Aducerea conicelor pe ecuatii generale la forma canonica

Fie Γ o conica ce are in raport cu reperul ortonormat, pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ ecuatia:

$$\Gamma: \ f(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{1}$$

Amintim ca $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}),\ B = (a_{10}\ a_{20}),\ D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

$I := Trace A = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ si $\Delta = det D$ sunt invarianti ortogonali ai conicei, adica nu se modifica la o schimbare de repere ortonormate.

Numarul real $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, adica suma minorilor diagonali de ordinul 2 ai lui D, este un invariant centro-ortogonal al lui Γ, adica ramane neschimbat la o rotatie de repere carteziene ortonormate. Daca in plus $\delta = \Delta = 0$, atunci Δ_1 este chiar un invariant ortogonal al conicei.

Teorema de clasificare izometrica a conicelor Invariantii ortogonali si centro-ortogonali ai unei conice permit determinarea naturii conicei ca in tabelul urmator:

Nr.	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	Genul conicei	Tipul conicei	Denumirea conicei
1	>0	$\neq 0$	<0		eliptic	nedegenerat	elipsa
2	>0	$\neq 0$	>0		eliptic	nedegenerat	elipsa imaginara
3	>0	0			eliptic	degenerat	punct dublu
4	<0	$\neq 0$			hiperbolic	nedegenerat	hiperbola
5	<0	0			hiperbolic	degenerat	drepte concurente
6	0	$\neq 0$			parabolic	nedegenerat	parabola
7	0	0		<0	parabolic	degenerat	drepte paralele
8	0	0		0	parabolic	degenerat	dreapta dubla
9	0	0		>0	parabolic	degenerat	drepte imaginare paralele

(1) In raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se da conica

$$\Gamma: \; 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Aduceti aceasta conica la forma canonica si reprezentati-o grafic.

Calculam invariantii ortogonali necesari determinarii conicei.

Avem $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, deci $I = 13$ si $\delta = 36$. De asemenea $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}$, deci $\Delta = -1296$. Deoarece $\delta > 0$ si $I\Delta < 0$, rezulta ca Γ este o elipsa.

Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + \delta = \lambda^2 - 13\lambda + 36$, deci valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 4$ si $\lambda_2 = 9$.

Ecuatia elipsei, in raport cu reperul canonic, inca nedeterminat, este

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} - 1 = 0.$$

Reperul canonic $\mathcal{R}' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$ este determinat de: originea sa, C, este centrul de simetrie al conicei, iar baza sa e formata din vectori proprii ai lui A, corespunzatori celor doua valori proprii.

Rezolvand sistemul scris matricial $(A - 4I_2)U = O$, unde $U = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ contine coordonatele unui vector propriu al lui A corespunzator lui $\lambda_1 = 4$, obtinem $U(4) = \{\bar{u} = -2\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{i} - \bar{j})$. Stim ca vectorii proprii corespunzatori unor valori proprii distincte ale unei matrice simetrice sunt ortogonali, de aceea putem alege direct $\bar{j}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{i} + 2\bar{j})$ un vector propriu corespunzator lui $\lambda_2 = 9$.

Originea C a reperului canonic este centrul de simetrie al elipsei. Fie $S_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ matricea coloana a coordonatelor sale. Ea se obtine ca solutie unica a ecuatii matriciale

$$^t S_0 A + B = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 + 2y_0 & = 16 \\ 2x_0 + 8y_0 & = 28 \end{cases}.$$

Deducem $C(2, 3)$ in raport cu $\mathcal{R}$. Astfel am determinat complet reperul canonic.

Axele reperului canonic $\mathcal{R}' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$ sunt determinate astfel. Cx' trece prin C si are ca vector director vectorul propriu $\bar{i}'$, iar Cy' trece prin C si are ca vector director pe $\bar{j}'$. Obtinem

$$Cx': \; x + 2y - 8 = 0, \;\; Cy': \; 2x - y - 1 = 0.$$

Pentru o reprezentare grafica cat mai riguroasa, putem sa ne folosim si de intersectiile elipsei cu axele reperului initial, Ox si Oy: $\Gamma \cap Oy = \{P(0, 2), Q(0, 5)\}$ si $\Gamma \cap Ox = \emptyset$.

