Seminar 10: Geometrie euclidiană

Hiperbole pe ecuaţii reduse

Cuprins

Partea I
Breviar teoretic

1 Definiţie şi construcţie

1.1 Definiţie

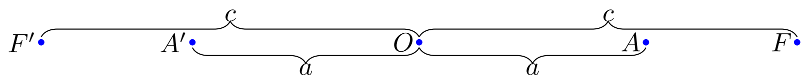
Cadrul de lucru este un plan afin euclidian orientat $\mathcal{E}^2 = \left(E, \left(\overrightarrow{E}, \langle,\rangle\right), \Phi\right)$.

Definiţia 1. Se consideră două puncte distincte $F, F' \in E$ cu $d(F, F') = 2c > 0$ şi un număr real a astfel încât $0 < 2a < 2c$. Se numeşte **hiperbolă** locul geometric al punctelor planului E pentru care diferenţa distanţelor la punctele fixe F, F' este constantă şi egală cu $2a$:

$$\mathcal{H} = \left\{P \in E \mid d(P, F) + d(P, F') = 2a\right\}. \tag{1}$$

Punctele F, F' se numesc **focarele** hiperbolei, dreapta FF' **axa focală** şi $2c$ **distanţa focală**.

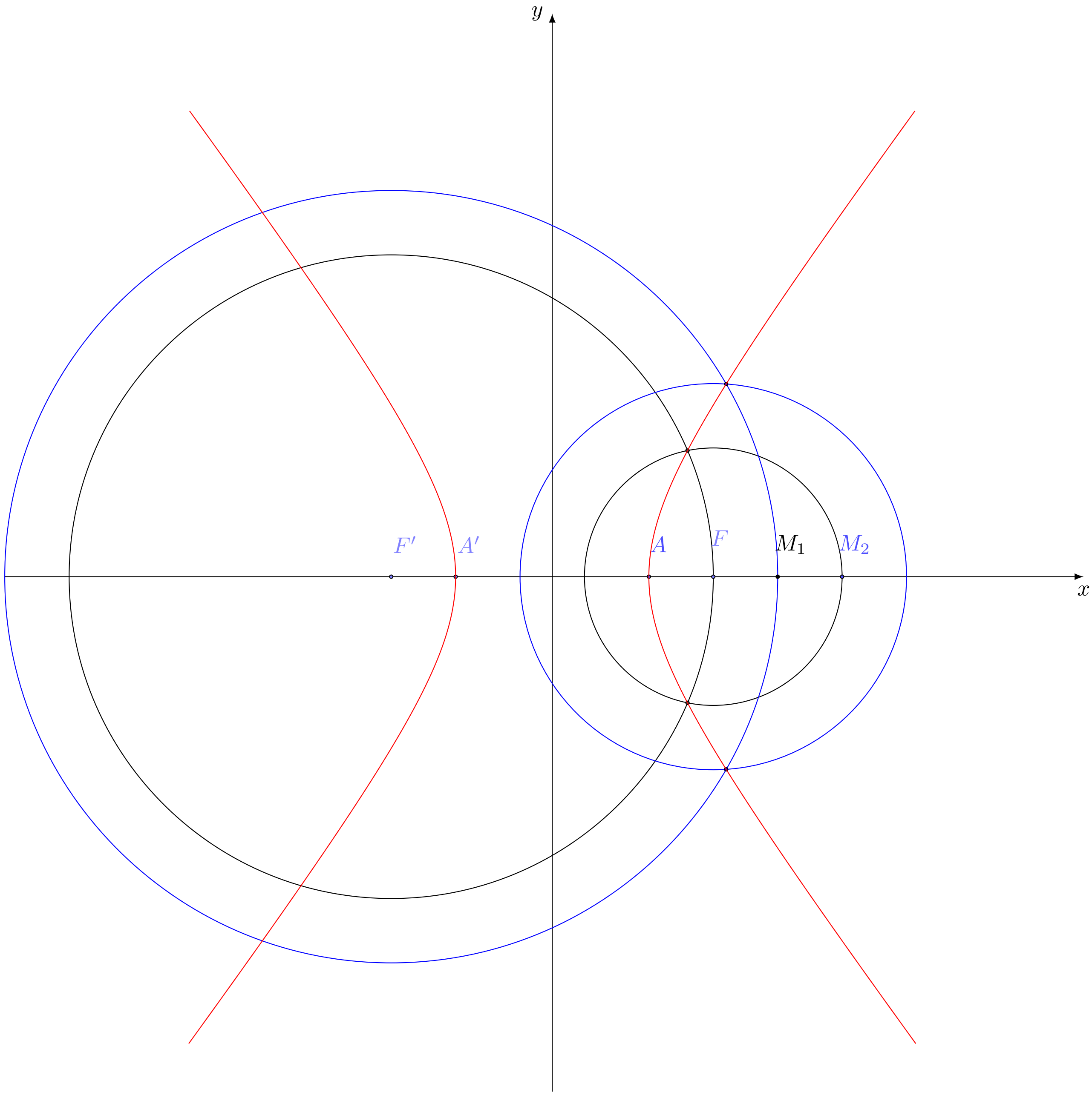
Pentru a ne convinge că locul geometric definit anterior este o mulţime nevidă, fie O mijlocul segmentului (FF'), fie A, $A' \in FF'$ astfel încât $d(O, A) = d(O, A') = a$ şi $F' - A' - O - A - F$.



Vrem să demonstrăm că $A, A \in \mathcal{H}$:
$|d(A,F) - d(A,F')| = |(c-a) - (c+a)| = |-2a| = 2a$,
$|d(A',F) - d(A',F')| = |(c+a) - (c-a)| = |2a| = 2a$.
Aşadar $A, A' \in \mathcal{H}$. Aceste două puncte A, A' se numesc **vârfurile hiperbolei**.

1.2 Construcţie

Pentru a construi hiperbola prin puncte, procedăm astfel: alegem un punct arbitrar M pe axa focală, în afara segmentului (FF'), apoi intersectăm cercul de centru F şi rază AM cu cercul de centru F' şi rază $A'M$. Evident punctele obţinute aparţin hiperbolei.



Dacă dorim să construim mecanic o porţiune din hiperbolă, procedăm astfel. Alegem două fire inextensibile de lungimi diferite, astfel încât diferenţa lungimilor lor să fie $2a$. Fixăm câte un capăt al fiecărui fir în câte un focar, trecem ambele fire printr-un inel fixat în vârful P al unui creion, apoi înnodăm capetele libere ale firelor. Întindem ambele fire, ţinând nodul N într-o mână şi creionul cu vârful pe foaie în cealaltă mână. Porţiunile de fire întinse între nodul N şi inelul P vor sta alăturate, iar celelalte porţiuni din fire vor merge una de la inel la F, cealaltă de la inel la F'. Mişcând creionul, vom trasa o porţiune dintr-o ramură a hiperbolei, deoarece diferenţa $d(P,F')-d(P,F)$ este aceeaşi ca diferenţa lungimilor firelor întregi (din fiecare s-a scos aceeaşi bucata PN). Dacă fixăm invers în cele două focare extremităţile firelor, obţinem o porţiune din cealaltă ramură a hiperbolei.

