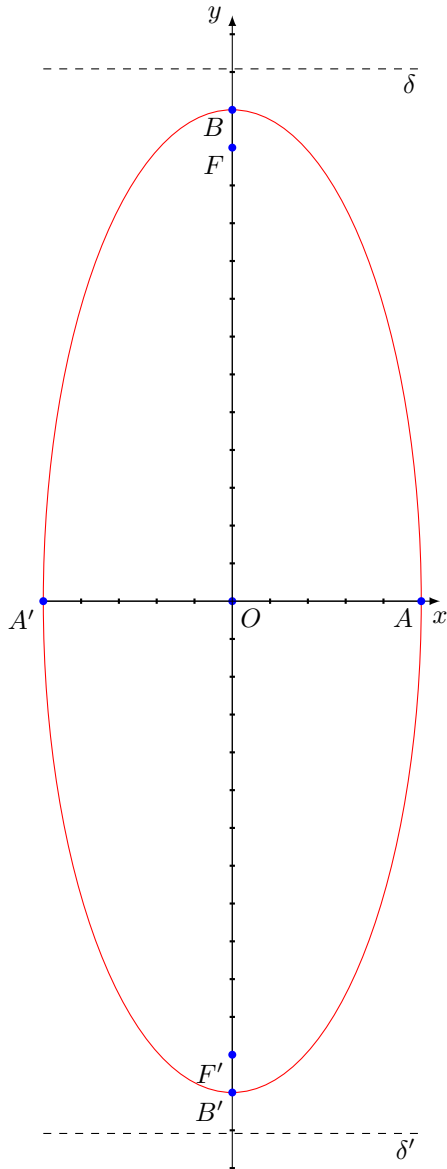
Semiaxele sunt $a = 5, b = 13 \Rightarrow c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|25 - 169|} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow$

Vârfurile elipsei sunt $A(a, 0) = A(5, 0), A(-a, 0) = A(-5, 0), B(0, b) = B(0, 13), B(0, -b) = B(0, -13)$.

$a < b \Rightarrow$ axa focală este $Oy \Rightarrow$ **Focarele** sunt $F(0, 12), F'(0, -12)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{\max(a,b)} = \frac{12}{13}$.

Ecuțiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : y = \frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta : y = \frac{169}{12} \\ \delta' : y = -\frac{\max(a,b)^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{169}{12}. \end{cases}$



Aducând la același numitor, obținem **ecuația generală** $169x^2 + 25y^2 - 4225 = 0$.

Izolând termenul y^2 , obținem $y^2 = \frac{169}{25}(25 - x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{13}{5}\sqrt{25 - x^2}, x \in [-5, 5]$, ceea ce reprezintă **ecuațiile explicite**.

□

Exercițiul 2. Scrieți ecuațiile elipsei cu focarele $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$, ce trece prin $M(4, 1)$ și apoi reprezentați-o grafic:

Demonstrație. Fie \mathcal{E} elipsa cu focarele F, F' și $M \in \mathcal{E}$.

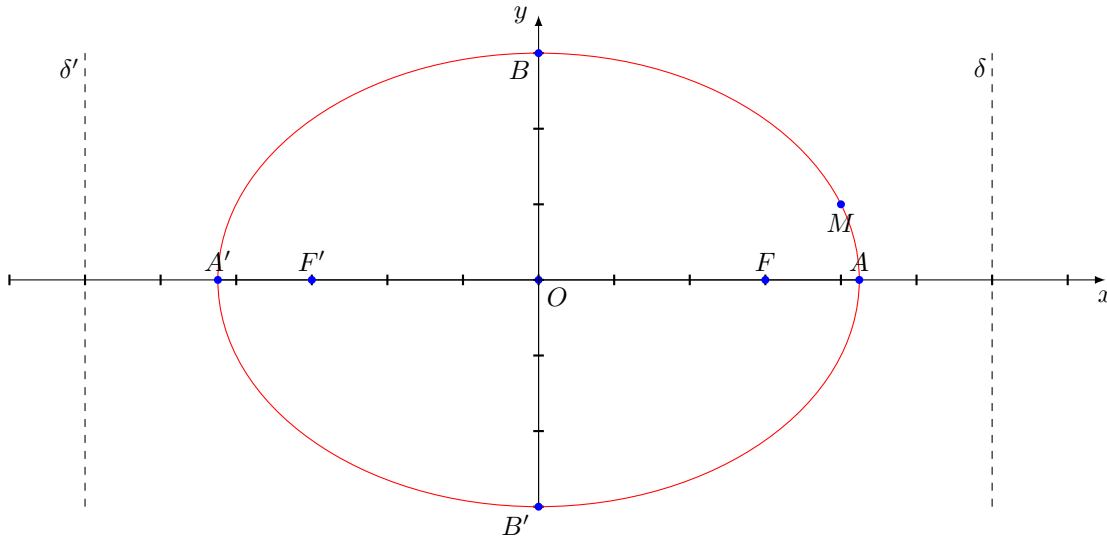
Ecuația canonică: Fie ecuația elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Deoarece $F, F' \in Ox \Rightarrow (a > b) \wedge c = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9$. Ecuația elipsei devine: $\frac{x^2}{9+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{E}} \frac{16}{9+b^2} + \frac{1}{b^2} =$