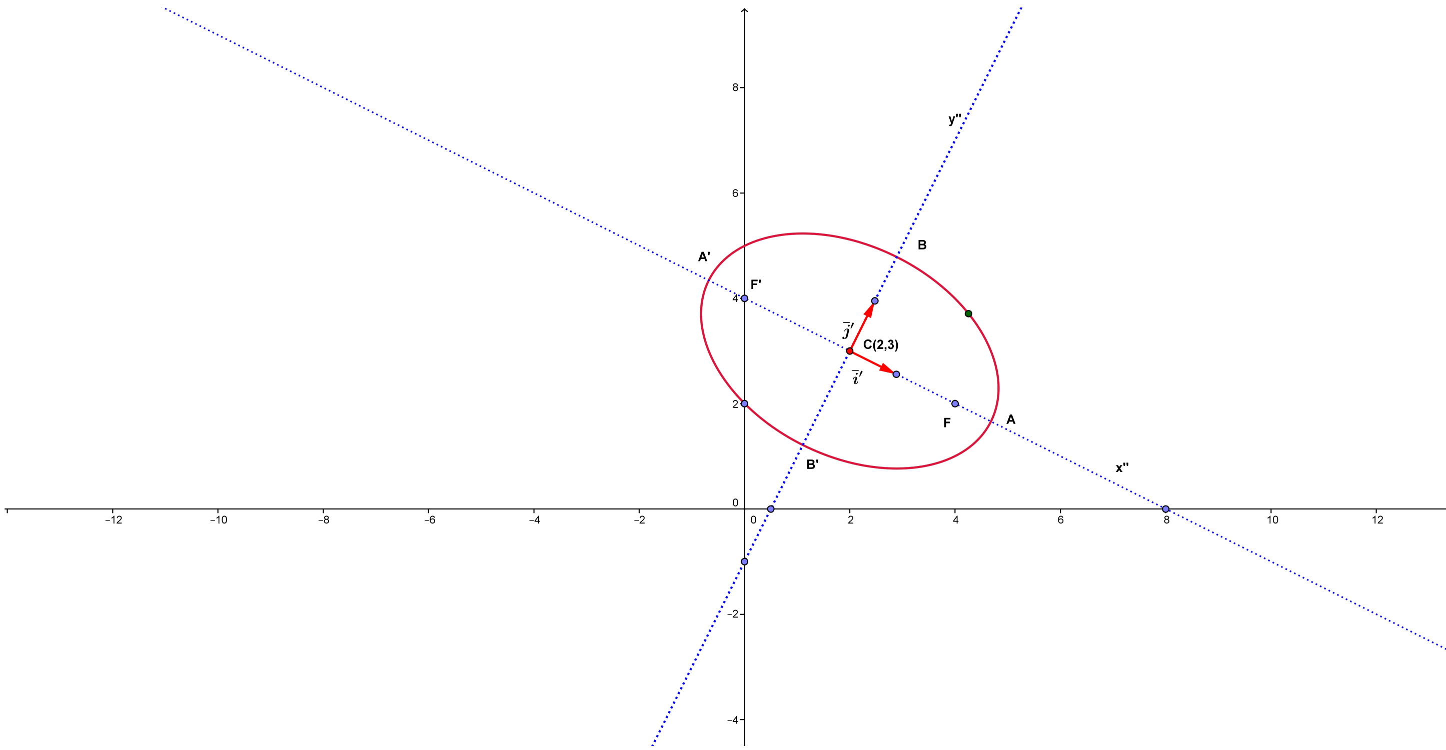
Facultativ (dar util): Formula schimbarii de coordonate la schimbarea de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$ este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Elipsa are varfurile $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ si $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$, in raport cu $\mathcal{R}'$. Folosindu-ne de formula schimbarii de coordonate, obtinem $x_A = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$ si $y_A = 3 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Analog procedam cu celelalte trei varfuri ale elipsei.