Link Tutorial construcţie

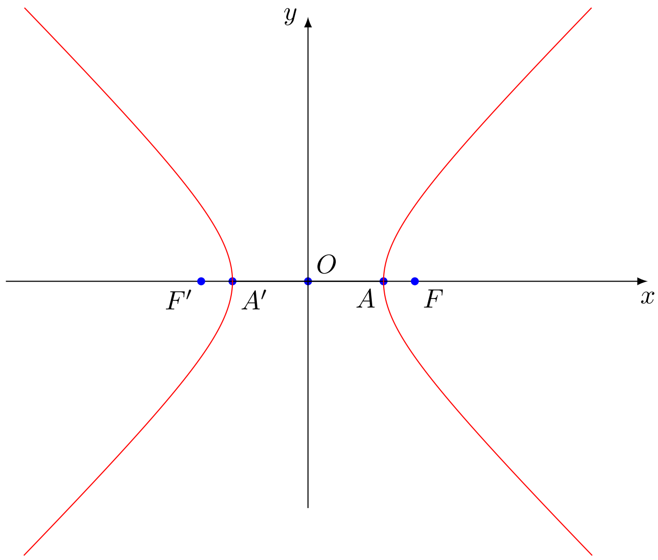
2 Ecuaţiile hiperbolei

Pentru a putea determina ecuatiile hiperbolei vom fixa un reper ortonormat, ca şi în cazul elipsei:

- originea va fi O, mijlocul segmentului (FF'),
- $\bar{i} = \frac{1}{\|\overrightarrow{F'F}\|}\overrightarrow{F'F}$ si $\bar{j} \perp \bar{i}$, $\| \bar{j} \| = 1$ astfel încât $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ e o bază pozitivă.

Notăm cu (Ox) şi (Oy) axele de coordonate.

În raport cu acest reper punctele construite până acum au coordonatele $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$.



2.1 Ecuaţia canonică

Fie $P(x,y)$ un punct al hiperbolei. Atunci

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Din calcule, obţinem ecuaţia canonică a hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

unde

$$b = \sqrt{c^2-a^2}. \tag{3}$$

Demonstraţie.

- Păstrăm un singur radical în membrul stâng al egalităţii:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow$$

- Ridicăm ambii membri la pătrat:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow$$

- Efectuăm calculele:

$$x^2+c^2-2xc+y^2 = 4a^2+x^2+c^2+2xc+y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \iff$$

- Reducem termenii asemenea:

$$x^2 + c^2 - 2xc + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2xc + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \iff$$

$$-2xc = 2xc + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \iff$$

- Izolăm din nou un radical şi obţinem:

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4xc + 4a^2 \iff$$

$$\pm\, a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2 \Rightarrow \tag{4}$$

- Ridicăm din nou la pătrat ambii membri ai egalităţii:

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (cx + a^2)^2$$

- Efectuăm calculele:

$$a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2) = c^2x^2 + a^4 + 2cxa^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 + 2cxa^2$$

- Reducem termenii asemenea:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4$$

- Izolăm toţi termenii într-un membru:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

- Înlocuind în această ecuaţie $c^2 - a^2 = b^2$: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
- Împărţind ambii membri la a^2b^2: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
- Obţinem ecuaţia canonică a hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Reciproc, putem să arătăm că orice punct ale cărui coordonate verifică ecuaţia (2) aparţine hiperbolei.

Fie $P_0(x_0, y_0)$, cu

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Notăm $|d(P_0, F') - d(P_0, F)| = 2a'$. Repetând calculele anterioare, deducem

$$\frac{x_0^2}{(a')^2} - \frac{y_0^2}{(b')^2} = 1, \tag{7}$$

unde am notat $b' = \sqrt{c^2 - (a')^2}$.

Scăzând relaţiile (6) şi (7), combinând convenabil termenii, obţinem $x_0^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a')^2}\right) - y_0^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{(b')^2}\right) = 0$.
Dar $(b')^2 + (a')^2 = b^2 + a^2$, deci $\left(a'\right)^2 - a^2 = -((b')^2 - b^2)$, de unde rezultă $\left(\left(a'\right)^2 - a^2\right)\left(\frac{x_0^2}{(a')^2a^2} + \frac{y_0^2}{(b')^2b^2}\right) = 0$.
Din (6) rezultă că x_0 şi y_0 nu sunt simultan 0, deci $\left(a'\right)^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a' = a \Rightarrow |d(P_0, F') - d(P_0, F)| = 2a$, deci P_0 aparţine hiperbolei. $\square$

Numărul **a** se numeşte **semiaxa mare**, iar **b semiaxa mică**. Observăm că nu avem neapărat $a > b$, denumirea datorându-se importanţei lui a în definirea hiperbolei.
Din ecuaţia canonică a hiperbolei rezultă:

- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_1(-x, y) \in \mathcal{H}$, deci Oy este **axă de simetrie** pentru hiperbolă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_2(x, -y) \in \mathcal{H}$, deci Ox este **axă de simetrie** pentru hiperbolă;
- dacă $Q(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow Q_3(-x, -y) \in \mathcal{H}$, deci O este **centru de simetrie** pentru hiperbolă.

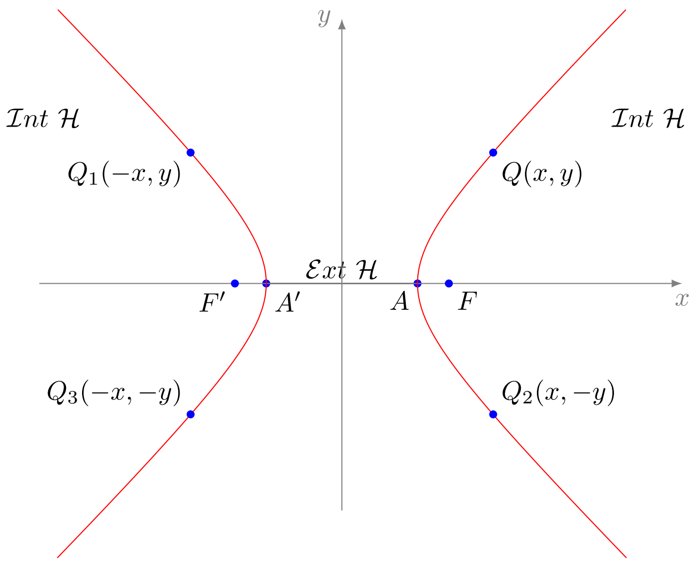
Definim interiorul hiperbolei

$$\mathcal{I}nt\ \mathcal{H} = \left\{ P(x,y)\ \mid\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0 \right\}$$

şi exteriorul hiperbolei

$$\mathcal{E}xt\ \mathcal{H} = \left\{ P(x,y)\ \mid\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0 \right\}.$$

Din ecuaţia canonică mai observăm că doar axa Ox taie hiperbola, nu şi axa Oy. Deci, spre deosebire de elipsă, hiperbola are doar două vârfuri.



