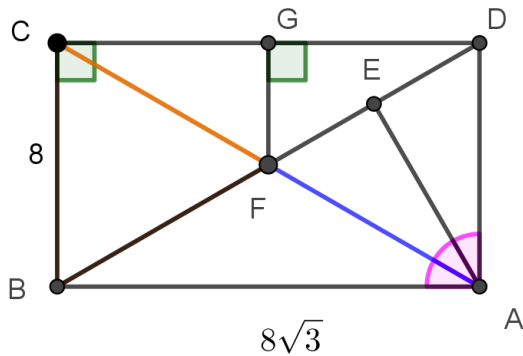


## Tema 11: coliniaritate in plan

Propunem rezolvarea unui set de probleme, cate una subordonata fiecarei metode de demonstrare a coliniaritatii a trei puncte, in plan.

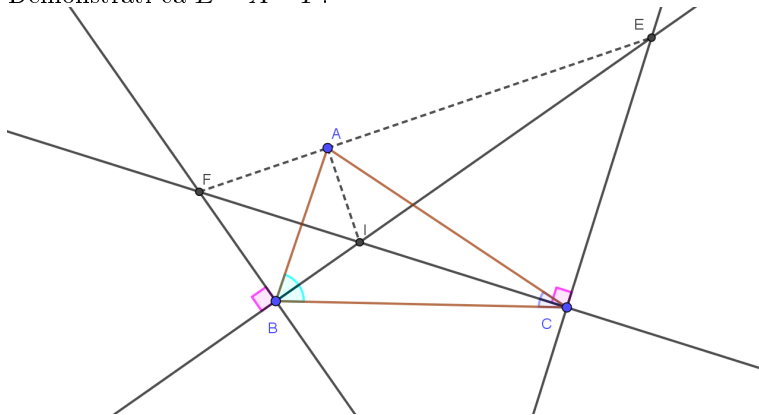
1. **Metoda metrica:**  $A - B - C$  ( $B$  este situat intre  $A$  si  $C$ ) daca si numai daca  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ .  
Fie  $ABCD$  un dreptunghi cu  $AB = 8\sqrt{3}$ ,  $AD = 8$  si punctele  $E, F \in (BD)$  astfel incat  $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{FAB})$ . Demonstrati ca punctele  $A, F, C$  sunt coliniare.



Indicatii: folosind teorema lui Pitagora si functiile trigonometrice in diverse triunghiuri dreptunghice, calculati  $d(A, C)$ ,  $d(C, F)$ ,  $d(F, A)$ . Construiti  $FG \perp CD$ ,  $G \in (CD)$ .

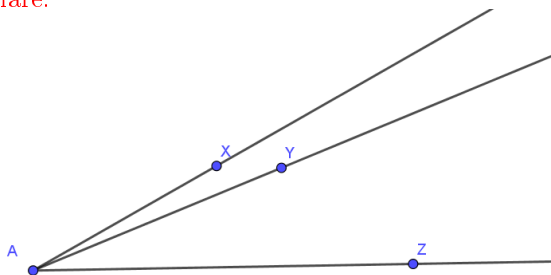
2. **Metoda unghiului alungit:**  $A - B - C \Leftrightarrow m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ .

Fie triunghiul  $ABC$ ,  $E$  intersectia bisectoarei unghiului  $\widehat{ABC}$  cu perpendiculara in  $C$  pe bisectoarea unghiului  $\widehat{ACB}$  si  $F$  intersectia bisectoarei unghiului  $\widehat{ACB}$  cu perpendiculara in  $B$  pe bisectoarea unghiului  $\widehat{ABC}$ . Demonstrati ca  $E - A - F$ .

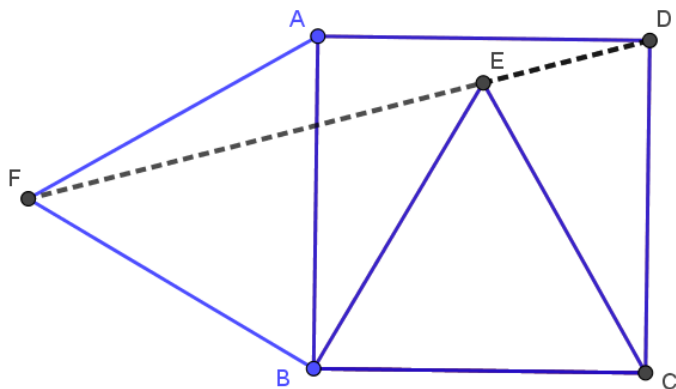


Indicatii: Fie  $\{I\} = BE \cap CF$ , centrul cercului inscris in  $\triangle ABC$ . Calculati masurile unghiurilor  $\widehat{FAI}$  si  $\widehat{IAE}$  si aratati ca sunt unghiuri drepte. Veti folosi faptul ca  $AFBI$  este patrulater inscrisibil.

