Drepte, plane, distante, arii, volume

Cadrul de lucru: spatiul afin euclidian geometric $\mathcal{E}_3 = \{\mathcal{S}, \mathcal{V}, \Phi\}$, inzestrat cu reperul cartezian pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

1. In raport cu $\mathcal{R}$ se dau punctele $O'(1,0,2)$, $A(1,-1,2)$, $B(0,2,-2)$, $C(1,1,1)$ si vectorii $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{f}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{f}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_1 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{v}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.

   (a) Scrieti ecuatiile schimbarii de coordonate la schimbarea de repere carteziene $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \{O'; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$. Determinati coordonatele lui A in raport cu $\mathcal{R}'$.

   (b) Scrieti, in raport cu reperul $\mathcal{R}$, respectiv $\mathcal{R}'$, toate tipurile de ecuatii pentru dreapta d ce trece prin A si are spatiul liniar director generat de $\bar{v}_1$.

   (c) Scrieti, in raport cu reperul $\mathcal{R}$, respectiv $\mathcal{R}'$, toate tipurile de ecuatii pentru planul α ce trece prin B si are spatiul liniar director generat de $\bar{v}_1$ si $\bar{v}_2$.

   (d) Scrieti, in raport cu $\mathcal{R}$, ecuatiile urmatoarelor subspatii afine:

      i. dreapta AB;

      ii. dreptele ce trec prin O si au respectiv vectorii directori $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

      iii. planul ce contine dreapta $\delta : \frac{x^1-2}{2} = \frac{x^2+1}{-3} = \frac{x^3-2}{-1}$ si punctul A;

      iv. planul ce contine dreptele δ si $\delta' : \frac{x^1-2}{1} = \frac{x^2+1}{-1} = \frac{x^3-2}{1}$;

      v. planul ce trece prin punctele A, B, C;

      vi. planele ce trec prin O si au ca spatiile liniare directoare generate respectiv de cate doi dintre vectorii bazei reperului $\mathcal{R}$.

   (e) Determinati ecuatiile parametrice si canonice pentru dreapta

$$l : \begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 + 1 &= 0, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 - 2 &= 0. \end{cases}$$

   (f) Scrieti ecuatiile parametrice ale planului $\pi : x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 1 = 0$.

2. Determinati diferite tipuri de ecuatii pentru urmatoarele subspatii afine:

   (a) dreapta ce trece prin $A(1,2,3)$ si este paralela cu dreapta $d : \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 &= 0, \\ 2x^1 - x^2 + 3x^3 - 1 &= 0; \end{cases}$

   (b) planul ce trece prin $B(2,-4,4)$ si e paralel cu dreptele $d_1 : \frac{x^1+5}{3} = \frac{x^2-7}{2} = \frac{x^3+12}{-3}$ si $d_2 : \frac{x^1+10}{3} = \frac{x^2-4}{5} = \frac{x^3-1}{2}$.

   (c) planul ce trece prin $C(2,1,0)$ si e paralel cu planul $\pi : x^1 - 2x^2 + x^3 + 4 = 0$.

   (d) planul ce trece prin $D(1,1,1)$ si e paralel cu planul $\alpha : \begin{cases} x^1 &= 5 + 2t - 2s, \\ x^2 &= 3 - t + 3s, \\ x^3 &= -2 - 3t - 2s,\ t, s \in \mathbb{R}; \end{cases}$

   (e) planul ce contine dreapta $\delta : \begin{cases} x^1 &= t - 3, \\ x^2 &= t + 2, \\ x^3 &= t + 1,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$ si e paralel cu planul $\pi : x^1 - 2x^2 + x^3 - 1 = 0$;

   (f) planul ce trece prin $E(1,0,1)$ si e paralel cu planul (ABC).

3. Fie $\mathcal{E}_3$ inzestrat cu reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Se considera dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x^1 - 3x^2 - x^3 - 2 & = 0, \\ 3x^1 + x^2 + x^3 + 1 & = 0, \end{cases} \quad d_2 : \frac{x^1}{3} = \frac{x^2 - 1}{-2} = \frac{x^3 + 1}{1}.$$

Scrieti ecuatiile generale ale dreptei care se sprijina pe d_1 si d_2 si

(a) are directia data de vectorul $\bar{u} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$;

(b) trece prin punctul $A(1, 1, 1)$.

Cadrul de lucru: spatiul afin euclidian geometric $\mathcal{E}_3 = \{\mathcal{S}, \mathcal{V}, \Phi\}$, inzestrat cu reperul cartezian ORTONORMAT pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

1. Sa se scrie diferitele tipuri de ecuatii pentru planul unic determinat de conditiile urmatoare

   (a) trece prin $P(1, 2, 3)$ si este normal dreptei $d : \frac{x^1-1}{3} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3+1}{4}$;

   (b) contine normalele coborate din punctul $A(-3, 2, 5)$ respectiv pe planele

$$\alpha : 4x^1 + x^2 - 3x^3 + 13 = 0, \ \beta : x^1 - 2x^2 + x^3 - 11 = 0.$$

2. Scrieti diferitele tipuri de ecuatii pentru dreapta unic determinata de urmatoarele conditii:

   (a) trece prin $A(1, 2, 1)$ si este normala planului $\pi : x^1 + 2x^2 - x^3 + 1 = 0$;

   (b) trece prin $C(1, 2, 3)$ si este perpendiculara pe planul determinat de dreptele $d_1 : \frac{x^1-1}{4} = \frac{x^2}{5} = \frac{x^3+1}{-2}$ si $d_2 : \frac{x^1-1}{3} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3+1}{4}$.