2.2 Ecuaţiile explicite

Din (2) deducem că $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$.

Observăm că pentru ca un punct $P(x,y)$ să aparţină hiperbolei de semiaxă mare a, este necesar ca $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. În aceste condiţii, extrăgând radicalul în egalitatea de mai sus, obţinem

$$|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

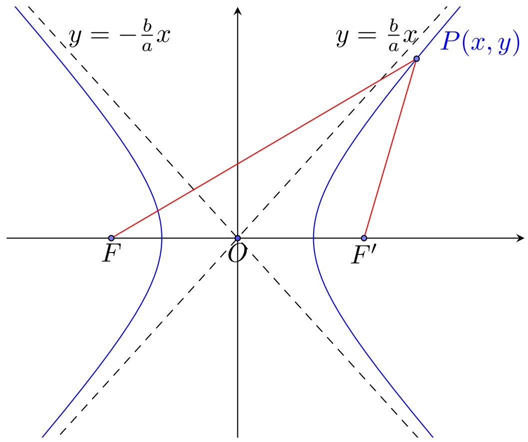
Astfel, pentru $y \geq 0$, avem $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, iar pentru $y < 0$, avem $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Folosindu-ne de aceste ecuaţii putem reprezenta grafic hiperbola. Observăm că dreptele

$$(a_1)\, y = \frac{b}{a}x,\ \ (a_2)\, y = -\frac{b}{a}x$$

sunt asimptote oblice pentru hiperbolă.

Demonstraţie. Considerăm $f_1 : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.
Calculăm limita
$\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) - \dfrac{b}{a}x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{b}{a}x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b}{a}\dfrac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = -\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ba}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$, deci (a_1) este asimptotă oblică la $+\infty$ a ramurii superioare a hiperbolei la ∞.
Analog, (a_1) este asimptotă oblică la $-\infty$ a ramurii inferioare a hiperbolei.
Similar (a_2) este asimptotă oblică a hiperbolei la $\pm\infty$. $\square$

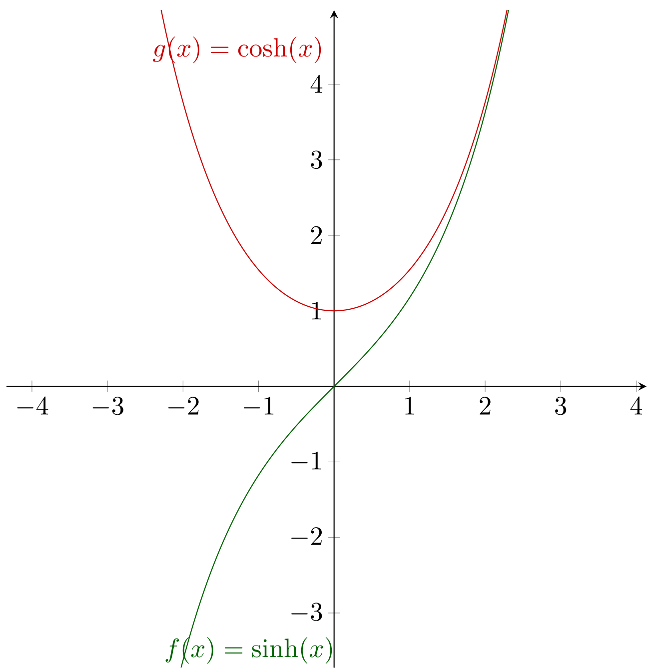


2.3 Ecuaţiile parametrice

Reamintim definiţia funcţiilor trigonometrice cosinus hiperbolic şi sinus hiperbolic:

$$\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty), \ \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$



Deoarece $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă că putem parametriza ramura $x \leq -a$ a hiperbolei prin

$$\begin{cases} x = -a\cosh(t), \\ y = b\sinh(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

iar ramura $x \geq a$ prin

$$\begin{cases} x = a\cosh(t), \\ y = b\sinh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3 Directoarele hiperbolei

Să revenim la ecuaţia hiperbolei pe care o rescriem

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|x - \frac{a^2}{c}\right|, \ x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \Leftrightarrow$$

$$d(P,F) = ed(P,\delta),$$

unde $P(x,y)$ e un punct arbitrar al hiperbolei, $e = \frac{c}{a}$ şi $\delta:\ x = \frac{a^2}{c}$.

Orice punct P al elipsei are proprietatea că raportul dintre distanţa de la P la punctul fix F' şi distanţa de la P la dreapta fixă δ' este constant şi egal cu e.

Deci orice punct P al hiperbolei are proprietatea că raportul dintre distanţa de la P la punctul fix F şi distanţa de la P la dreapta fixă δ este constant şi egal cu e.

Analog se poate obţine că $d(P,F') = ed(P,\delta')$, cu $\delta:\ x = -\frac{a^2}{c}$. Numim $e = \frac{c}{a} \in (0,1)$ **excentricitatea** hiperbolei, iar dreptele δ, δ' **directoarele** hiperbolei.

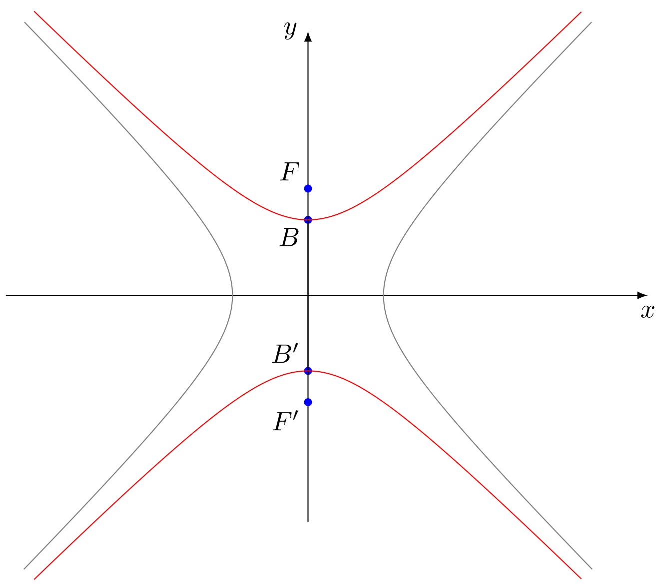
4 Hiperbola conjugată unei hiperbole date

Fie hiperbola $(\mathcal{H})\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Atunci hiperbola $(\mathcal{H}')\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ se numeşte **hiperbola conjugată** lui $\mathcal{H}$. Observăm că axa transversă a lui $\mathcal{H}'$ este Oy. Dorim să reprezentăm grafic pe $\mathcal{H}'$. Fie S_d simetria ortogonală faţă de prima bisectoare $d:\ y = x$. Ea are ecuaţiile $x' = y,\ y' = x$.