De asemenea, focarele elipsei au in raport cu reperul canonic coordonatele $x'_F = \sqrt{5}$, $y'_F = 0$ si $x'_{F'} = -\sqrt{5}$, $y'_{F'} = 0$, iar in raport cu reperul initial obtinem $F(4, 2)$ si $F'(0, 4)$.



(2) In raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se da conica

$$\Gamma: \ 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Aduceti aceasta conica la forma canonica si reprezentati-o grafic.

Determinam $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ si $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}$, deci $I = 8$, $\delta = -9$, $\Delta = 81$. Deoarece $\delta < 0$ si $\Delta \neq 0$ rezulta ca Γ este o hiperbola.

Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 9$, deci $\lambda_1 = -1$ si $\lambda_2 = 9$ sunt valorile proprii ale lui A.

Ecuatia canonica a hiperbolei este

$$-(x')^2 + 9(y')^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{1} = 1.$$

Observam ca hiperbola are focarele si varfurile pe axa Cy'.

Ca si in exemplul precedent determinam subspatiul liniar al vectorilor proprii corespunzatori lui $\lambda_1 = -1$, $U(-1) = \{-3\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ si alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(3\bar{i} - \bar{j})$. Fie $\bar{j}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(\bar{i} + 3\bar{j}) \perp \bar{i}'$ un vector propriu corespunzator lui $\lambda_2 = 9$.

Coordonatele originii C a reperului canonic se obtin din

$$^tS_0 A + B = O, \ S_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y_0 & = 6 \\ 3x_0 + 8y_0 & = 13 \end{cases}.$$

Deci $C(-1, 2)$.

Axele reperului canonic sunt $Cx' = C + [\bar{i}']$ si $Cy' = C + [\bar{j}']$, de ecuatii

$$Cx': \ x + 3y - 5 = 0, \ Cy': \ 3x - y + 5 = 0.$$

Asimptotele hiperbolei au, in raport cu reperul $\mathcal{R}' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ecuatiile $a_1: \ y' = \frac{1}{3}x'$ si $a_2: \ y' = -\frac{1}{3}x'$. Deci au vectorii directori $\bar{a}_1 = 3\bar{i}' + \bar{j}'$, respectiv $\bar{a}_2 = 3\bar{i}' - \bar{j}'$.

Formula schimbarii de coordonate la schimbarea de baze este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

deci $\bar{a}_1 = \sqrt{10}\, \bar{i}$ si $\bar{a}_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})$.