3.

   (a) Scrieti ecuatiile perpendicularei din $A(3, 1, 2)$ pe dreapta
   $d : \frac{x^1-1}{3} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3+1}{4}$, care taie dreapta d;

   (b) Determinati familia tuturor dreptelor ce trec prin $C(1, 1, 1)$ si sunt perpendiculare pe dreapta $d : \frac{x^1-1}{3} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3+1}{4}$.

4. Care din urmatoarele plane sunt perpendiculare?

$$(\alpha) : \ 2x^1 + 3x^2 - x^3 + 5 = 0, \ \ (\beta) : \ 2x^1 + x^2 + 7x^3 - 1 = 0, \ \ (\gamma) : \ 4x^1 - 2x^2 + 2x^3 - 3 = 0.$$

5. Determinati

   (a) proiectia ortogonala a punctului $P(1, 2, 1)$ pe planul
   $\pi : x^1 + x^2 - x^3 + 1 = 0$, cat si simetricul lui P fata de planul π;

   (b) proiectia ortogonala a punctului $Q(1, 1, 0)$ pe dreapta $\delta : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2+1}{2} = \frac{x^3}{1}$, cat si simetricul lui Q fata de δ;

   (c) proiectia ortogonala a dreptei δ de la (b) pe planul π de la (a), cat si simetrica dreptei δ fata de planul π;

   (d) proiectia ortogonala a dreptei δ de la (b) pe planul $\alpha : 2x^1 - x^2 + 3 = 0$, cat si simetrica dreptei δ fata de α.

6. Pentru fiecare pereche de drepte, studiati pozitia relativa, scrieti ecuatiile perpendicularei (perpendicularelor) comune lor:

(a)
$$(d_1): \ \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2-3}{2} = \frac{x^3-1}{-1}, \quad (d_2): \ \frac{x^1-2}{-2} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3-1}{3};$$

(b)
$$(d_1): \ \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2-3}{2} = \frac{x^3-1}{-1}, \ (d_3): \ \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2-3}{1} = \frac{x^3-1}{1};$$

(c)
$$(d_1): \ \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2-3}{2} = \frac{x^3-1}{-1}, \ (d_4): \ \begin{cases} x^1 &= t, \\ x^2 &= 2t, \\ x^3 &= -t; \end{cases}.$$

7. unghiul dintre dreptele d_1, d_2, respectiv distanţa de la d_1 la d_2, pentru:
   (a) $d_1 : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3}{-1}$ şi $d_2 : \frac{x^1+1}{1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3}{1}$;
   (b) $d_1 : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3}{-1}$ şi $d_2 : \frac{x^1+1}{1} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{-1}$;
8. unghiul dintre dreapta δ şi planul π, respectiv distanţa de la δ la π, pentru:
   (a) $\delta : \begin{cases} x^1 = 2t, \\ x^2 = 1-t, \quad t \in \mathbb{R} \text{ şi } \pi : x^1 + x^2 - x^3 + 1 = 0; \\ x^3 = t, \end{cases}$
   (b) $\delta : \begin{cases} x^1 = 1+t, \\ x^2 = 1-t, \quad t \in \mathbb{R} \text{ şi } \pi : x^1 + x^2 - x^3 + 1 = 0; \\ x^3 = 2+t, \end{cases}$
9. distanţa de la punctul $A(1,2,3)$ la dreapta $\delta : \frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3-2}{-1}$, respectiv distanţa de la A la planul $\pi : 2x^1 + x^2 - x^3 + 2 = 0$, fiecare dintre ele prin două metode;
10. unghiul dintre planele π_1 şi π_2, respectiv distanţa de la π_1 la π_2, pentru:
    (a) $\pi_1 : x^1 + 2x^2 - x^3 + 1 = 0, \ \pi_2 : x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0$;
    (b) $\pi_1 : 2x^1 + x^2 + x^3 + 1 = 0, \ \pi_2 : 4x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 1 = 0$;
11. Se dau punctele $A(0,0,3)$, $B(1,-2,1)$, $C(0,-2,2)$, $D(1,1,1)$. Calculati aria triunghiului ABC, distanta de la A la dreapta BC, volumul tetraedrului $ABCD$ si distanta de la Bla planul (ACD).
12. Fie punctele $A(1,1,1)$, $B(2,2,0)$, $C(3,1,1)$, $D(2,0,2)$.
    (a) Demonstrati ca $ABCD$ este romb si calculati aria sa.
    (b) Scrieti ecuatia planului prin O,paralel cu planul rombului.
    (c) Determinati proiectia ortogonala a lui O pe planul rombului.
    (d) Calculati volumul piramidei $OABCD$.
13. Sa se arate ca volumul tetraedrului care are ca varfuri centrele de greutate ale fetelor unui tetraedru este egal cu $1/27$ din volumul acestuia.
14. Prin varfurile unui triunghi ABC se duc trei drepte paralele, care taie dreptele BC, CA, AB respectiv in A', B', C'. demonstrati ca aria triunghiului $A'B'C'$ este dublul ariei triunghiului ABC. Generalizati pentru un tetraedru.