Atunci $S_d(\mathcal{H}')$ este o hiperbolă de ecuaţii $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Aceasta are focarele de coordonate $(c,0)$, $(-c,0)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$. Atunci hiperbola $\mathcal{H}'$ are focarele $F(0,c)$, $F'(0,-c)$. Vârfurile lui $\mathcal{H}'$ sunt $B(0,b)$, $B'(0,-b)$. Analog ecuaţiile asimptotelor lui $S_d(\mathcal{H}')$ sunt $y = \pm\frac{a}{b}x$, deci ecuaţiile asimptotelor lui $\mathcal{H}'$ sunt $x = \pm\frac{a}{b}y \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$.

Deci $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{H}'$ au aceleaşi asimptote. Raţionând analog determinăm directoarele hiperbolei conjugate: $y = \pm\frac{b^2}{c}$ şi excentricitatea ei $e' = \frac{c}{b}$.



5 Intersecţia dintre o dreaptă şi o hiperbolă

În continuare vom studia intersecţia dintre hiperbola $(\mathcal{H})\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi dreapta $(d)\ y = mx + n$.

Pentru a găsi coordonatele eventualelor puncte comune rezolvăm sistemul format din cele două ecuaţii: $d \cap \mathcal{H} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + n. \end{cases}$

Eliminând necunoscuta y, obţinem ecuaţia:

$$b^2x^2 - a^2(mx+n)^2 = a^2b^2 \iff$$
$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + n^2 + 2mxn) = a^2b^2 \iff$$
$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(n^2 + b^2) = 0. \tag{8}$$

Presupunem că $m \neq \pm\frac{b}{a}$. În acest caz ecuaţia de mai sus este o ecuaţie de gradul II în x.

Fie Δ discriminantul ecuaţiei de mai sus.

Dacă $\begin{cases} \Delta > 0, & d \cap \mathcal{H} = \{P_1, P_2\}. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \textbf{secantă} \text{ hiperbolei.} \\ \Delta < 0, & d \cap \mathcal{H} = \emptyset. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \textbf{exterioară} \text{ hiperbolei.} \\ \Delta = 0, & d \cap \mathcal{H} = \{T\}(\text{punct dublu}). \text{ În acest caz, dreapta } d \text{ este } \textbf{tangentă} \text{ hiperbolei.} \end{cases}$

Precizare: În calculul de mai sus, am exclus dreptele de tipul $\delta : x = k$. Intersectând cu hiperbola, obţinem ecuaţia: $b^2k^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \iff y^2 = \frac{b^2}{a^2}(k^2 - a^2)$.

Aşadar, dacă $\begin{cases} k^2 - a^2 > 0, & d \cap \mathcal{H} = \{P_1, P_2\}. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \textbf{secantă} \text{ hiperbolei.} \\ k^2 - a^2 < 0, & d \cap \mathcal{H} = \emptyset. \text{ Spunem că dreapta } d \text{ este } \textbf{exterioară} \text{ hiperbolei.} \\ k = \pm a, & d \cap \mathcal{H} = \{T(k, 0)\}\text{(punct dublu). În acest caz, dreapta } d \text{ este } \textbf{tangentă} \text{ hiperbolei.} \end{cases}$

5.1 Ecuaţia magică a tangentelor de pantă dată la hiperbolă

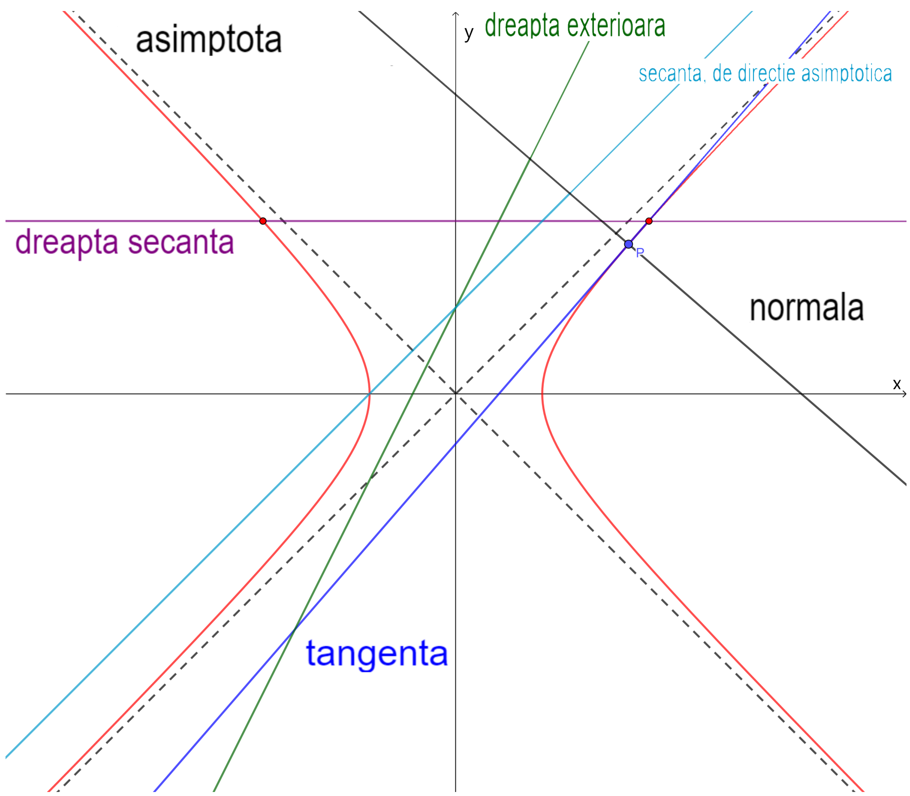
Obţinem $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 = a^2m^2 - b^2$. Observăm deci că nu pentru orice pantă m, dreapta d poate fi tangentă hiperbolei. O condiţie necesară pentru ca $d :\ y = mx + n$ să fie tangentă hiperbolei este $m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, \infty)$.

$$\begin{aligned} (d_1) y &= mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \\ (d_2) y &= mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dacă $\mathbf{m = \pm \frac{b}{a}}$ şi $\mathbf{n \neq 0}$, ecuaţia (8) este o ecuaţie de grad I în x.

Rezultă că dreapta d taie hiperbola într-un singur punct. Observăm că d este paralelă cu una din asimptotele hiperbolei. Spunem că dreapta d este **secantă, de direcţie asimptotică**.

Dacă $m = \pm \frac{b}{a}$ şi $n = 0$ regăsim **asimptotele hiperbolei**. Dacă $m = \pm\infty$ dreptele $x = a$ şi $x = -a$ sunt **tangente**. În concluzie, dată o hiperbolă şi o dreaptă, dreapta poate fi exterioară hiperbolei, secantă, tangentă, secantă de direcţie asimptotică sau asimptotă.



