

SEMINAR4: APLICATII ALE PRODUSULUI SCALAR

- (1) Fie \mathcal{V} spatiul liniar al vectorilor liberi inzestrat cu produsul scalar canonic.
- (a) Fie vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ cu $\|\bar{a}\| = 1, \|\bar{b}\| = 2, \|\bar{c}\| = 3, m(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{6}, m(\widehat{\bar{a}, \bar{c}}) = \frac{\pi}{4}, m(\widehat{\bar{c}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.
Calculati $\|\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}\|$.
- (b) Calculati $\langle \bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c}, 2\bar{a} - \bar{c} \rangle$, daca $\|\bar{a}\| = 2, \|\bar{b}\| = 1, \|\bar{c}\| = 1, m(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}, m(\widehat{\bar{a}, \bar{c}}) = \frac{\pi}{4}, m(\widehat{\bar{c}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{6}$.
- (c) Gasiti valoarea numerica a scalarului $3 \langle \bar{m}, \bar{m} \rangle - 2 \langle \bar{m}, \bar{n} \rangle + 4 \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle$, daca $\|\bar{m}\| = \frac{1}{3}, \|\bar{n}\| = 6, m(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
- (2) Fie $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ o baza ortonormata in \mathcal{V} .
- (a) Sa se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat vectorii $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ si $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$ sa fie perpendiculari.
- (b) Sa se determine unghiul dintre vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}$ si $\bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$.
- (c) Sa se determine vectorul \bar{u} cu proprietatile

$$\bar{u} \perp \bar{a}, \bar{u} \perp \bar{b}, \quad \|\bar{u}\| = 14, \quad \angle(\widehat{\bar{u}, \bar{j}}) > \frac{\pi}{2},$$

unde

$$\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}, \quad \bar{b} = 18\bar{i} - 22\bar{j} - 5\bar{k}.$$

- (3) Fiind dati vectorii $\overrightarrow{OA} = 12\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}, \overrightarrow{OB} = 3\bar{i} + 12\bar{j} - 4\bar{k}, \overrightarrow{OC} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, unde $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ este o baza ortonormata in \mathcal{V} , demonstrati ca: a) triunghiul AOB este isoscel; b) triunghiul AOC este dreptunghic; c) calculati perimetrul triunghiului ABC ; d) calculati $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.
- (4) Fie $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ o baza ortonormata in \mathcal{V} si vectorii $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \overrightarrow{OB} = \frac{4}{7}\bar{i} + \frac{13}{7}\bar{j} + \frac{9}{7}\bar{k}, \overrightarrow{OC} = \frac{5}{7}\bar{i} + \frac{4}{7}\bar{j} + \frac{13}{7}\bar{k}, \overrightarrow{OD} = \frac{13}{7}\bar{i} + \frac{9}{7}\bar{j} + \frac{10}{7}\bar{k}$.
- (a) Demonstrati ca $ABCD$ este tridreptunghic in A .
- (b) Determinati lungimile muchiilor si unghiurile fetei BCD .
- (5) Se da hexagonul regulat $OABCDE$ avand $OA = 2$. Calculati urmatoarele produse scalare: a) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle$; b) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle$; c) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle$; d) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE} \rangle$; e) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \rangle$.
- (6) Fie cubul $ABCA'B'C'D'$ de muchie a . Calculati urmatoarele produse scalare: a) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$; b) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle$; c) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'} \rangle$; d) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'} \rangle$; e) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} \rangle$; f) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'} \rangle$; g) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'} \rangle$; h) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D} \rangle$.
- (7) Intr-un triunghi dreptunghic isoscel se duc mediane din varfurile unghiurilor ascutite. Sa se calculeze unghiul dintre aceste mediane.
- (8) Notand cu \bar{a}, \bar{b} vectorii atasati laturilor care pornesc din acelasi varf al unui romb, sa se demonstreze ca diagonalele rombului sunt perpendiculare intre ele.
- (9) Demonstrati vectorial:
- (a) teorema lui Pitagora intr-un triunghi si reciproca ei: dat $\triangle ABC$ cu $BC = a, CA = b, AB = c$, atunci \widehat{BAC} este unghi drept daca si numai daca $c^2 = a^2 + b^2$.

(b) teorema cosinusului intr-un triunghi: dat $\triangle ABC$ cu $BC = a, CA = b, AB = c$, atunci $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ si $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$;

(c) teorema medianei intr-un triunghi: fie $\triangle ABC$ si A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB .