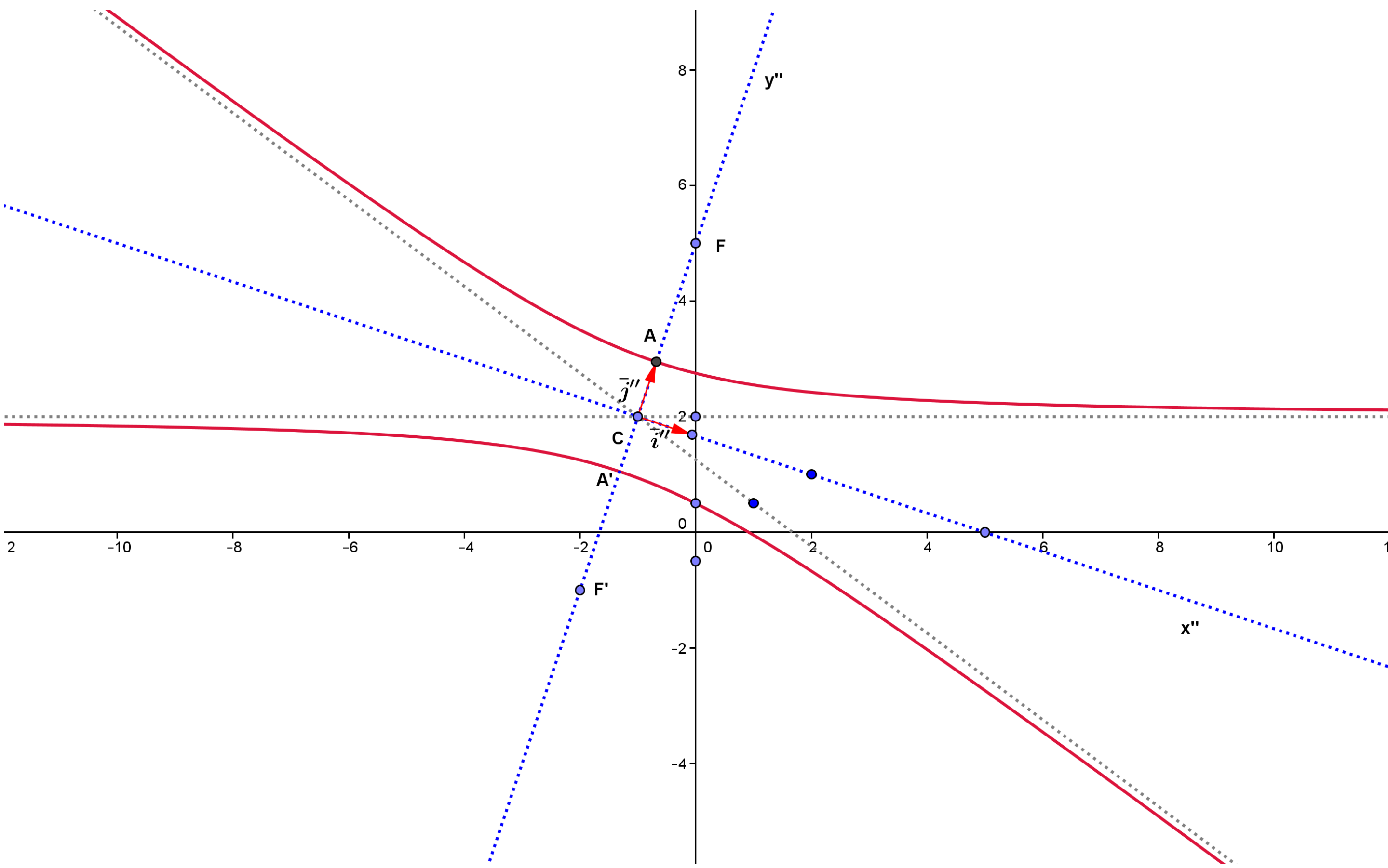
Asimptotele trec prin C si au directiile date de $\bar{a}_1 = \sqrt{10}\, \bar{i}$, $\bar{a}_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})$, deci au ecuatiile

$$a_1 : \; y = 2, \; a_2 : \; 3x + 4y - 5 = 0.$$

Intersectiile hiperbolei cu axele Ox, Oy sunt $\Gamma \cap Ox = \left\{P(\frac{11}{12}, 0)\right\}$ si $\Gamma \cap Oy = \left\{Q(0, \frac{11}{4}),\, R(0, \frac{1}{2})\right\}$.

Varfurile hiperbolei, in raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'$, au coordonatele $A(0,1)$ si $A'(0,-1)$. Pentru o reprezentare grafica riguroasa determinati coordonatele acestora in raport cu reperul initial $\mathcal{R}$.

De asemenea verificati ca focarele hiperbolei au, in raport cu reperul initial, coordonatele $F(0,5)$ si $F'(-2,-1)$.



(3) In raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se da conica

$$\Gamma: \ 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Aduceti aceasta conica la forma canonica si reprezentati-o grafic.

$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ si $D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rezulta ca $I = 10$. $\delta = 0$, $\Delta = -100$. Deoarece $\delta = 0$ si $\Delta \neq 0$, Γ este o parabola.

Valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 0$ si $\lambda_2 = 10$.