5.2 Tangenta la hiperbolă într-un punct al ei

Dacă $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul P_0 se obţine din ecuaţia hiperbolei prin dedublare:

$$(d_0)\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{10}$$

Pentru a demonstra că dreapta de ecuaţie (10) este tangenta hiperbolei, rezolvăm sistemul format din ecuaţia hiperbolei şi cea a dreptei d_0. Folosind faptul că $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, rezultă că intersecţia dintre dreaptă şi hiperbolă este un punct dublu şi anume P_0.

5.3 Normala la hiperbolă într-un punct al ei

Fie $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$. Normala în P_0 la hiperbola este perpendiculară în P_0 pe tangenta la hiperbolă în P_0.
Din ecuaţia (10) deducem că panta tangentei la hiperbolă în P_0 este $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, deci panta normalei la hiperbolă în P_0 este $-\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. Astfel, ecuaţia normalei în P_0 la hiperbolă este

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0).$$

5.4 Tangentele la hiperbolă ce trec printr-un punct exterior acesteia

Fie acum $P(x_0, y_0) \in \mathcal{E}xt\ \mathcal{H}$ să fie tangentă hiperbolei. Deci înlocuim $y = y_0 + mx - mx_0$ în ecuaţia hiperbolei obţinând o ecuaţie de gradul doi în x. Discriminantul acesteia trebuie să fie zero, condiţie echivalentă cu

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 - (b^2 + y_0^2) = 0. \tag{11}$$

Deoarece P este exterior hiperbolei $\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0$, rezultă că ecuaţia (11) are discriminant strict pozitiv, deci are două soluţii reale distincte, m_1 şi m_2.

Rezultă că există două tangente duse din P_0 la hiperbolă, de ecuaţii

$$y - y_0 - m_1(x - x_0) = 0,\ \ y - y_0 - m_2(x - x_0) = 0. \tag{12}$$

Studiaţi ecuaţiile din această secţiune pentru hiperbola conjugată.

Partea II

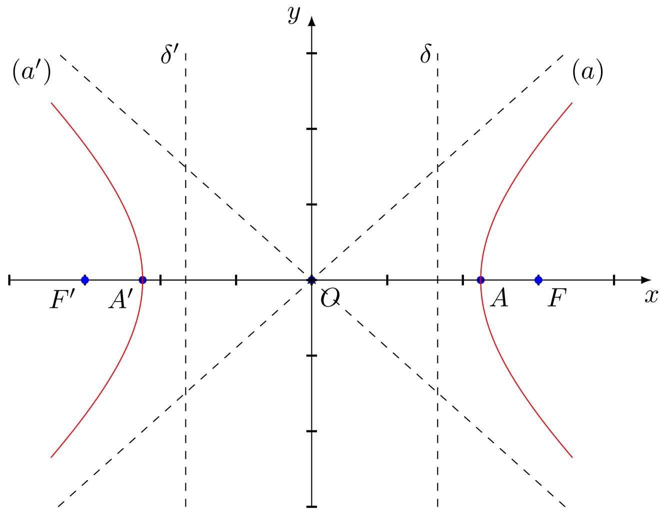
Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1. *Pentru următoarele hiperbole, determinaţi coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor, ecuaţiile asimptotelor apoi reprezentaţi-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil. Scrieţi toate tipurile de ecuaţii acestora.*

1. (a) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$;
   (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$;
   (c) $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$;
2. (a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} - 1 = 0$;
   (b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} - 1 = 0$;
   (c) $y^2 - x^2 - 1 = 0$;

Soluţie:

1. (a) **Hiperbolă**
   $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3.$
   Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Ox.
   Focarele sunt $F(3, 0), F'(-3, 0)$.
   Vârfurile hiperbolei sunt $A(a, 0) = A(\sqrt{5}, 0), A'(-a, 0) = A'(-\sqrt{5}, 0)$.
   Excentricitatea este $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.
   Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{5}{3} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{5}{3}. \end{cases}$
   Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{2}{\sqrt{5}}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x. \end{cases}$



Ecuaţia generală: $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$

Ecuaţii explicite: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x^2-5}, x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$

Ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = \sqrt{5}\cosh t, \\ y = 2\sinh t, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \begin{cases} x = -\sqrt{5}\cosh t, \\ y = 2\sinh t, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$

(b) **Hiperbolă**

$a = \sqrt{4} = 2, b = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Ox.

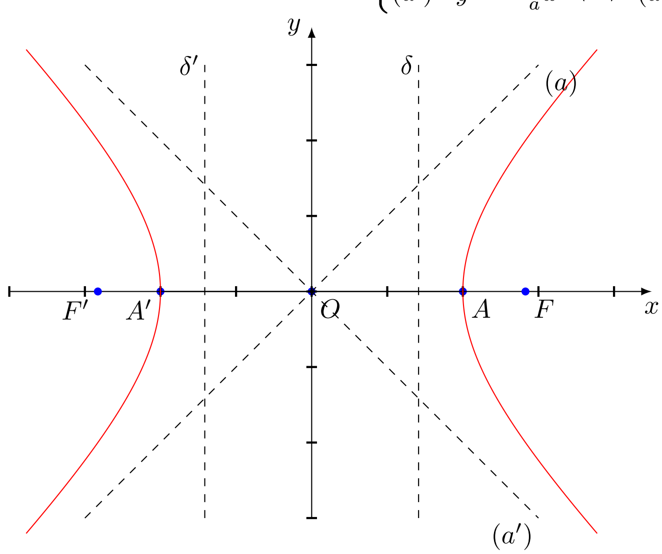
Focarele sunt $F(2\sqrt{2}, 0), F'(-2\sqrt{2}, 0)$.

Vârfurile hiperbolei sunt $A(a,0) = A(2,0), A'(-a,0) = A'(-2,0)$.

