Tema 8 - Relatii metrice in triunghiul oarecare (aplicatii la teoremele: Pitagora generalizata, medianei, bisectoarei, Menelaus, Ceva, cosinusului, sinusului)

1. (T.Pitag. gen) Prin varful A al triunghiului isoscel $ABC\,(AB \parallel AC)$ se duce paralela la BC pe care se ia un punct arbitrar M. Demonstrati ca
$$MB^2 + MC^2 = 2\left(MA^2 + AB^2\right).$$

2. (T. Pitagora generalizata sau T. cosinusului) Sa se demonstreze ca intr-un paralelogram suma patratelor lungimilor diagonalelor este egala cu suma patratelor lungimilor laturilor.

3. (T. Pitagora generalizata) Fie A, B, C trei puncte coliniare a.i. $B \in (AC)$ si punctul $O \notin AC$. Aratati ca are loc relatia lui Stewart:
$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC$$

4. (T. medianei) Fie $\triangle ABC$ in care $BC = 3AB$ si lungimea medianei corespunzatoare laturii BC este jumatate din lungimea lui AC. Demonstrati ca $m\left(\hat{B}\right) = 60°$.

5. (T. bisectoarei) Intr-un $\triangle ABC$ bisectoarele unghiurilor formate de mediana $AM\,(M \in BC)$ cu BC intersecteaza celelalte doua laturi in P si Q. Aratati ca $PQ \parallel BC$. Formulati reciproca si verificati daca este adevarata.

6. (T. bisectoarei) Fie $\triangle ABC$, $(AD$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ si $(AE$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, $D, E \in (BC)$. Demonstrati ca
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} = \frac{CD}{AC \cdot DE}.$$

7. (T. bisectoarei si T. Menelaus) Fie $\triangle ABC$, D mijlocul lui (BC), E piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{ADC}$ si $\{F\} = BE \cap AD$. Demonstrati ca $(CF$ e bisectoarea lui $\widehat{ACB}$ daca si numai daca $AC = 2AD$.

8. (T. Pitagora generalizata, T. medianei, eventual T. Menelaus) Fie $\triangle ABC$ in care $AB = 25$, $BC = 17$, $CA = 26$. Fie D proiectia lui A pe BC, Emijlocul lui (AC) si $\{M\} = AD \cap BE$.
   (a) Aratati ca $AD^2 = 2BE^2$.
   (b) Determinati $\frac{MA}{MD}$.

9. (T. Menelaus) Fie $\triangle ABC$, D simetricul centrului de greutate fata de mijlocul lui (AB) si $\{E\} = AD \cap BC$. Demonstrati ca B este mijlocul lui (EC).

10. (T. Menelaus si reciproca ei) Dreapta d intersecteaza dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC in $D \in BC \backslash \{B, C\}$, $E \in CA \backslash \{C, A\}$ si $F \in AB \backslash \{A, B\}$. Notam cu D', E', F' simetricele punctelor D, E, F fata de mijloacele laturilor (BC),(CA) , respectiv (AB). Demonstrati ca D', E', F' sunt coliniare.

11. (T. bisectoarei si T. Menelaus) Fie $\triangle ABC$, $(AD$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, $D \in (BC)$ si M mijlocul lui (AC). Fie $\{P\} = AD \cap BM$. Determinati, in functie de lungimile laturilor triunghiului ABC, raportul $\frac{PA}{PD}$.

12. (T. Ceva) Fie $\triangle ABC$, M mijlocul lui (BC), $N \in (AB)$ astfel incat $BN = \frac{1}{3}BA$, $\{P\} = AM \cap CN$ si $\{Q\} = BP \cap AC$. Determinati $\frac{QC}{QA}$.

13. (Reciproca T. Ceva) Fie $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel, cu unghiul drept in A si $AD \perp BC$, $D \in BC$. Se prelungeste (CB) cu $(BE) \equiv (DB)$. Aratati ca mediana din B a triunghiului ABC, mediana din A a triunghiului ABD si mediana din D a triunghiului ADE sunt concurente.

14. (T. cosinusului si T. sinusului) Fie unghiul $\widehat{XOY}$ de masura 60° si P un punct in interiorul unghiului. Determinati OP daca $d(P, OX) = 11$ si $d(P, OY) = 2$.