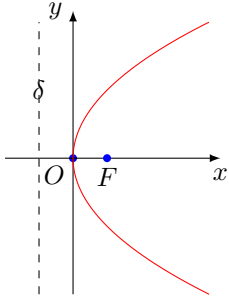
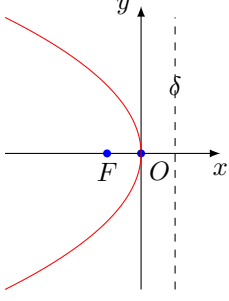
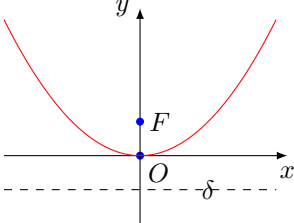
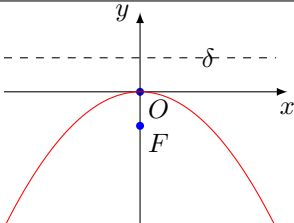


# Seminar Parabola

## Partea I

## Tipuri de parabole

Tipul ecuației	Semiplan	Focar	Directoare	Grafic	Ecuații explicite	Ecuații parametrice
$y^2 = 2px$	$x \geq 0$	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$\delta : x = -\frac{p}{2}$		$y = \sqrt{2px}, x \geq 0$	$\begin{cases} x = \frac{t}{2p}, \\ y = t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$
$y^2 = -2px$	$x \leq 0$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$\delta : x = \frac{p}{2}$		$y = \sqrt{-2px}, x \leq 0,$	$\begin{cases} x = -\frac{t}{2p}, \\ y = t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$
$x^2 = 2py$	$y \geq 0$	$F(0, \frac{p}{2})$	$\delta : y = -\frac{p}{2}$		$y = \frac{x^2}{2p}, x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{t^2}{2p}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$
$x^2 = -2py$	$y \leq 0$	$F(0, -\frac{p}{2})$	$\delta : y = \frac{p}{2}$		$y = -\frac{x^2}{2p}, x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = t, \\ y = -\frac{t^2}{2p}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$

## Partea II

# Exerciții

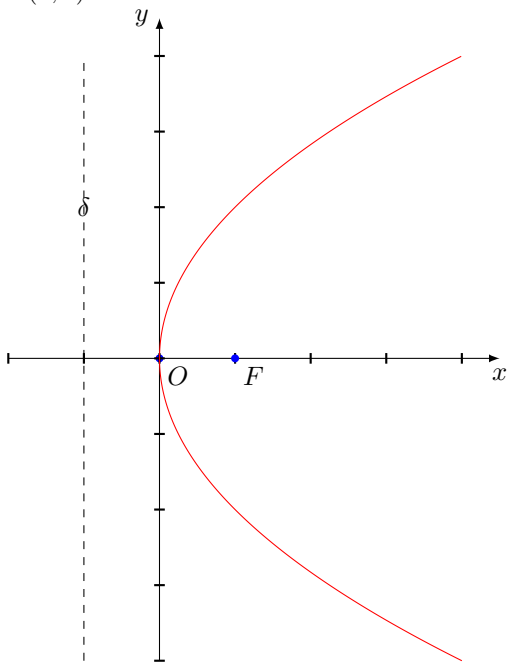
**Exercițiul 1.** Pentru următoarele parabole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil. Scrieți toate tipurile de ecuații pentru parabole.

- (a)  $y^2 = 4x$ ;  
(b)  $y^2 = 20x$ ;  
(c)  $y^2 = -6x$ ;  
(d)  $y^2 = -x$ ;
- (a)  $x^2 = 4y$ ;  
(b)  $x^2 = 5y$ ;  
(c)  $x^2 = -16y$ ;  
(d)  $x^2 = -3y$ ;
- (a)  $y^2 = 8x - 2$ ;  
(b)  $y^2 = 6x + 4$ .

**Soluție:**

1. (a) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $y^2 = 2px$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 2$ , deci focarul este  $F(p/2, 0) = F(1, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = -\frac{p}{2} = -1$ . Punct  $A(1, 2) \in \mathcal{P}$ . Excentricitatea este 1.