3. Folosind axioma de existenta si unicitate a unui unghi congruent cu un unghi dat: date semidreptele  $(AX)$ ,  $(AY)$ ,  $(AZ)$  astfel incat  $X, Y$  sunt de aceeasi parte a lui  $AZ$ , daca  $\widehat{YAZ} \equiv \widehat{XAZ}$  atunci  $AX = AY$ , deci  $A, X, Y$  sunt coliniare.

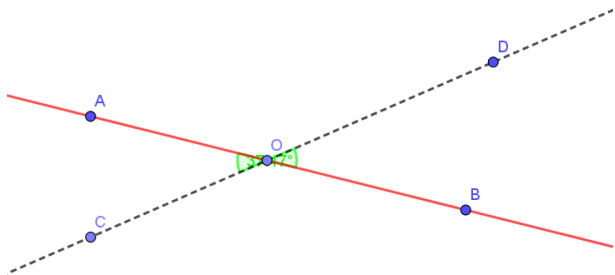


Pe laturile  $(AB)$  si  $(BC)$  ale patratului  $ABCD$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $ABF$ ,  $BCE$ , cu  $E$  in interiorul patratului si  $F$  in exteriorul sau. Aratati ca  $D, E, F$  sunt coliniare.

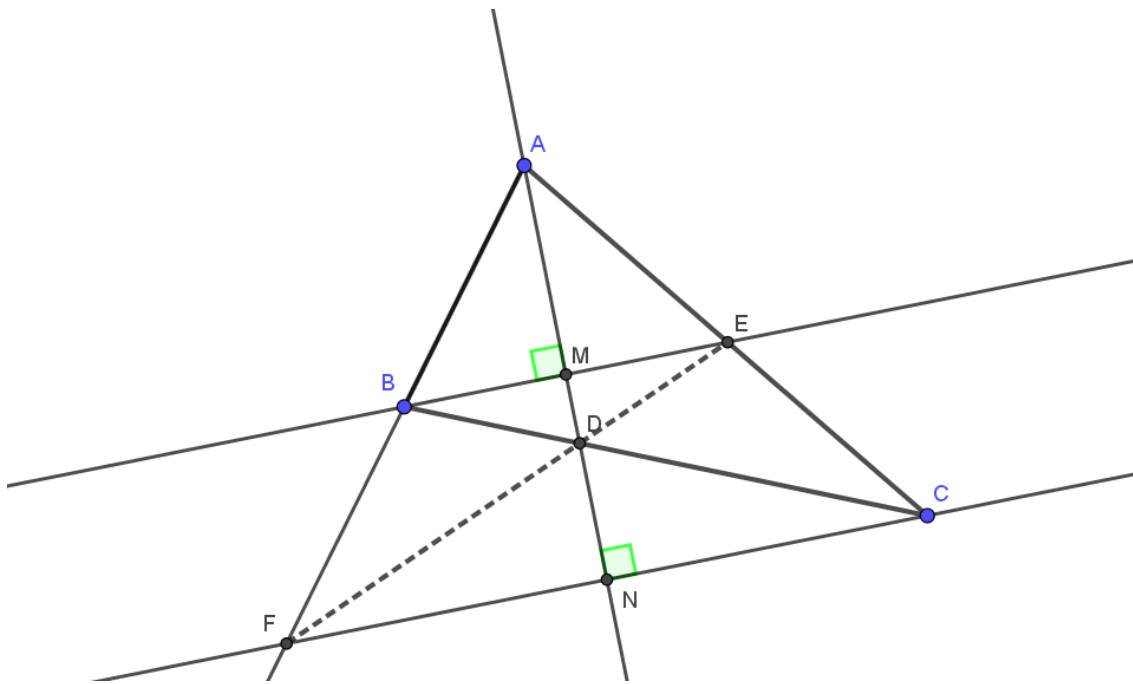


Indicatie: demonstrati ca  $\widehat{ADF} \equiv \widehat{ADE}$ , calculand masurile lor.

4. Folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la varf: daca  $A - O - B$ ,  $C, D$  sunt situate de o parte si de alta a dreptei  $AB$  si  $\widehat{AOC} \equiv \widehat{DOB}$ , atunci  $C - O - D$ .



