Tema 2: Proprietatile triunghiului isoscel, echilateral, dreptunghic, clasa a VIa

1. Fie $\triangle ABC$ isoscel de varf A. Fie D intersectia perpendicularei in B pe AB cu perpendiculara in C pe AC. Fie E simetricul lui B fata de D si F intersectia dreptei AC cu perpendiculara in E pe EB. Demonstrati ca $[FE] \equiv [FC]$.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex in care $AB = AD + BC$. Fie $E \in (AB)$ astfel incat $[AE] \equiv [BC]$. Aratati ca $\triangle CDE$ este echilateral daca si numai daca $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 60°$.

3. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se construieste, in exteriorul sau, triunghiul dreptunghic isoscel BCD cu unghiul drept in D. Aratati ca, daca $(AD$ este bisectoarea lui $\widehat{BAC}$, atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic sau isoscel.

4. Se considera $\triangle ABC$ dreptunghic in A. Fie D intersectia bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$ cu AC si E intersectia perpendicularei din D pe BC cu AB. Aratati ca $[BE] \equiv [BC]$.

5. Se considera $\triangle ABC$ in care $m(\hat{B}) = 60°$. Fie $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ si E intersectia bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$ cu dreapta AD. Demonstrati ca $2AD = 3BE$.

6. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic in A, cu $m(\hat{B}) = 60°$ si punctele $D, I, M \in (BC)$ astfel incat $[AD]$ este inaltime, $(AI$ este bisectoarea lui $\hat{A}$ si $[AM]$ mediana. Sa se arate ca:
   (a) $(AI$ este bisectoarea lui $\widehat{MAD}$;
   (b) $\mathcal{A}_{\triangle MAD} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

7. Fie $\triangle ABC$ echilateral, D simetricul lui B fata de A si E simetricul lui A fata de B. Fie F mijlocul lui $[EC]$ si $AF \cap BC = \{P\}$, $EP \cap AC = \{Q\}$.
   (a) Aratati ca punctul Q este mijlocul lui $[AC]$.
   (b) Calculati CP in functie de lungimea laturii triunghiului ABC si $m(\widehat{DEC})$.

8. Fie $\triangle ABC$ isoscel, de baza $[BC]$. Se noteaza cu D mijlocul lui $[AB]$. In punctele A si B se ridica cate o perpendiculara pe AB si se considera pe acestea, in acelasi semiplan marginit de AB, punctele M si respectiv N, astfel incat $[AM] \equiv [BM]$. Daca $AN \cap BM = \{F\}$, demonstrati ca $\triangle FMN$ este isoscel.

9. Fie $\triangle ABC$ isoscel de baza $[BC]$ si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel incat $[AM] \equiv [AN]$. Demonstrati ca:
   (a) $\triangle AMC \equiv \triangle ABN$;
   (b) $\triangle BOC$ este isoscel, unde $\{O\} = CM \cap BN$;
   (c) daca $\{D\} = AO \cap BC$, atunci $AD \perp BC$.

10. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic in A. Pe catetele $[AB]$ si $[AC]$ se construiesc in exterior triunghiurile dreptunghice isoscele ABD si ACE, unghiurile drepte fiind in D si E. Sa se demonstreze ca:

    (a) punctele D, A, E sunt coliniare;

    (b) $BD \parallel CE$;

    (c) bisectoarele unghiurilor D si E si dreapta BC sunt concurente.