**Ecuația canonică**  $y^2 = 4x$

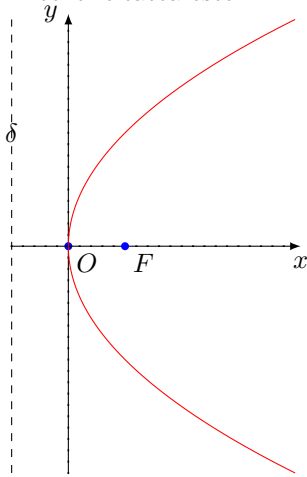
**Ecuații explicite**  $y = \pm 2\sqrt{x}, x \geq 0$ .

**Ecuații parametrice**  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

- (b) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $y^2 = 2px$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 10$ , deci focarul este  $F(p/2, 0) = F(5, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = -\frac{p}{2} = -5$ .

Excentricitatea este 1.



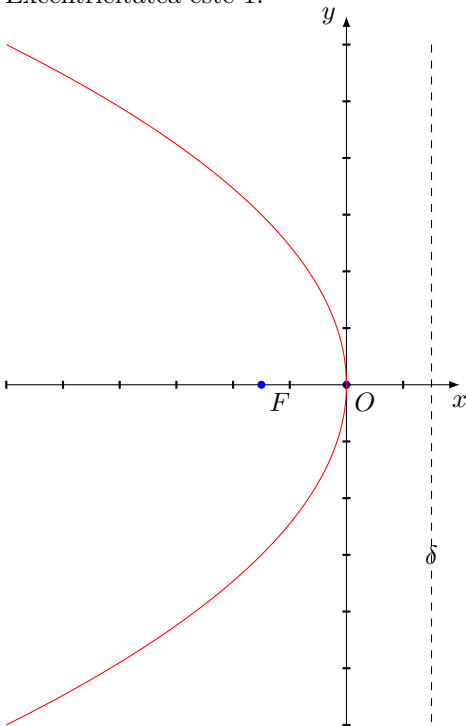
**Ecuția canonică**  $y^2 = 20x$

**Ecuții explicite**  $y = \pm 2\sqrt{5x}, x \geq 0$ .

**Ecuții parametrice**  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{20} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(c) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $y^2 = -2px$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x \leq 0$  și are ca axă de simetrie  $Oy$ . Parametrul este  $p = 3$ , deci focarul este  $F(-\frac{p}{2}, 0) = F(-1.5, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : y = \frac{p}{2} = 1.5$ . Excentricitatea este 1.



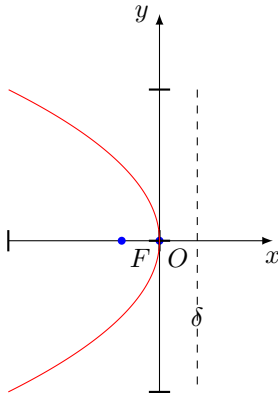
**Ecuția canonică**  $y^2 = -6x$

**Ecuții explicite**  $y = \pm\sqrt{-6x}, x \leq 0$

**Ecuții parametrice**  $\begin{cases} x = -\frac{t^2}{6} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $y^2 = -2px$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x \leq 0$  și are ca axă de simetrie  $Oy$ . Parametrul este  $p = \frac{1}{2}$ , deci focarul este  $F(-p/2, 0) = F(-0.25, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : y = \frac{p}{2} = 0.25$ . Excentricitatea este 1.



