Tema nr 12: concurenta in plan

Enumeram principalele metode de demonstrare a concurentei a minim trei drepte si pentru fiecare metoda propunem o problema.

1. Folosind definitia dreptelor concurente: pentru dreptele a, b, c se demonstreaza ca $a \cap b = \{P\}$, $a \cap c = \{Q\}$ si ca $P = Q$ sau, analog, se demonstreaza ca $a \cap b = \{P\}$ si ca $P \in c$.
   Fie trapezul $ABCD$ in care $AB \parallel CD$ si $AD \perp AB$. Fie E proiectia lui A pe BD si F proiectia lui D pe AC. Aratati ca dreptele AD, BC, EF sunt concurente.
   Indicatie: daca $AD \cap BC = \{M\}$ si $AD \cap EF = \{N\}$, demonstram, folosind teorema lui Menelaus si teorema catetei, ca punctele M, N impart in acelasi raport orientat segmentul (AD), deci $M = N$.

2. Folosind coliniaritatea unor puncte: pentru dreptele a, b, c se demonstreaza ca $a \cap b = \{P\}$ si fie $Q, R \in c$. Daca P, Q, R sunt coliniare, atunci a, b, c sunt concurente in P.
   Fie patratele $OABC$, $OA_1B_1C_1$ notate respectiv in sens trigonometric. Demonstrati ca dreptele $AA_1, BB_1, CC_!$ sunt concurente.

3. Folosind reciproca teoremei lui Ceva: fie $\triangle ABC$ si punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Daca
   $$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1,$$
   atunci AA', BB', CC' sunt concurente.
   Dam si forma trigonometrica a reciprocei teoremei lui Ceva: fie $\triangle ABC$ si punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Daca
   $$\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = 1,$$
   atunci AA', BB', CC' sunt concurente.
   2a) Fie $\triangle ABC$ un triunghi dreptunghic isoscel de baza (BC) si $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Se prelungeste (CB) cu $BE = DB$. Aratati ca mediana din B a triunghiului ABC, mediana din A a triunghiului ABD si mediana din D a triunghiului ADE sunt concurente.
   2b) Fie $\triangle ABC$. Se construiesc in exterior patratele $ABDE$ si $ACFG$. Sa se arate ca BF, CD si inaltimea din A a triunghiului ABC sunt concurente.

4. Utilizand concurenta unor linii importante in triunghi: identificam un triunghi in care dreptele date devin mediane, sau bisectoare, sau inaltimi, sau mediatoare.
   3a) In $\triangle ABC$ se considera D mijlocul lui (AB), E intersectia paralelei prin D la AC cu paralela prin C la AB si $\{F\} = AE \cap BC$. Aratati ca AE, BE, DF sunt concurente.
   3b) Aratati ca paralelele duse prin mijloacele M, N, P ale laturilor $(BC), (CA), (AB)$ ale $\triangle ABC$, respectiv la bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ sunt concurente.
   3c) Fie patratul $ABCD$ si $M \in (BD)$. Fie E piciorul perpendicularei din M pe AB si F piciorul perpendicularei din M pe AD. Aratati ca BF, CM, DE sunt concurente.
   3d) Fie triunghiul ascutitunghic ABC. Pe laturile sale se construiesc in exterior triunghiurile echilaterale BCK, CAL, ABM. Aratati ca dreptele care trec prin mijloacele segmentelor $(KL), (LM), (MK)$ si sunt respectiv perpendiculare pe AB, BC si CA sunt concurente.

5. Metoda analitica: in raport cu un reper cartezian se dau ecuatiile generale a trei drepte: $d_1 : a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $d_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$, cel putin doua dintre ele concurente. Atunci d_1, d_2, d_3 sunt concurente daca si numai daca sistemul format din ecuatiile lor este unic determinat, deci daca si numai daca singurul determinant caracteristic este nul, adica

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Se da un dreptunghi $AOBC$. Pe laturile (OA) si (OB) se considera respectiv punctele M, N astfel incat $OM = ON = a > 0$. Perpendiculara in M pe NM taie AC in D, iar perpendiculara in N pe NM taie BC in E. Sa se arate ca: a) dreptele ND si ME se intersecteaza intr-un punct de pe diagonala AB; b) dreptele ND si MR trec printr-un punct fix cand a este variabil.

6. Metoda vectoriala: dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sunt concurente daca si numai daca exista $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel incat
$$(1-\alpha)\bar{r}_{A_1} + \alpha\bar{r}_{B_1} = (1-\beta)\bar{r}_{A_2} + \beta\bar{r}_{B_2} = (1-\gamma)\bar{r}_{A_3} + \gamma\bar{r}_{B_3}.$$

Fie patrulaterul convex $ABCD$ si G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD si respectiv ABC. Demonstrati ca dreptele AG_A, BG_B, CG_C, DG_D sunt concurente.

7. Utilizand reciproca teoremei lui Carnot: fie $\triangle ABC$ si $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, diferite de varfurile triunghiului; daca
$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0,$$
atunci perpendicularele in A', B', C' pe BC, AC, respectiv BA sunt concurente.
Fie $\triangle ABC$ si $\triangle A'B'C'$ doua triunghiuri astfel incat perpendicularele din A, B, C respectiv pe $B'C', C'A', A'B'$ sunt concurente. Demonstrati ca perpendicularele din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sunt concurente. (cele doua triunghiuri cu aceasta proprietate se numesc ortologice)