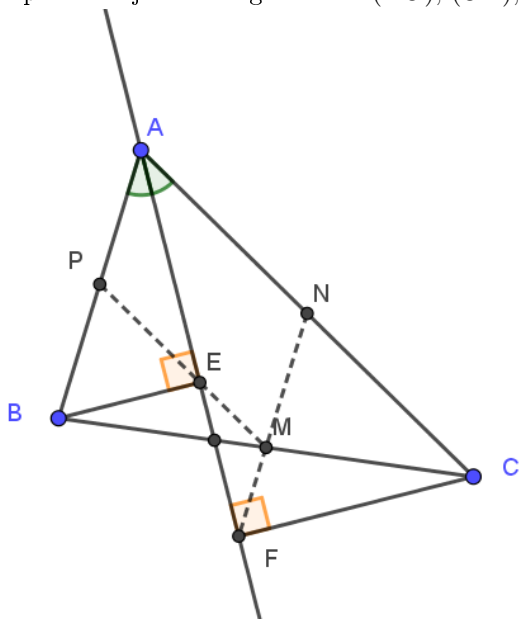
Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB < AC$  si  $D$  intersecția bisectoarei unghiului  $\widehat{BAC}$  cu dreapta  $BC$ . Perpendiculara din  $B$  pe  $AD$  taie  $AC$  in  $E$ , iar perpendiculara din  $C$  pe  $AD$  taie  $AB$  in  $F$ . Demonstrati ca  $D, E, F$  sunt coliniare.



Indicatie: demonstrati ca  $\widehat{BDE} \equiv \widehat{FDC}$ .

5. Folosind axioma paralelelor: daca  $AB \parallel d$  si  $AC \parallel d$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare.

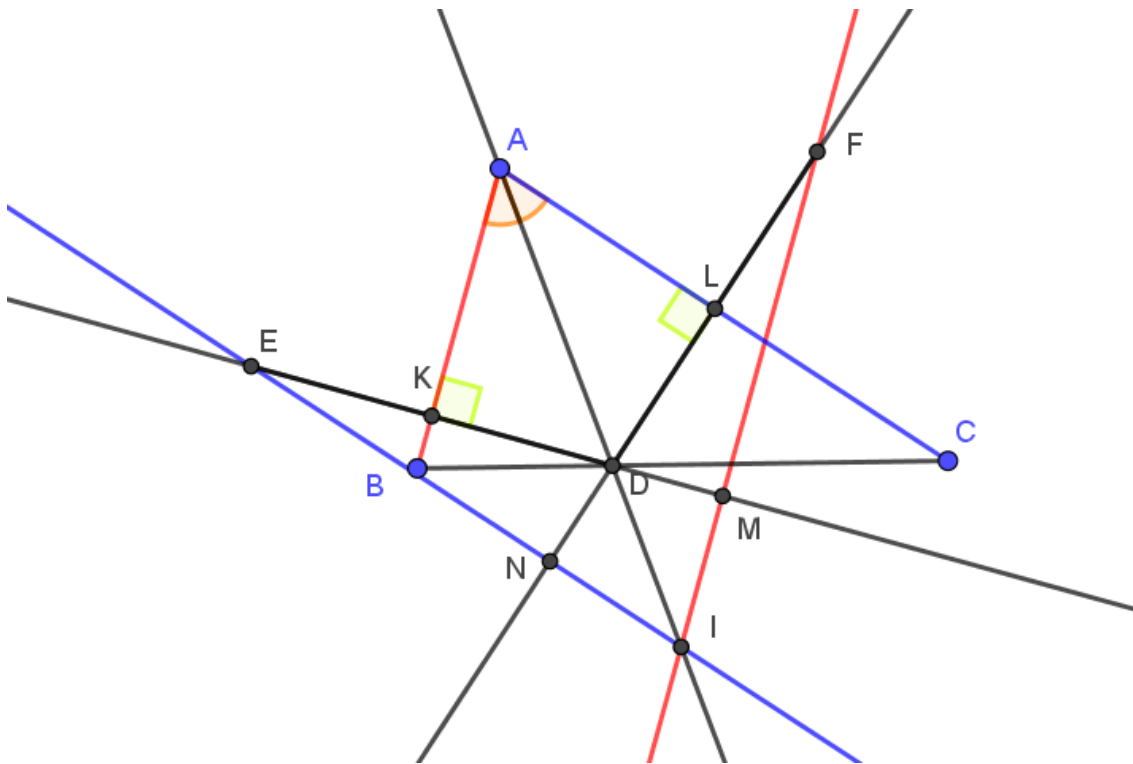
Fie  $\triangle ABC$ ,  $E$  proiectia lui  $B$  pe bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ ,  $F$  proiectia lui  $C$  pe aceeași bisectoare. Fie  $M, N, P$  respectiv mijloacele segmentelor  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ . Demonstrati ca  $M - E - P$  si  $F - M - N$ .



Indicatie: demonstrati ca  $PM \parallel AC$  si  $PE \parallel AC$ , respectiv  $MN \parallel AB$  si  $NF \parallel AC$ .

6. Folosind unicitatea perpendicularei duse (d)intr-un punct pe o dreapta, in plan: daca  $AB \perp d$  si  $AC \perp d$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare.

