

Tema9: cercul, aplicatii la teoreme legate de arce, coarde, unghiuri, tangenta la cerc, pozitiile relative a doua cercuri

1. In $\triangle ABC$ inscris intr-un cerc de centru O se duc inaltimele corespunzatoare varfurilor B, C si diametrul prin A . Sa se arate ca aceste doua inaltime si diametrul determina un triunghi asemenea cu $\triangle ABC$.
2. Pe un cerc se dau trei puncte oarecare A, B, C . Fie D mijlocul arcului AB , E mijlocul arcului AC , $DE \cap AB = \{F\}$, $DE \cap AC = \{G\}$ si $DC \cap EB = \{H\}$. Sa se arate ca $[AF] \equiv [AG]$ si ca AH este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .
3. In $\triangle ABC$ inscris in cercul \mathcal{C} de centru O se duce perpendiculara din A pe BC care intersecteaza a doua oara cercul \mathcal{C} in D . Fie E punctul diametral opus lui A . Sa se arate ca \widehat{BAC} si \widehat{DAE} au aceeasi bisectoare.
4. Fie $\triangle ABC$ si un cerc \mathcal{C} care taie pe (AB) in D si E , pe (BC) in F si G si pe (CA) in K si L . Aratati ca, daca au loc doua dintre congruentele $[AD] \equiv [BE]$, $[BF] \equiv [CG]$, $[CK] \equiv [AL]$, atunci centrul cercului \mathcal{C} coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC .
5. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic neisoscel ABC , cu unghiul drept \widehat{A} si D cea de a doua intersectie a cercului cu inaltimea din A a triunghiului. Paralelele prin D la AB si AC intersecteaza din nou cercul in E , respectiv F . Aratati ca $[BF] \equiv [CE]$.
6. Fie cercul \mathcal{C} si un punct A situat in exteriorul sau. Fie B, C punctele in care tangentele din A la cerc intalnesc cercul. Aratati ca centrul cercului inscris in $\triangle ABC$ este situat pe \mathcal{C} .
7. Fie trapezul $ABCD$ in care $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $[AD] \equiv [DC] \equiv [CB]$. Fie E intersectia dreptei AB cu diametrul ce trece prin D al cercului circumscris trapezului si F simetricul lui A fata de E . Aratati ca:
 - (a) $[AE] \equiv [AD]$;
 - (b) CF intersecteaza a doua oara cercul intr-un punct diametral opus lui A .
8. Prin punctul C al diametrului (AB) al unui cerc se duc coardele $[DE]$ si $[FG]$ astfel incat $\widehat{DCB} \equiv \widehat{GCB}$. Sa se arate ca:
 - (a) coardele $[DE]$, $[FG]$ sunt egal departate de centrul cercului.
 - (b) patrulaterul $EFDG$ este trapez isoscel.
9. Fie $\triangle ABC$ si A', B', C' picioarele inaltilor. Sa se arate ca tangentele duse in A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC sunt paralele cu laturile triunghiului $A'B'C'$.
10. Sa se arate ca daca un paralelogram este circumscris unui cerc, atunci el este un romb.

11. Se da $\triangle ABC$ oarecare. Un cerc arbitrar dus prin varfurile B, C taie din nou dreptele AB si AC in E si respectiv D . Bisectoarea unghiului A taie dreptele BD si CE respectiv in N si P . Fie $\{M\} = BD \cap CE$. Demonstrati ca $\triangle MNP$ este isoscel.
12. Intr-un cerc se inscrie un $\triangle ABC$. Bisectoarea interioara a unghiului A reintersecteaza cercul in A' . Un cerc oarecare dus prin punctele A si A' taie dreptele AB, AC respectiv in C', B' . Demonstrati ca $[BC'] \equiv [CB']$.
13. a) Doua cercuri $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, r_1)$ si $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(O_2, r_2)$ au razele $r_1 = 2, r_2 = 3$ si $d(O_1, O_2) = d$. Sa se studieze pozitiile relative ale cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in functie de valorile lui d .
b) Sa se arate ca doua cercuri tangente in P au o tangenta comuna in P .
14. Fie cercurile secante $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ si $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ punctele lor de intersectie fiind A, B . Fie P un punct oarecare al dreptei AB situat in exteriorul ambelor cercuri si PP_1, PP_2 doua tangente respectiv la $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ si $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, P_1, P_2 fiind punctele de tangenta. Demonstrati ca $O_1O_2 \perp AB$ si $[PP_1] \equiv [PP_2]$.