$1 \Rightarrow 16b^2 + 9 + b^2 = (9 + b^2)b^2 \Rightarrow b^4 - 8b^2 - 9 = 0 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$. Ecuația devine: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Alternativ

Deoarece $F, F' \in Ox \Rightarrow (a > b) \wedge c = 3$. Elipsa este locul geometric al punctelor M astfel încât $d(M, F) + d(M, F') = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow 2a = \sqrt{(4-3)^2 + 1^2} + \sqrt{(4+3)^2 + 1^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow b = 3$.



Exercițiul 3. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$.

1. Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(\frac{16}{5}, 3)$ la elipsă.
2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = 3x + 2$.
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctele exterioare $Q(3, 4), P(4, 5)$.

Reprezentați elipsa și tangentele cerute.

Demonstrație. 1. Ecuația tangentei dintr-un punct al elipsei se obține prin dedublare: $\frac{x \cdot \frac{16}{5}}{16} + \frac{y \cdot 3}{25} - 1 = 0 \iff \frac{x}{5} + \frac{y \cdot 3}{25} - 1 = 0 \iff 5x + 3y - 25 = 0 \iff y = \frac{25}{3} - \frac{5x}{3}$.
Normala este perpendiculară pe tangentă, deci are panta $\frac{3}{5} \Rightarrow$ ecuația ei este $(n)y - 3 = \frac{3}{5}(x - \frac{16}{5})$.

2. Identificăm semiaxele elipsei: $a = 4, b = 5$. Ecuațiile magice ale tangentelor de pantă $m = 12.5$ sunt $(t_{1,2}) : y = mx \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2} \iff y = 3x \pm 13$.

3. Scriem ecuațiile tangentelor de pantă dată sunt $y = mx \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}$. Punem condiția ca $P(x_0, y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y_0 - mx_0)^2 = m^2 a^2 + b^2 \Rightarrow m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0 y_0 + b^2 - y_0^2 = 0$.