Ecuatia canonica a parabolei este $(y')^2 = \pm 2px'$, unde $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}$, deci

$$(y'') = \pm \frac{2\sqrt{10}}{10} x'.$$

Semnul din dreapta egalului va fi determinat la final.

Reperul canonic $\mathcal{R}' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$ are originea V - varful parabolei (atentie, parabola nu are centru de simetrie!) iar baza e formata din vectori proprii ai lui A.

Determinam $U(0) = \{\alpha \bar{i} + 3\alpha \bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ si alegem de exemplu $\bar{i}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(\bar{i} + 3\bar{j})$ si $\bar{j}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(-3\bar{i} + \bar{j}) \perp \bar{i}'$.

Deci matricea de trecere de la baza reperului initial la baza reperului canonic este $S = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinam mai intai ecuatia axei de simetrie a parabolei, dreapta Vx', chiar daca nu cunoastem inca pe V.

Stim ca la schimbarea de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ecuatia matriciala a parabolei devine

$${}^tX'A'X' + 2B'X' + a'_{00} = 0, \quad A' = {}^t SAS, \ B' = \begin{pmatrix} a'_{10} & a'_{20} \end{pmatrix} = \left({}^tS_0A + B\right) S, \quad a'_{00} = f\left(S_0\right).$$

Am ales reperul canonic a.i. A' sa fie matrice diagonala, $a'_{20} = 0$ si $a'_{00} = 0$.

Dar $a'_{20} = 0$ daca si numai daca matricea $S_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ verifica ecuatia matriceala

$$\left({}^tS_0A + B\right) U_2 = 0,$$

unde U_2 e matricea asociata celei de a doua coloane a lui S.

Deci

$$\left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - y_0 + 3 = 0.$$

Deci axa de simetrie e dreapta de ecuatie $Vx': \ 3x - y + 3 = 0$.

Varful parabolei se obtine intersectand axa de simetrie cu parabola:

$$\begin{cases} 3x - y + 3 & = 0, \\ 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x & = 0, \end{cases}$$

Deci $V(-\frac{9}{20}, \frac{33}{20})$ in raport cu reperul initial.

Putem verifica acum ca daca scriem ecuatia dreptei ce trece prin V si are directia data de $\bar{i}'$, obtinem exact $3x - y + 3 = 0$.

Pentru a scrie ecuatia axei Vy', fie folosim ca e dreapta ce trece prin V si are directia data de $\bar{j}'$, sau ca e perpendiculara pe Vx' in V, sau ca e tangenta in V la parabola. Obtinem $Vy'': \ x + 3y - \frac{9}{2} = 0$.

Determinam si $\Gamma \cap Ox = \left\{O, P(-\frac{20}{9}, 0)\right\}$ si observam ca Γ taie Oy in punctul dublu O. Deci parabola este tangenta axei Oy in O.

Aceste puncte de intersectie ne ajuta sa deducem ca parabola este situata in semiplanul $x' \leq 0$, deci ecuatia canonica a ei este $(y'') = -\frac{2\sqrt{10}}{10}x'$.

Schimbarea de coordonate la schimbarea de repere este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{20} \\ \frac{33}{20} \end{pmatrix}.$$

Vom folosi aceasta formula pentru a determina coordonatele focarului si ecuatia directoarei in raport cu reperul initial.

Focarul parabolei are coordonatele $F(-\frac{\sqrt{10}}{20}, 0)$ in raport cu reperul canonic si $F(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ in raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Ecuatia directoarei in raport cu reperul canonic este $d:\ x' = \frac{\sqrt{10}}{20}$.

In formula schimbarii de repere $\begin{cases} 20x & = 2\sqrt{10}(x' - 3y') - 9 \\ 20y & = 2\sqrt{10}(3x' + y') + 33 \end{cases}$ inlocuim $x' = \frac{\sqrt{10}}{20}$ si eliminam pe y'.

Obtinem astfel ca in raport cu reperul initial, ecuatia directoarei este $d:\ x + 3y - 5 = 0$.