Excentricitatea este $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{cases}$

Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{2}{2}x \iff y = x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{2}{2}x \iff y = -x. \end{cases}$



Ecuaţia generală: $x^2 - y^2 - 4 = 0$

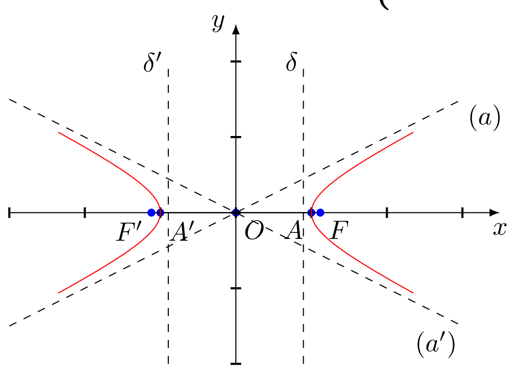
Ecuaţii explicite: $y = \pm\sqrt{x^2-4}, x \in (-\infty, -2] \cup [\sqrt{5}, \infty)$

Ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = \sqrt{5}\cosh t, \\ y = 2\sinh t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(c) **Hiperbolă**

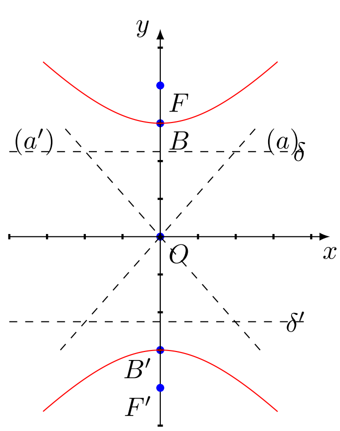
Obţinem **ecuaţia canonică**: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$. $a = \sqrt{1} = 1, b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Ox.
Focarele sunt $F(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0), F'(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.
Vârfurile hiperbolei sunt $A(a, 0) = A(1, 0), A'(-a, 0) = A'(-1, 0)$.
Excentricitatea este $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : x = \frac{a^2}{c} \iff \delta : x = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \delta' : x = -\frac{a^2}{c} \iff \delta' : x = -\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$
Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{\frac{1}{2}}{1}x \iff y = \frac{1}{2}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{\frac{1}{2}}{1}x \iff y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$



Ecuaţii explicite: $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}, x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
Ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = \cosh t, \\ y = \frac{1}{2}\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \begin{cases} x = -\cosh t, \\ y = \frac{1}{2}\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

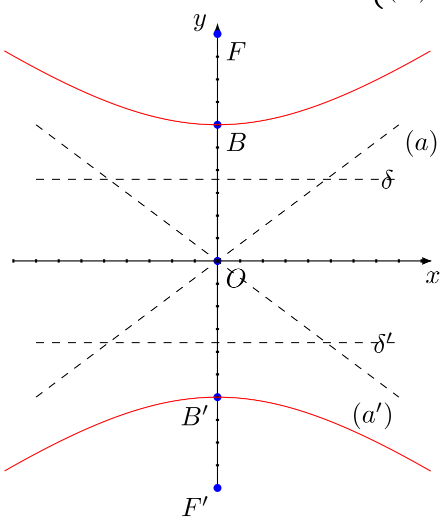
(a) **Hiperbolă**
$a = \sqrt{7}, b = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$.
Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Oy.
Focarele sunt $F(0, 4), F'(0, -4)$.
Vârfurile hiperbolei sunt $B(0, b) = B(0, 3), B'(0, -b) = B'(0, -3)$.
Excentricitatea este $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{3}$.
Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases} \delta : y = \frac{b^2}{c} \iff \delta : y = \frac{9}{4} \\ \delta' : y = -\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y = -\frac{9}{4}. \end{cases}$
Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases} (a) : y = \frac{b}{a}x \iff (a) : y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \\ (a') : y = -\frac{b}{a}x \iff (a') : y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x. \end{cases}$



ecuaţia generală: $7y^2 - 9x^2 - 63 = 0$
ecuaţiile explicite: $y = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{x^2 + 7}, x \in \mathbb{R}$
ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} y = 3\cosh t, \\ x = \sqrt{7}\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \begin{cases} y = -3\cosh t, \\ x = \sqrt{7}\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

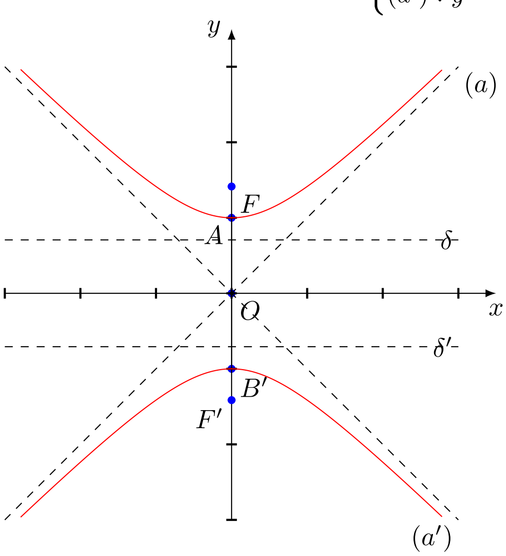
(b) **Hiperbolă**
$a = \sqrt{64} = 8, b = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Oy.
Focarele sunt $F(0,10), F'(0,-10)$.
Vârfurile hiperbolei sunt $B(0,b)=B(0,6), B'(0,-b)=B'(0,-6)$.
Excentricitatea este $e=\frac{c}{b}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.
Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases}\delta : y=\frac{b^2}{c} \iff \delta : y=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}\\ \delta' : y=-\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y=-\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}.\end{cases}$
Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases}(a) : y=\frac{b}{a}x \iff (a) : y=\frac{8}{6}x\\ (a') : y=-\frac{b}{a}x \iff (a') : y=-\frac{8}{6}x.\end{cases}$



ecuaţia generală: $64y^2-36x^2-2304=0$
ecuaţiile explicite: $y=\pm\frac{6}{8}\sqrt{x^2+64}, x\in\mathbb{R}$

(c) **Hiperbolă**
$a=\sqrt{1}=1, b=\sqrt{1}=1 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.
Din ecuaţia hiperbolei, axa focală este Oy.
Focarele sunt $F(0,\sqrt{2}), F'(0,-\sqrt{2})$.
Vârfurile hiperbolei sunt $B(0,b)=B(0,1), B'(0,-b)=B'(0,-1)$.
Excentricitatea este $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.
Ecuaţiile directoarelor sunt $\begin{cases}\delta : y=\frac{b^2}{c} \iff \delta : y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \delta' : y=-\frac{b^2}{c} \iff \delta' : y=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$
Ecuaţiile asimptotelor sunt $\begin{cases}(a) : y=\frac{b}{a}x \iff (a) : y=\frac{1}{1}x \iff y=x\\ (a') : y=-\frac{b}{a}x \iff (a') : y=-\frac{1}{1}x \iff y=-x.\end{cases}$



ecuaţia canonică: $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{1}=1$.
ecuaţiile explicite: $y=\pm\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} y = \cosh t, \\ x = \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \begin{cases} y = -\cosh t, \\ x = \sinh t, \quad\quad t \in \mathbb{R} \end{cases}.$

Exerciţiul 2. *Scrieţi ecuaţiile hiperbolelor determinate prin condiţiile următoare, apoi reprezentaţi-le grafic:*

1. *hiperbola de vârfuri* $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, *ce trece prin* $M(2\sqrt{5}, 1)$*;*
2. *hiperbola ce trece prin* $M(1,3)$ *şi are asimptotele* $2x - y = 0$ *şi* $2x + y = 0$.

Soluţie:

1. Fie $\mathcal{H}$ hiperbola cu $A, A', M \in \mathcal{H}$. Din faptul că $A, A' \in Ox \Rightarrow$ axa focală este Ox.