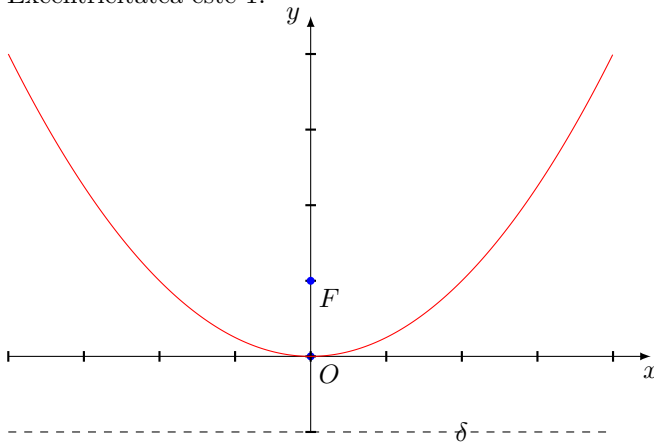
Ecuția canonică  $y^2 = -x$

Ecuții explicite  $y = \pm\sqrt{-x}, x \leq 0$

Ecuții parametrice  $\begin{cases} x = -t^2 \\ y = t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$

2. (a) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $x^2 = 2py$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $y \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 2$ , deci focarul este  $F(0, p/2) = F(0, 1)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = \frac{p}{2} = -1$ . Excentricitatea este 1.



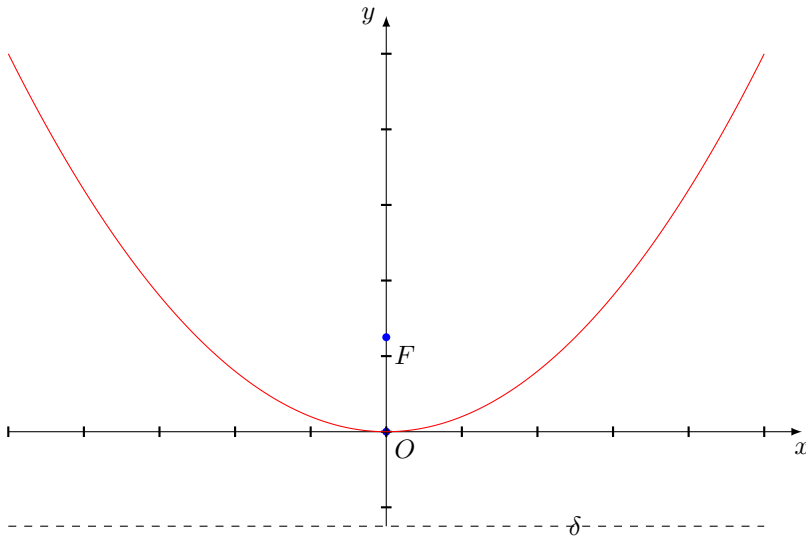
Ecuția canonică  $x^2 = 4y$

Ecuții explicite  $y = \frac{x^2}{4}, x \in \mathbb{R}$ .

Ecuții parametrice  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$

(b) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $x^2 = 2py$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $y \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 2.5$ , deci focarul este  $F(0, p/2) = F(0, 1.25)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = \frac{p}{2} = -1.25$ . Excentricitatea este 1.



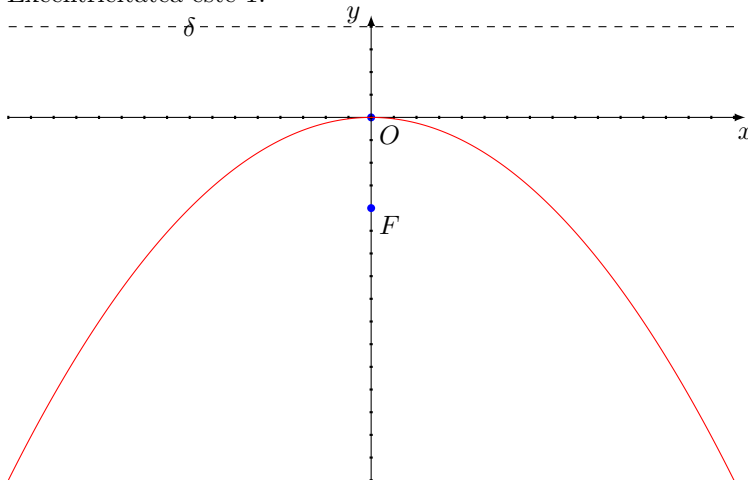
**Ecuția canonică**  $x^2 = 5y$

**Ecuții explicite**  $y = \frac{x^2}{5}, x \in \mathbb{R}$ .

**Ecuții parametrice**  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{5}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

(c) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $x^2 = -2py$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $y \leq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 8$ , deci focarul este  $F(0, -p/2) = F(0, -4)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : y = \frac{p}{2} = 4$ . Excentricitatea este 1.