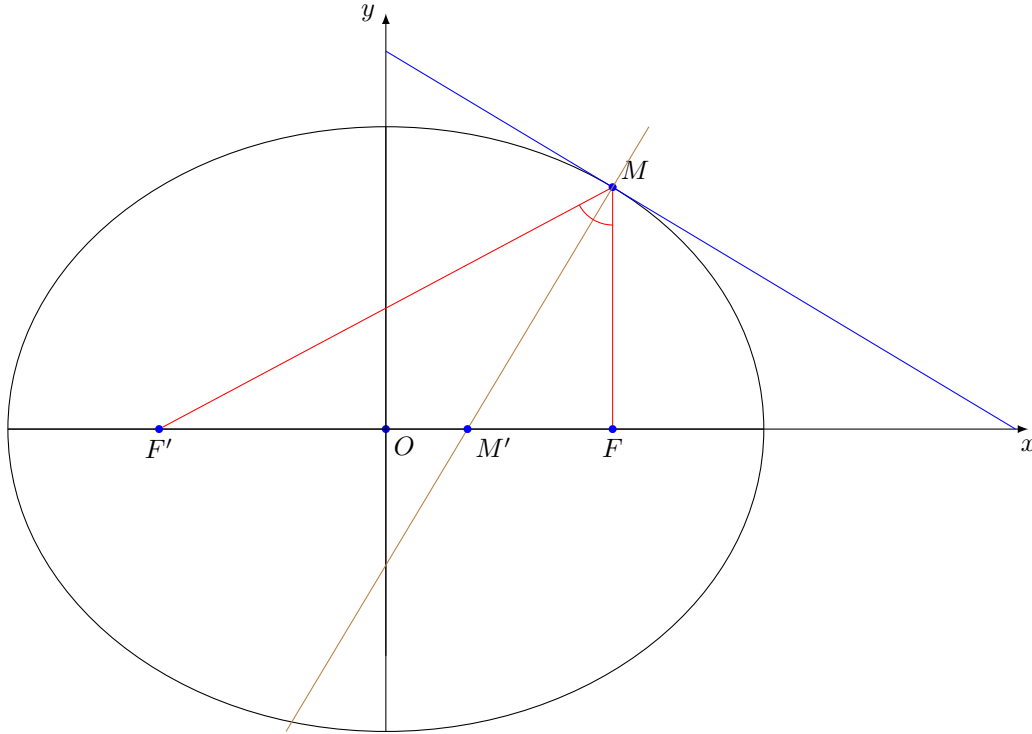
În cazul de față, pentru Q , obținem: $m^2(16 - 9) + 24m + (25 - 16) = 0 \Rightarrow 7m^2 + 24m + 9 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{81}}{7} = \frac{-12 \pm 9}{7} \Rightarrow m_1 = -3, m_2 = -\frac{3}{7}$.

Ecuațiile tangentelor devin $y - 4 = -3(x - 3) \iff 3x + y - 13 = 0$ și $y - 4 = -\frac{3}{7}(x - 3) \iff 7y + 3x - 37 = 0$. Pentru P ecuația devine una de gradul I cu rădăcina 0, deci aparent am obținut o singură tangentă. Cu toate acestea, dintr-un punct exterior există două tangente.

Pentru a deduce cealaltă pantă, scriem dreapta contactelor: $100x + 80y - 400 = 0 \iff 5x + 4y - 20 = 0 \iff y = 5(1 - \frac{1}{4}x)$. Înlocuind în ecuația elipsei, obținem $\frac{x^2}{16} + (1 - \frac{1}{4}x)^2 = 1 \iff \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow T_1(0, 5), T_2(4, 0)$.

Cele două tangente sunt așadar $PT_1 : y = 5, PT_2 : x = 4$.

Exercițiul 4. (Proprietatea optică a elipsei) Tangenta și normala la elipsă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea exterioară și bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{FMF'}$.



Demonstrație. Fie ecuația canonică a elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$. Dacă $M \in Ox$, problema este evidentă. Altfel, ecuația normalei prin $M(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0)$. Intersectăm normala cu axa Ox . Obținem punctul M' : $-b^2 x_0 y_0 = a^2 y_0 (x - x_0) \Rightarrow x = x_0 e^2$. Obținem $FM' = c - e^2 x_0$ și $F'M' = e^2 x_0 + c$. Pe de altă parte, $MF = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}$ și $MF' = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}$. Au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{FM}{F'M} &= \frac{\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{\sqrt{(x_0 - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)}}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)}} = \frac{\sqrt{a^2 x_0^2 + a^2 c^2 - 2a^2 c x_0 + b^2 a^2 - b^2 x_0^2}}{\sqrt{a^2 x_0^2 + a^2 c^2 + 2a^2 c x_0 + b^2 a^2 - b^2 x_0^2}} = \frac{\sqrt{c^2 x_0^2 - 2a^2 c x_0 + a^4}}{\sqrt{c^2 x_0^2 + 2a^2 c x_0 + a^4}} \\ &= \frac{FM'}{F'M'} \end{aligned}$$

Găsiți și alte demonstrații. □

Exercițiul 5. *Dată o elipsă, se consideră triunghiurile $M_1 M_2 M_3$ înscrise în elipsă, astfel încât centrul lor de greutate să coincidă cu centrul de simetrie O al elipsei. Demonstrați că normalele în vârfurile triunghiului la elipsă sunt concurente (T. Steiner).*

Demonstrație. Fie elipsa \mathcal{E} de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$) și $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3) \in \mathcal{E}$ astfel încât $G_{\triangle ABC} = O(0, 0)$.