Fie triunghiul ascutitunghic  $ABC$ , punctul  $D$  pe  $(BC)$  astfel incat  $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAC}$ ,  $E$  simetricul lui  $D$  fata de  $AB$  si  $F$  simetricul lui  $D$  fata de  $AC$ . Paralela prin  $E$  la  $AC$  intersecteaza paralela prin  $F$  la  $AB$  in  $I$ . Demonstrati ca  $A, D, I$  sunt coliniare.



Indicatii: demonstrati ca  $AD \perp EF$  si  $ID \perp EF$ .

7. Utilizarea unei proprietati a paralelogramului: daca  $ABCD$  e paralelogram si  $M$  e mijlocul diagonalei  $(AC)$ , atunci  $B - M - D$ .

Fie triunghiul  $ABC$  in care bisectoarea lui  $\widehat{BAC}$  si si mediana lui  $(AC)$  sunt perpendiculare. Fie  $O$  punctul lor de intersectie. Se noteaza cu  $M, N, P$  respectiv mijloacele laturilor  $(BC), (CA), (BA)$ . Aratati ca  $M, O, P$  sunt coliniare.

8. Demonstrand ca punctele apartin unei drepte remarcabile.

Se da triunghiul isoscel  $ABC$  de baza  $(BC)$  si pe laturile sale se construiesc in exterior triunghiurile echilaterale  $ABD$  si  $ACE$ . Fie  $\{M\} = BD \cap CE$  si  $\{N\} = CD \cap BE$ . Demonstrati ca punctele  $A, M, N$  si mijloacele laturilor  $(BC), (DE)$  sunt coliniare.

Indicatie: se arata ca cele cinci puncte apartin bisectoarei unghiului  $\widehat{BAC}$ .

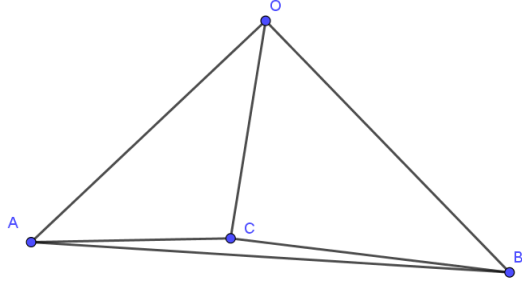
9. Utilizand reciproca teoremei lui Menelaus: se da un triunghi  $ABC$  si punctele  $A' \in BC, B' \in CA, C' \in BA$ , diferite de varfurile triunghiului, astfel incat

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1;$$

atunci punctele  $A', B', C'$  sunt coliniare.

Dreapta  $d$  intersecteaza dreptele suport ale laturilor triunghiului  $ABC$  in punctele  $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ , diferite de varfurile triunghiului. Fie  $D', E', F'$  simetricile punctelor  $D, E, F$  fata de mijloacele laturilor  $(BC), (CA)$ , respectiv  $(AB)$ . Demonstrati ca  $D', E', F'$  sunt coliniare.

10. Utilizand proprietatile functiei arie: daca  $C \in \widehat{IntAOB}$  si  $A_{[AOB]} = A_{[AOC]} + A_{[BOC]}$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare.



Fie rombul  $ABCD$  cu  $AB = 12$ ,  $AC = 12\sqrt{3}$  si triunghiurile echilaterale  $ABF$  si  $ADE$  situate in exteriorul rombului. Aratati ca  $F, A, E$  sunt coliniare.

Indicatie: Se arata ca  $A_{[FCE]} = A_{[FCA]} + A_{[ACE]}$ .

11. **Metoda analitica:** In raport cu un reper cartezian ortonormat se dau punctele  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$ ;  $A, B, C$  sunt coliniare daca si numai daca

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Intr-un reper cartezian, fie punctele  $A(2, 0)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(0, -2)$  si  $D(0, 6)$ . Fie  $E$  mijlocul lui  $(AD)$  si  $F$  mijlocul lui  $(BC)$ . Aratati ca mijloacele segmentelor  $(AC)$ ,  $(BD)$ ,  $(EF)$  sunt coliniare.

12. **Metoda vectoriala:**  $A, B, C$  sunt coliniare daca si numai daca  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$  astfel incat  $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$  sau daca si numai daca  $\exists \beta \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$  astfel incat  $\vec{r}_A = \beta \vec{r}_B + (1 - \beta) \vec{r}_C$ .

Demonstrati pe cale vectoriala ca intr-un trapez mijloacele laturilor neparalele si mijloacele diagonalelor sunt puncte coliniare.

13. **Folosind aplicatiile numerelor complexe in geometrie:** Daca punctele  $A, B, C$  au respectiv afixele  $z_A, z_B, z_C$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare daca si numai daca  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}^*$ .

Aratati ca imaginile geometrice ale numerelor complexe  $a = 1 - i$ ,  $b = -1 + 5i$ ,  $c = 2i$  sunt puncte coliniare.