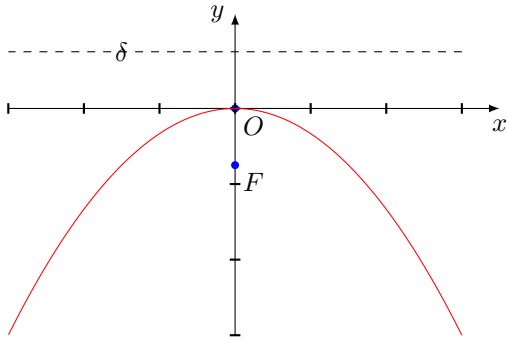
**Ecuția canonică**  $x^2 = -16y$

**Ecuții explicite**  $y = -\frac{x^2}{16}, x \in \mathbb{R}$ .

**Ecuții parametrice**  $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t^2}{16}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d) **Parabolă**

Parabola este de tipul  $x^2 = -2py$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $y \leq 0$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Parametrul este  $p = 1.5$ , deci focarul este  $F(0, -p/2) = F(0, -0.75)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : y = \frac{p}{2} = 0.75$ . Excentricitatea este 1.



**Ecuția canonică**  $x^2 = -3y$

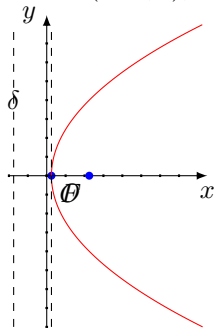
**Ecuții explicite**  $y = \frac{x^2}{3}, x \in \mathbb{R}$ .

**Ecuții parametrice**  $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t^2}{3}, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

- (a) Considerăm schimbarea de reper  $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{4} \\ y' = y. \end{cases}$

În noul reper, ecuația devine  $y'^2 = 8x'$ . Parabola este de tipul  $y'^2 = 2px'$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x' \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $O'x'$ . Parametrul este  $p = 4$ , deci focarul este  $F(p/2, 0) = F(2, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x' = -\frac{p}{2} = -2$ .

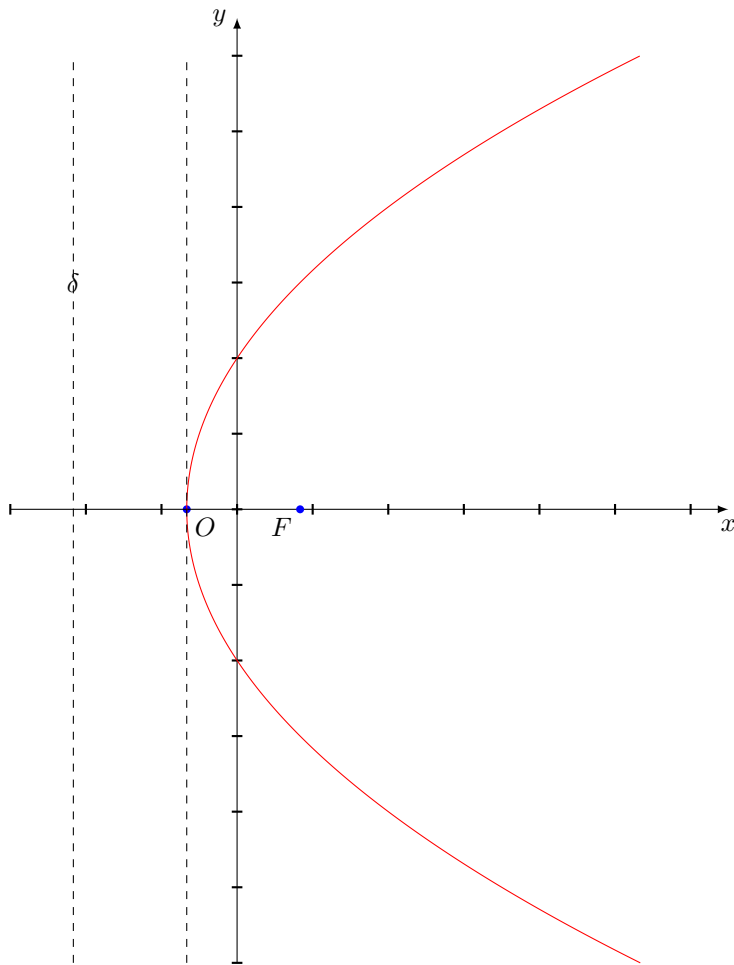
Revenind în reperul inițial, parabola este situată în semiplanul,  $x \geq -0.25$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Vârful este  $O'(0.25, 0)$ , focarul este  $F(2 + 0.25, 0) = F(2.25, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = -2 + 0.25 = -1.75$ .