Atunci $4(AA')^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2, 4(BB')^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2, 4(CC')^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$.

(10) Intr-un tetraedru $ABCD$ lungimea medianei AM din A se calculeaza prin

$$9AM^2 = 3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - BD^2 - BC^2 - CD^2,$$

iar lungimea bimediane RS , cu R mijlocul lui (AC) si S mijlocul lui (DB) este data de

$$4RS^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - AC^2 - BD^2.$$

(11) Fie $\triangle ABC$ cu $AB \neq AC, A'$ si A'' respectiv picioarele bisectoarelor interioare si exterioare ale unghiului A . Demonstrati ca

$$\|\vec{AA'}\|^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}, \|\vec{AA''}\| = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-a)(p-b)},$$

unde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Indicatie: se exprima $\vec{AA'}, \vec{AA''}$ in functie de vectorii \vec{AB}, \vec{AC} si se foloseste formula $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 2 \frac{p(p-a)}{bc}$.

(12) Demonstrati vectorial teorema celor trei perpendiculare: Fie planul α , dreapta $d \subset \alpha$ si punctul $A \notin \alpha$. Fie B proiectia lui A pe α si C proiectia lui B pe d . Atunci $AC \perp d$.

(13) Demonstrati concurenta inaltimilor unui triunghi. Apoi demonstrati ca vectorul de pozitie al ortocentrului triunghiului ABC este dat de

$$\vec{r}_H = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC} \vec{r}_A + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC} \vec{r}_B + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC} \vec{r}_C.$$

(14) Demonstrati vectorial ca intr-un tetraedru regulat muchiile opuse sunt perpendiculare.

(15) Fie tetraedrul $ABCD$.

(a) Daca $AB \perp CD$ si $AC \perp BD$, atunci $BC \perp AD$. Un tetraedru cu muchiile opuse doua cate doua ortogonale se numeste tetraedru ortocentric.

(b) Demonstrati ca intr-un tetraedru ortocentric inaltimile sunt concurente.

(16) Demonstrati ca intr-un triunghi ABC centrul cercului circumscris O , centrul de greutate G si ortocentrul H sunt coliniare si $\vec{GH} = 2\vec{OG}$ (dreapta ce contine aceste puncte se numeste dreapta lui Euler).

Rezolvare Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC si O' simetricul lui O fata de BC . Fie H pe inaltimea AD astfel incat $AH = OO'$. Notam $\vec{OA} = \vec{x}, \vec{OB} = \vec{z}, \vec{OC} = \vec{y}$. Fie Q mijlocul lui (BC) . Atunci $2\vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{OC}$. Dar $\vec{OO'} = 2\vec{OQ} = \vec{y} + \vec{z} = \vec{AH}$. Deci $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$. Daca am repeta rationamentul pentru alta inaltime a triunghiului ABC am obtine acelasi rezultat, deci H este ortocentrul triunghiului ABC . Fie G punctul de intersectie al medianei AQ cu dreapta HO . Din asemanarea triunghiurilor GAH si GOQ rezulta ca G este centrul de greutate al triunghiului.

(17) Intr-un triunghi ABC , picioarele inaltimilor, picioarele medianelor si mijloacele segmentelor ce unesc H cu varfurile triunghiului sunt conciclice (cercul lui Euler).

Rezolvare Vom avea nevoie de toate rezultatele din problema precedenta, astfel ca vom pas-
tra notatiile respective. In plus fie O'' mijlocul lui (HO) si L mijlocul lui (AH) . In triunghiul
 OHA segmentul $O''L$ este linie mijlocie, deci $\overrightarrow{O''L} = \frac{1}{2}\vec{x}$. Deoarece $\overrightarrow{O''B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO''}$, $\overrightarrow{O''C} =$
 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO''}$, $\overrightarrow{OO''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$, rezulta $\overrightarrow{O''B} = \frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{x} - \vec{y})$, $\overrightarrow{O''C} = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{z} - \vec{x})$. Deci
 $\overrightarrow{O''Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O''B} + \overrightarrow{O''C}) = -\frac{1}{2}\vec{x}$. Astfel am obtinut $|\overrightarrow{O''Q}| = |\overrightarrow{O''L}| = \frac{1}{2}|\vec{x}|$, adica Q si Q' sunt
situate pe cercul cu centrul in O'' si de raza egala cu jumatatea razei cercului circumscris.