   Ecuaţia canonică: Fie ecuaţia hiperbolei: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   Deoarece $A \in \mathcal{H} \Rightarrow a = 4$. Ecuaţia hiperbolei devine: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{M \in \mathcal{H}} \frac{20}{16} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow b = 2$.

   Ecuaţia devine: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$.

   Ecuaţiile explicite: Fie ecuaţia $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Deoarece $A \in \mathcal{H} \Rightarrow a = 4$. Ecuaţia hiperbolei devine: $|y| = \frac{b}{4}\sqrt{x^2 - 16} \xrightarrow{M \in \mathcal{H}} 1 = \frac{b}{4}\sqrt{20 - 16} \Rightarrow b = \frac{2}{1}$. Ecuaţia devine: $|y| = \frac{2}{4}\sqrt{x^2 - 16}$.

   Ecuaţiile parametrice: Ecuaţiile devin: $\begin{cases} x = 4\cosh t, \\ y = 2\sinh t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = 4\cosh t, \\ y = 2\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2. **Ecuaţia canonică:** Asimptotele trec prin origine şi sunt simetrice faţă de axele de coordonate, deci ecuaţiile hiperbolei pot fi:

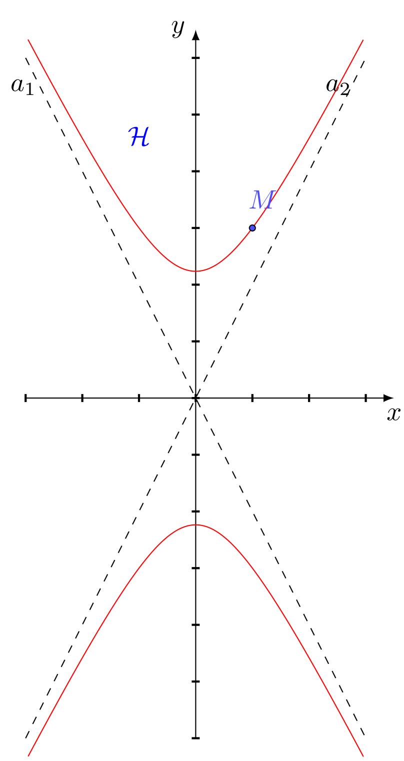
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

   Asimptotele au ecuaţii: $y = \pm\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$. Ecuaţia hipebolei devine:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = \pm 1.$$

   Deoarece M aparţine hiperbolei, obţinem:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{9}{4a^2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{-5}{4a^2} = -1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{5}{4}} - \frac{y^2}{5} = -1.$$



Exerciţiul 3. *Fie hiperbola* $(\mathcal{H})\, x^2 - 2y^2 - 2 = 0$.

1. *Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei in punctul* $M(2,1)$ *la hiperbolă.*
2. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreptele* $(d_1): y = 3x - 1$, $(d_2): y = \frac{1}{2}x$
3. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă duse din punctele exterioare* $P(0,1), Q(\sqrt{2},1)$.

Soluţie: Ecuaţia devine $\frac{x^2}{2} - y^2 - 1 = 0$. $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{3}$.

1. Să observăm că $M \in \mathcal{H}$.
   Ecuaţia tangentei în punctul M este dată de: $t_M : \frac{x \cdot 2}{2} - y \cdot 1 - 1 = 0 \iff t_M : x - y - 1 = 0$.
   Normala în punctul M, n_M, este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} \iff n_M : -x + 2 = y - 1 \iff n_M :$ $x + y - 3 = 0$.

2. Ecuaţiile magice ale tangentelor la hiperbolă de pantă m sunt date de $\begin{cases} (t_m^+): y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2} \\ (t_m^-): y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2} \end{cases}$. În cazul nostru, acestea devin: $\begin{cases} (t_3^+): y = 3x + \sqrt{2 \cdot 9 - 1} = 3x + \sqrt{17} \\ (t_3^-): y = 3x - \sqrt{17}. \end{cases}$
   Pentru dreapta d_2, panta nu verifică condiţia de a fi panta unei tangente.

3. **Metoda 1:** Considerăm o dreaptă care trece prin P: $y = mx + n \Rightarrow 1 = 0m + n \Rightarrow n = 1$.
   Punem condiţia ca această dreaptă să fie tangentă elipsei, i.e. sistemul $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 - 1 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică, $\begin{cases} x^2 - 2m^2x^2 - 4mx - 4 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - 2m^2)x^2 - 4mx - 4 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică, i.e. $4m^2 + 4(1 - 2m^2) = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 1$.
   Obţinem ecuaţiile tangentelor $t_1 : y = x + 1, t_2 = -x + 1$.
   Metoda 2: Considerăm ecuaţia magică a tangentelor: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$. Ele trebuie să treacă prin $P(0,1)$, deci $1 = \sqrt{2m^2 - 1} \Rightarrow 2m^2 - 1 = 1 \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 1$ şi se obţin cele două tangente.
   Metoda 3: Scriem dreapta contactelor prin dedublare: $-y - 1 = 0$. Intersectăm această dreaptă cu $\mathcal{H}$ şi obţinem punctele de intersecţie $T_1(2,-1)$, $T_2(-2,-1)$.
   Obţinem ecuaţiile tangentelor: $PT_1 : y = -x + 1$, $PT_2 : y = x + 1$.

   Ecuaţia pantelor este $m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 - (b^2 + y_0^2) = 0$.
   Obţinem: $2\sqrt{2}m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, care este panta asimptotei, deci nu se obţine tangentă în acest caz.
   Pe de altă parte, am ignorat dreptele cu $x = ct$.
   Punctul Q se află pe dreapta $x = \sqrt{2}$, care conţine vârful $(\sqrt{2}, 0)$, deci cealaltă tangentă este $x = \sqrt{2}$.

Exerciţiul 4. *Fie hiperbola* $(\mathcal{H})\, -\frac{x^2}{3} + y^2 - 1 = 0$.

1. *Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul* $M(3,2)$ *la hiperbolă.*
2. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreapta* $y = \frac{1}{2}x$.
3. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă duse din punctul exterior* $Q(1,1)$.

Soluţie:

1. Să observăm că $M \in \mathcal{H}$.
   Ecuaţia tangentei în punctul M este dată de: $t_M : -x + 2y - 1 = 0$.
   Normala în punctul M, n_M, este dată de: $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} \iff n_M : 2x - 6 + y - 2 = 0 \iff$ $2x + y - 8 = 0$.

2. Fie dreapta $y = \frac{1}{2}x + n$. O intersectăm cu hiperbola $-x^2+3(\frac{1}{2}x+n)^2-3=0 \iff -4x^2+3x^2+12n^2+12xn-12 = 0 \iff -x^2+12xn+(12n^2-12)=0$. Punem condiţia ca ecuaţia să aibă soluţie dublă: $\Delta = 0 \iff 36n^2+12n^2-12 = 0 \iff 4n^2 = 1 \iff n = \pm\frac{1}{2}$.