- (b) Considerăm schimbarea de reper  $\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3} \\ y' = y. \end{cases}$

În noul reper, ecuația devine  $y'^2 = 6x'$ . Parabola este de tipul  $y'^2 = 2px'$ , deci parabola este situată în semiplanul,  $x' \geq 0$  și are ca axă de simetrie  $O'x'$ . Parametrul este  $p = 3$ , deci focarul este  $F(p/2, 0) = F(1.5, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : y' = -\frac{p}{2} = -1.5$ .

Revenind în reperul inițial, parabola este situată în semiplanul,  $x \geq -\frac{2}{3}$  și are ca axă de simetrie  $Ox$ . Vârful este  $O'(-\frac{2}{3}, 0)$ , focarul este  $F(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}, 0) = F(\frac{5}{6}, 0)$  și directoarea are ecuația:  $\delta : x = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{6}$ .



**Exercițiul 2.** Scrieți ecuațiile parabolilor determinate prin condițiile următoare:

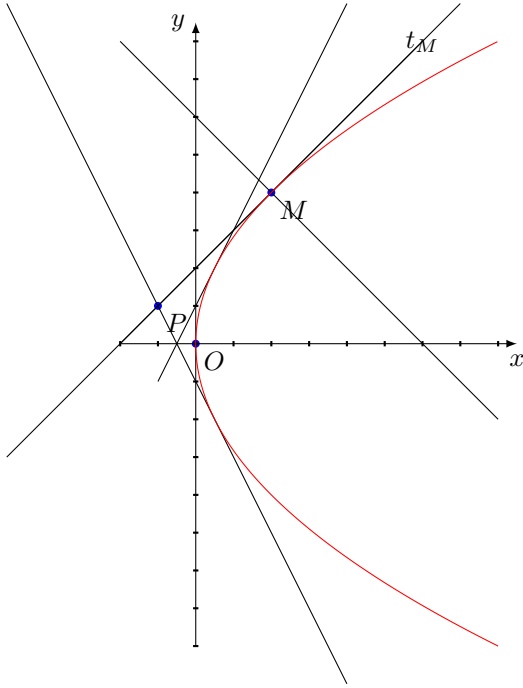
1. parabola cu focarul  $F(3,0)$  și directoarea  $(\delta) x = -3$ ;
2. parabola cu focarul  $F(2,1)$  și directoarea  $(\delta) 3x + 4y - 1 = 0$ ;
3. parabola cu axa  $Ox$  ca axa de simetrie, tangenta în varf axa  $Oy$ , știind că e tangenta dreptei  $y - 2x - 2 = 0$ .

