Tema 10: patrulatere inscriptibile, puterea punctului fata de cerc, tangente la cerc

1. Intr-un patrulater inscriptibil, bisectoarea unui unghi interior si bisectoarea unui unghi exterior opus se intersecteaza pe cercul circumscris patrulaterului.

2. Fie un cerc de centru O si $[AB]$ un diametru al sau. Pe tangenta la cerc in A, de o parte si de alta, se iau punctele D si C. Segmentele $[BC]$ si $[DB]$ taie cercul respectiv in E si F. Aratati ca patrulaterul $DEFC$ este inscriptibil.

3. Fie E punctul de intersectie a dreptelor suport ale laturilor AD si BC ale patrulaterului inscriptibil $ABCD$, iar O centrul cercului circumscris triunghiului EAB. Aratati ca $OE \perp CD$.

4. Sa se arate ca picioarele perpendicularelor duse din varfurile unui patrulater inscriptibil pe diagonalele acestuia sunt varfurile unui patrulater inscriptibil.

5. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}$, M un punct oarecare pe (AB) si N un punct pe $\mathcal{C}$, diferit de A si B. Perpendiculara in N pe NM intersecteaza tangentele in A si B la cercul $\mathcal{C}$ in P, respectiv Q. Fie $\{E\} = MP \cap AN$ si $\{F\} = MQ \cap BN$. Aratati ca $EF \parallel AB$.

6. Se considera patratul $ABCD$ si punctele $E \in (BC)$, $F, G \in (CD)$, $H \in (DA)$, astfel incat $[CE] \equiv [CF]$, $[DG] \equiv [DH]$. Fie $\{K\} = AE \cap BH$, $\{L\} = AE \cap BG$, $\{M\} = AF \cap BG$ si $\{N\} = AF \cap BH$. Aratati ca punctele K, L, M, N sunt conciclice.

7. Fie $\triangle ABC$. Inaltimea AD intersecteaza cercul circumscris triunghiului in E. Se noteaza cu P si T proiectiile lui E pe AC, respectiv a lui B pe tangenta in A la cerc. Sa se arate ca:
   (a) $\widehat{BAE} \equiv \widehat{DPE}$, $\widehat{DEP} \equiv \widehat{BAT}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DPA}$;
   (b) $PD \parallel AT$;
   (c) $ATBD$ este inscriptibil;
   (d) $[TD] \equiv [AP]$.

8. Diametrul $[AB]$ al unui cerc este perpendicular pe o dreapta d, exterioara cercului. Daca M este un punct oarecare al cercului, se noteaza cu P si Q punctele de intersectie ale coardelor $[AM]$ si respectiv $[BM]$ cu dreapta d. Demonstrati ca:
   (a) punctele B, B, P sunt coliniare, unde N este intersectia lui AQ cu cercul;
   (b) patrulaterul $PQMN$ este inscriptibil.

9. (Dreapta lui Simpson) Se considera triunghiul ascutitunghic ABC si punctul P situat in exteriorul triunghiului. Fie L, M, N proiectiile lui P respectiv pe BC, CA, AB. Aratati ca punctele L, M, N sunt coliniare daca si numai daca P se afla pe cercul cercului circumscris triunghiului ABC.

10. Fie P un punct situat pe cercul circumscris patrulaterului inscriptibil $ABCD$ si K, L, M, N proiectiile lui P respectiv pe AB, BC, CD, DA. Aratati ca dreptele AC, KL, MN sunt concurente.

11. Fie $\triangle ABC$ inscris intr-un cerc, D punctul diametral opus lui A, H ortocentrul triunghiului si M mijlocul lui $[BC]$. Demonstrati ca punctele H, M, D sunt coliniare si $OM = \frac{1}{2}AH$.

12. (Cercul lui Euler) Fie $\triangle ABC$, A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [CA], [AB]$, A_0, B_0, C_0 picioarele inaltimilor din A, B, C, H ortocentrul, A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $[AH], [BH], [CH]$. Demonstrati ca $A', B', C', A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ sunt situate pe un cerc cu centrul situat la mijlocul lui $[OH]$ si de raza jumatate din raza cercului circumscris triunghiului ABC.