Au loc egalitățile

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Înlocuind din ultimele 2 ecuații coordonatele celui de-al treilea vârf, obținem:

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x_1 x_2}{a^2} + \frac{2y_1 y_2}{b^2} = -1 \Rightarrow 2(\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) = -1 \Rightarrow \cos(t_1 - t_2) = -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

Ecuațiile normalelor în cele trei vârfuri sunt date de:

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \\ y - y_2 = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} (x - x_2) \\ y - y_3 = \frac{a^2 y_3}{b^2 x_3} (x - x_3) \end{cases} \iff \begin{cases} (y - y_1)b^2 x_1 = a^2 y_1 (x - x_1) \\ (y - y_2)b^2 x_2 = a^2 y_2 (x - x_2) \\ (y - y_3)b^2 x_3 = a^2 y_3 (x - x_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 y_1 x - b^2 x_1 y + (b^2 - a^2) y_1 x_1 = 0 \\ a^2 y_2 x - b^2 x_2 y + (b^2 - a^2) y_2 x_2 = 0 \\ a^2 y_3 x - b^2 x_3 y + (b^2 - a^2) y_3 x_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Pentru ca cele trei normale să se intersecteze este suficient ca sistemul dat de ecuațiile celor trei drepte să aibă soluție. Știind că cele trei drepte nu sunt simultan paralele, este suficient să verificăm că determinantul sistemului este egal cu zero.

Determinantul sistemului egal cu 0 este echivalent cu:

$$\begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 & (b^2 - a^2) y_1 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 & (b^2 - a^2) y_2 x_2 \\ a^2 y_3 & -b^2 x_3 & (b^2 - a^2) y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 & (b^2 - a^2) y_1 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 & (b^2 - a^2) y_2 x_2 \\ a^2 y_3 & -b^2 x_3 & (b^2 - a^2) y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 & x_1 + x_2 + x_3 & y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 x_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 x_2 \\ 0 & 0 & y_1 x_1 + y_2 x_2 + (y_1 + y_2)(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$[2(y_1 x_1 + y_2 x_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)](x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0$$

$$[2(\sin t_1 \cos t_1 + \sin t_2 \cos t_2) + (\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1)](\cos t_2 \sin t_1 - \cos t_1 \sin t_2) = 0.$$

Vrem să demonstrăm că $2(\sin t_1 \cos t_1 + \sin t_2 \cos t_2) + (\cos t_1 \sin t_2 + \cos t_2 \sin t_1) = 0 \iff 2 \sin \frac{t_2 + t_1}{2} \cdot (2 \cos(t_2 - t_1) + 1) \cos \frac{t_2 + t_1}{2} = 0$, care este adevărat, din 2.

Alternativ, se poate demonstra că înălțimile triunghiului sunt normalele la elipsă în vârfuri. \square

Partea II

Teme

Exercițiul 6. Pentru următoarele elipse, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directe, apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil. De asemenea, scrieți celelalte tipuri de ecuații pentru elipsă.

- $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$
- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0;$
- $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0;$
- $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0;$
- $9x^2 + 25y^2 - 1 = 0;$
- $\begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = 10 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases}$

Scrieți ecuațiile elipselor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

- elipsa cu vârfurile $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, ce trece prin punctul $M(3, 2)$;
- elipsa cu vârfurile $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, tangentă dreptei $(d) x + 2y - 6 = 0$;
- elipsa de focare $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$, tangenta dreptei $(d) 2x + 3y - 9 = 0$.

Exercițiul 7. Fie elipsa $(\mathcal{E}) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

- Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ la elipsă.
- Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta $y = 2x + 3$.
- Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctele exterioare $P(3, 1)$, $Q(2, 3)$.

Reprezentați elipsa și tangentele.

Exercițiul 8. Fie elipsa $(\mathcal{E}) x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

- Determinați ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ la elipsă.

2. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă, paralele cu normala în M la elipsă.

3. Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă duse din punctul exterior $P(\sqrt{3}, -1)$.

Reprezentați elipsa și tangentele.

Exercițiul 9. Demonstrați că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă este cercul circumscris dreptunghiului circumscris elipsei: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (cercul lui Monge al elipsei).