**Soluție:**

1. Fie  $\mathcal{P}$  parabola dată. Din faptul că  $F$  focar și  $\delta$  directoare, rezultă că parabola are ecuația de forma  $y^2 = 2px$  cu parametrul  $p = 6$ .
2. Din definiția parabolei,  $P \in \mathcal{P}$  dacă  $d(P, F) = d(P, \delta)$ . Obținem:  $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 25(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) = (3x + 4y - 1)^2 \Rightarrow (16x^2 + 9y^2 + 24xy - 94x - 42y + 124) = 0$ .
3. Din faptul că parabola are axa de simetrie, obținem că parabola poate fi de tipul  $y^2 = 2px$  sau  $y^2 = -2px$ . Punem condiția ca dreapta să fie tangentă parabolei. Obținem că ecuația  $(2x+2)^2 = \pm 2px$  trebuie să aibă soluție unică:  $2x^2 + 4x + 2 = \pm px \Rightarrow 2x^2 + (4 \pm p)x + 2 = 0 \Rightarrow (4 \pm p)^2 - 16 = 0 \Rightarrow p_1 = 8, p_2 = p_3 = 0, p_4 = -8$ .

**Exercițiul 3.** Fie parabola  $(\mathcal{P}) y^2 - 8x = 0$ .

1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în  $M(2,4)$  la parabolă.
2. Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta  $y = 2x$ .
3. Scrieți ecuațiile tangențelor la parabolă duse din punctul exterior  $P(-1,1)$ .



**Soluție:**

Parametrul este  $p = 4$ .

1. Să observăm că  $M \in \mathcal{P}$ .

Ecuția tangentei în punctul  $M$  este dată de:  $t_M : y \cdot 4 - 4(x+2) = 0 \iff t_M : -4x + 4y - 8 = 0 \iff -x + y - 2 = 0$ .

Normala în punctul  $M$ ,  $n_M$ , este dată de:  $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{1} \iff n_M : x - 2 = -y + 4 \iff n_M : x + y - 6 = 0$ .

2. Ecuția tangentei la parabolă de pantă  $m$  este  $(t_m) : y = mx + \frac{p}{2m}$ . În cazul nostru, aceasta devine:  $(t_2) : y = 2x + \frac{4}{2} \iff y = 2x + 1$ .

3. Considerăm o dreaptă care trece prin  $P$ :  $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = m(x + 1)$ .

Obținem ecuația pantelor:  $2m^2x_0 - 2y_0m + p = 0 \Rightarrow -2m^2(-1) + 2m + 8 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{2x_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 1$ . Obținem ecuațiile tangentelor  $t_1 : y = -2x - 1, t_2 : y = x + 2$ .

**Exercițiul 4.** Fie parabola  $(\mathcal{P}) x^2 + 4y = 0$ .

1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în  $M(2, -1)$  la parabolă.
2. Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta  $y = 2x$ .
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior  $P(-1, 2)$ .

**Soluție:** Parametrul este  $p = 2$ .

1. Să observăm că  $M \in \mathcal{P}$ .

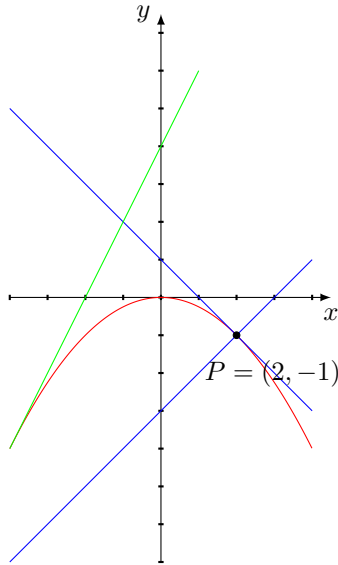
Ecuția tangentei în punctul  $M$  este dată de:  $t_M : 2x + 2(y - 1) = 0 \iff t_M : x + y - 1 = 0$ .

Normala în punctul  $M$ ,  $n_M$ , este dată de:  $\begin{cases} M \in n_M, \\ n_M \perp t_M \end{cases} \Rightarrow n_M : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} \iff n_M : x - y - 3 = 0$

2. Ecuția tangentei la parabolă de pantă  $m$  este  $(t_m) : y = 2x + n$ . Punem condiția ca sistemul format de parabolă și dreaptă să aibă ca soluție un punct dublu:  $x^2 + 4(2x + n) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 4n = 0 \Rightarrow n = 4$ .

