Tema7: relatii metrice in triunghiul dreptunghic

1. Sa se calculeze lungimile inaltimilor unui triunghi care are laturile de lungimi 5, 6, 7.

2. In $\triangle ABC$ dreptunghic in A se considera D proiectia ortogonala a lui A pe BC. Demonstrati ca $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

3. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic in A si $AD \perp BC$, $D \in BC$.
   (a) Presupunem ca se dau $BC = a$ si $AD = h$. Calculati BD, DC.
   (b) Daca se cunosc lungimile lui $AC = x$ si a lui $BD = y$, aflati BC si CD.

4. $ABCD$ este un trapez isoscel cu bazele $AB = 16$ si $CD = 8$. Daca $AC \perp BD$, calculati perimetrul trapezului si lungimile diagonalelor.

5. In triunghiul oarecare ascutitunghic ABC se considera inaltimea AD, $D \in (BC)$. Perpendiculara in A pe AB taie BC in E. Daca $AB = 13$, $BC = 21$, $AD = 12$, calculati perimetrul triunghiului ACE.

6. In dreptunghiul $ABCD$ perpendiculara din A pe BD intersecteaza BC in F. Demonstrati ca $AB^2 = BF \cdot BC$.

7. Fie $\triangle ABC$ si $BD \perp AC$, $D \in (AC)$. Pe laturile (AB) si (BC) se construiesc in exterior triunghiurile dreptunghice ABE si BCF astfel incat $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BCF}) = 90^\circ$, $(AE) \equiv (DC)$ si $(FC) \equiv (AD)$. Demonstrati ca $(BF) \equiv (BE)$.

8. In triunghiul isoscel obtuzunghic ABC se cunosc $BC = 32$, $AB = AC = 20$. In A se ridica perpendiculara pe AB. Ea intersecteaza (BC) in D. Determinati AD si DC.

9. Perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este $18\frac{2}{3}$. Raportul dintre lungimile laturilor sale este $\frac{3}{4}$. Din A se duce perpendiculara pe BD. Aceasta taie BD in O si BC in F. Sa se determine:
   (a) a) perimetrul $\triangle BOF$;
   (b) $\frac{OF}{OA}$;
   (c) Aria patrulaterului $AFCD$.

10. Fie $\triangle ABC$ si punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$. Daca perpendicularele in D, E, F pe laturile pe care se gasesc respectivele uncte sunt concurente, aratati ca

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0.$$

11. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrati ca

$$AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2.$$

12. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic in A, $D = Pr_{BC}(A)$, $E = Pr_{AB}(D)$, $F = Pr_{AC}(D)$. Demonstrati ca $\frac{EF^3}{DE \cdot DF} = BC$.

13. Intr-un patrulater convex $ABCD$ laturile opuse AB si CD se intalnesc in P si sunt perpendiculare. Fie M,N , F, E respectiv mijloacele laturilor (AB), (CD), (AD) si (BC). Demonstrati identitatile:

    (a) $AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$;

    (b) $AB^2 + DC^2 = 4EF^2$;

    (c) $AC^2 + BD^2 = 2\left(EF^2 + MN^2\right)$.