3. Considerăm o dreaptă care trece prin Q: $y-1 = m(x-1)$.

   Punem condiţia ca această dreaptă să fie tangentă elipsei, i.e. sistemul $\begin{cases} -\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0 \\ y = m(x-1)+1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică,

   $\begin{cases} -\frac{x^2}{3} + (m(x-1)+1)^2 - 1 = 0 \\ y = m(x-1)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2+3m^2x^2-6m^2x+3m^2+3+6mx-6m-3=0 \\ y = m(x-1)+1 \end{cases}$

   $\Rightarrow \begin{cases} (3m^2-1)x^2-6m(m-1)x+3m(m-2)=0 \\ y = m(x-1)+1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică, i.e.

   $9m^2(m-1)^2 - 3m(m-2)(3m^2-1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}$.

   Obţinem ecuaţiile tangentelor $t_1 : y = 1, t_2 : -x+2y = 1$.

Exerciţiul 5. *Se dă hiperbola $3x^2 - y^2 - 3 = 0$. Calculaţi unghiul dintre asimptotele sale.*

Soluţie: Hiperbola are ecuaţie $x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$. Tangentele celor două asimptote sunt $m_1 = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ (unghiul $\frac{\pi}{3}$) şi $m_2 = -\frac{b}{a} = -\sqrt{3}$ (unghiul $2\frac{\pi}{3}$). Obţinem unghiul dintre cele două este $\pi/3$.

Exerciţiul 6. *Demonstraţi că punctul de contact T al unei tangente oarecare la o hiperbolă este mijlocul segmentului format de asimptote pe acea tangentă.*

Soluţie: Fie hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, punctul $T(x_0, y_0)$ cu tangenta $(b^2x_0)x - (a^2y_0)y - a^2b^2 = 0$. Intersecţia cu asimptotele este dată de $A_1(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0} \frac{ab^2}{bx_0-ay_0})$ şi $A_2(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0} \frac{ab^2}{bx_0+ay_0})$ şi $T = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$.

Teorema 1. *Fie o dreaptă δ, un punct F exterior acesteia şi $e > 0$. Atunci locul geometric al punctelor P din plan cu proprietatea că raportul $\frac{d(P,F)}{d(P,\delta)} = e$ este:*

1. *o hiperbolă, dacă $e > 1$;*
2. *o elipsă, dacă $e < 1$;*
3. *o parabolă, dacă $e = 1$.*

Demonstraţie. Considerăm reperul cu axa absciselor perpendiculara din F pe δ, originea un punct deocamdată nefixat pe această perpendiculară, şi $Oy \perp Ox$. Presupunem că în raport cu acest reper $F(c, 0)$ şi $\delta : x = d$.
Atunci P este un punct al locului geometric dacă şi numai dacă

$$(x-c)^2 + y^2 = e|x-d|.$$

Ridicând această relaţie la pătrat rezultă

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2(de^2-c)x + c^2 - d^2e^2 = 0 : \tag{13}$$

Dacă $e \neq 1$ alegem O astfel încât $de^2 - c = 0$, deci $c^2 - d^2e^2 = e^2d^2(e^2-1)$ şi ecuatia (13) devine

$$\frac{x^2}{d^2e^2} + \frac{y^2}{d^2e^2(1-e^2)} = 1.$$

Dacă $e \in (0, 1)$ rezultă că P aparţine unei elipse, iar dacă $e > 1$ rezultă că P aparţine unei hiperbole. Observăm că $a = e|d| = \frac{|c|}{e}$.
Dacă $e = 1$, (13) devine

$$y^2 + 2x(d-c) + c^2 - d^2 = 0.$$

Alegem O astfel încât $d = -c$, deci ecuaţia devine $y^2 = 2px$, cu $p = 2c$. În cazul acesta P aparţine unei parabole.
Reciproc, am demonstrat deja că dacă P aparţine unei elipse, unei hiperbole ori unei parabole, el are proprietatea $\frac{d(P,F)}{d(P,\delta)} = e$, cu $e = \frac{c}{a}$ în primele două cazuri şi $e = 1$ pentru parabolă. $\square$

Exerciţiul 7. *Demonstraţi că $xy = 1$ este hiperbolă.*

Soluţie: Considerăm rotaţia de centru O şi unghi $\frac{\pi}{4}$. Ecuaţiile sale sunt:
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) = 1 \iff \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1.$

Partea III

Teme

Exerciţiul 8. *Pentru următoarele hiperbole, determinaţi coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor, ecuaţiile asimptotelor apoi reprezentaţi-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil. Scrieţi toate tipurile de ecuaţii acestora.*

1. (a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$;
   (b) $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
   (c) $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$;
2. (a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} - 1 = 0$;
   (b) $y^2 - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$;
   (c) $y^2 - x^2 - 9 = 0$;

Exerciţiul 9. *Fie hiperbola* $(\mathcal{H})\, 9x^2 - y^2 - 9 = 0$.

1. *Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei in punctul* $M(2, 3\sqrt{3})$ *la hiperbolă.*
2. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă, paralele cu dreptele* $(d_1) : y = 4x - 1$, $(d_2) : y = 2x$
3. *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă duse din punctele exterioare* $P(0, 1), Q(1, 1)$.

Exerciţiul 10. *Scieţi ecuaţiile hiperbolelor determinate de condiţiile:*

1. *hiperbola de focare* $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$, *ce trece prin* $M(1, \sqrt{15})$;
2. *hiperbola ce trece prin punctele* $M(2\sqrt{2}, 1)$, $N(2\sqrt{5}, 2)$, *ce are ca axe de simetrie axele de coordonate şi axa transversă* xx';
3. *hiperbola de focare* $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$, *tangentă dreptei* $(d)\, x - y - 1 = 0$.

Exerciţiul 11. *Determinaţi ecuaţiile hiperbolei raportată la axele ei de simetrie, a cărei tangentă în* $M(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ *este* $3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y - 6 = 0$.

Exerciţiul 12. *Fie o hiperbolă echilateră cu axele de coordonate ca axe de simetrie şi un punct A arbitrar al hiperbolei. Intersecţia dintre normală în A la hiperbolă şi axa transversă este I. Demonstraţi că* $d(O, A) = d(A, I)$.

Exerciţiul 13. *(Proprietatea optică a hiperbolei) Tangenta şi normala la hiperbolă, într-un punct oarecare M al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară şi bisectoarea exterioară a unghiului* $\widehat{FMF'}$.

Exerciţiul 14. *Fie* T_1 *şi* T_2 *punctele de contact ale tangentei duse din* $P(x_0, y_0)$ *la o conică nedegenerată (consideraţi ecuaţii canonice). Atunci dreapta* T_1T_2 *are ecuaţia obţinută din ecuaţia conicii prin dedublare în* P. *Numim dreapta* T_1T_2 *polara lui* P *în raport cu conica dată.*