3. Considerăm o dreaptă care trece prin  $P$ :  $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = m(x + 1)$ .

Intersectăm dreapta cu parabola și punem condiția ca ecuația absciselor să aibă ca soluție un punct dublu:  $x^2 + 4m(x + 1) + 8 = 0 \iff x^2 + 4mx + 4(m + 2) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \iff 4m^2 - 4m - 8 = 0 \Rightarrow m_1 = 2, m_2 = -1$ . Obținem ecuațiile tangentelor  $t_1 : y = 2x + 4, t_2 : y = -x + 1$ .



**Exercițiul 5.** (Proprietatea optică a a parabolei) Tangenta și normala la parabolă, într-un punct oarecare  $M$  al ei, sunt respectiv bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară a unghiului  $\widehat{FMN}$ , cu  $MN \perp \delta$ ,  $N \in \delta$ ,  $\delta$  fiind directoarea parabolei.

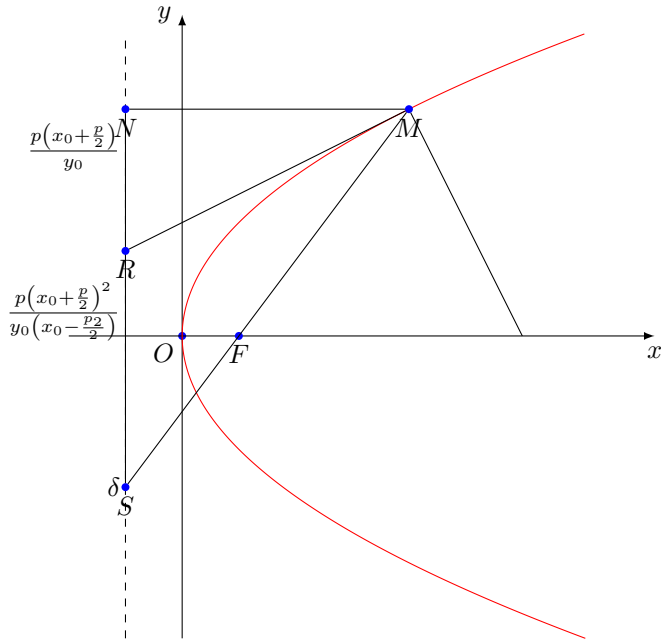
**Soluție:** Fără a restrânge generalitatea, presupunem că parabola are ecuația:  $y^2 = 2px$  și  $M(x_0, y_0)$  are  $y_0 > 0$ . Directoarea are ecuație:  $\delta : y = -\frac{p}{2}$ .

Tangenta în  $M$  are ecuația  $t_M; yy_0 = p(x + x_0)$ . Fie  $\{R\} = t_M \cap \delta$ . Obținem coordonatele lui  $R$ :  $R\left(-\frac{p}{2}, \frac{p(x_0 - \frac{p}{2})}{y_0}\right)$ .

Coordonatele lui  $N$  sunt:  $N(-\frac{p}{2}, y_0)$ . Obținem:  $MN = x_0 + \frac{p}{2}$ ,  $NR = \frac{p(x_0 + \frac{p}{2})}{y}$ . Fie  $\{S\} = MF \cap \delta$ . Obținem coordonatele

lui  $S$ :  $S(-\frac{p}{2}, \frac{py_0}{\frac{p}{2} - x_0})$ . Obținem  $RS = \frac{p(x_0 + \frac{p}{2})^2}{y_0(x_0 - \frac{p}{2})}$ ,  $RS = \frac{p(x_0 + \frac{p}{2})^2}{y_0(x_0 - \frac{p}{2})}$ .

Triunghiul  $MNS$  este dreptunghic, deci  $MS = \sqrt{MN^2 + NS^2} = \frac{(x_0 + \frac{p}{2})^2}{x_0 - \frac{p}{2}}$ . Observăm că  $\frac{MN}{MS} = \frac{NR}{RS}$ , deci din reciproca teoremei bisectoarei rezultă concluzia. Avem următoarea figură:



**Teorema 1.** Fie o dreaptă  $\delta$ , un punct  $F$  exterior acesteia și  $e > 0$ . Atunci locul geometric al punctelor  $P$  din plan cu proprietatea că raportul  $\frac{d(P,F)}{d(P,\delta)} = e$  este:

1. o hiperbolă, dacă  $e > 1$ ;
2. o elipsă, dacă  $e < 1$ ;

3. o parabolă, dacă  $e = 1$ .

*Demonstrație.* Considerăm reperul cu axa absciselor perpendiculara din  $F$  pe  $\delta$ , originea un punct deocamdată nefixat pe această perpendiculară, și  $Oy \perp Ox$ . Presupunem că în raport cu acest reper  $F(c, 0)$  și  $\delta : x = d$ . Atunci  $P$  este un punct al locului geometric dacă și numai dacă

$$(x - c)^2 + y^2 = e|x - d|.$$

Ridicând această relație la pătrat rezultă

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2(de^2 - c)x + c^2 - d^2e^2 = 0 : \quad (1)$$

Dacă  $e \neq 1$  alegem  $O$  astfel încât  $de^2 - c = 0$ , deci  $c^2 - d^2e^2 = e^2d^2(e^2 - 1)$  și ecuația (8) devine

$$\frac{x^2}{d^2e^2} + \frac{y^2}{d^2e^2(1 - e^2)} = 1.$$

Dacă  $e \in (0, 1)$  rezultă că  $P$  aparține unei elipse, iar dacă  $e > 1$  rezultă că  $P$  aparține unei hiperbole. Observăm că  $a = e|d| = \frac{|c|}{e}$ .

Dacă  $e = 1$ , (8) devine

$$y^2 + 2x(d - c) + c^2 - d^2 = 0.$$

Alegem  $O$  astfel încât  $d = -c$ , deci ecuația devine  $y^2 = 2px$ , cu  $p = 2c$ . În cazul acesta  $P$  aparține unei parabole.

Reciproc, am demonstrat deja că dacă  $P$  aparține unei elipse, unei hiperbole ori unei parabole, el are proprietatea  $\frac{d(P, F)}{d(P, \delta)} = e$ , cu  $e = \frac{c}{a}$  în primele două cazuri și  $e = 1$  pentru parabolă.  $\square$

## Partea III

# Temă

**Exercițiul 6.** Pentru următoarele parabole, determinați coordonatele focarelor, vârfurilor, excentricitatea, ecuațiile directoarelor apoi reprezentați-le grafic într-un sistem de coordonate ales convenabil.

1.  $y^2 = 8x$ ;
2.  $y^2 = -10x$ ;
3.  $x^2 = 8y$ ;
4.  $x^2 = -y$
5.  $y^2 = 4x + 4$ .

**Exercițiul 7.** Scrieți ecuațiile parabolilor determinate prin condițiile următoare, apoi reprezentați-le grafic:

1. parabola cu focarul  $F(-2, 0)$  și directoarea  $(\delta) x = 2$ ;
2. parabola cu focarul  $F(0, 4)$  și directoarea  $(\delta) y = -4$ ;
3. parabola cu focarul  $F(0, -1)$  și directoarea  $(\delta) y = 1$ ;

**Exercițiul 8.** Considerăm parabola  $(\mathcal{P}) : x^2 = 4y$ .

1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în  $M(2, 1)$  la parabolă.
2. Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta  $y = 4x$ .
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior  $P(4, 2)$ .

**Exercițiul 9.** Considerăm parabola  $(\mathcal{P}) : y^2 = 2x$ .

1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei în  $M(2, 2)$  la parabolă.
2. Determinați ecuația tangentei la parabolă paralelă cu dreapta  $y = 4x$ .
3. Scrieți ecuațiile tangentelor la parabolă duse din punctul exterior  $P(-2, 2)$ .

**Exercițiul 10.** Fie  $T_1$  și  $T_2$  punctele de contact ale tangentei duse din  $P(x_0, y_0)$  la o conică nedegenerată (considerați ecuații canonice). Atunci dreapta  $T_1T_2$  are ecuația obținută din ecuația conicii prin dedublare în  $P$ . Numim dreapta  $T_1T_2$  polara lui  $P$  în raport cu conica dată.