

# CURS 1 - GRUPURI, INELE, CORPURI - RECAPITULARE

## 1. GRUPURI. SUBGRUPURI

În liceu ați studiat, dintre structurile algebrice, pe acelea de grup, inel, corp. Reamintim pe scurt definițiile acestora.

**Definition 1.** Fie  $G$  o mulțime nevidă, pe care se dă o lege de compoziție internă,  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ , ce asociază oricăror elemente  $x, y$  din  $G$  elementul unic  $x * y$  din  $G$ . Spunem că perechea  $(G, *)$  este un grup dacă  $*$  verifică următoarele axiome:

- 1)  $*$  este asociativă:  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ,  $\forall x, y, z \in G$  ;
- 2)  $*$  admite element neutru:  $\exists e \in G$  a.i.  $x * e = e * x = x$ ,  $\forall x \in G$ ;
- 3) Orice element  $x$  din  $G$  admite un simetric:  $\forall x \in G$ ,  $\exists x' \in G$  a.i.  $x * x' = x' * x = e$ .

Dacă în plus legea de compoziție  $*$  este comutativă, adică  $x * y = y * x$ ,  $\forall x, y \in G$ , spunem că  $(G, *)$  este un grup comutativ (abelian).

Facem observația că elementul neutru al unui grup este unic. De asemenea, dacă legea de compoziție este una aditivă,  $+$ , elementul neutru se notează cu  $0$ , simetricul lui  $x$  se notează  $-x$  și se numește opusul lui  $x$ . Dacă legea de compoziție este una multiplicativă,  $\cdot$ , elementul neutru se notează cu  $1$ , simetricul lui  $x$  se notează  $x^{-1}$  și se numește inversul lui  $x$ .

De exemplu, următoarele mulțimi au structură de grup comutativ în raport cu legea de compoziție specificată,

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot).$$

**Definition 2.** Fie  $(G, *)$  un grup și  $G_0 \subset G$ ,  $G_0 \neq \emptyset$ . Spunem că  $G_0$  este subgrup al lui  $G$  (notăm  $G_0 \leq G$ ) dacă restricția legii de compoziție  $*$  la  $G_0$  conferă lui  $G_0$  o structură de grup.

Se poate demonstra următorul rezultat..

**Proposition 3.** Fie  $(G, *)$  un grup și  $G_0 \subset G$ ,  $G_0 \neq \emptyset$ . Atunci  $G_0$  este subgrup al lui  $G$  dacă și numai dacă au loc simultan

$$\forall x, y \in G_0 \Rightarrow x * y \in G_0$$

$$\forall x \in G_0 \Rightarrow x' \in G_0$$

De exemplu,  $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

**Definition 4.** Două grupuri  $(G, *)$ ,  $(H, \circ)$  se numesc izomorfe dacă există o bijecție  $f : G \rightarrow H$  cu proprietatea  $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ ,  $\forall x, y \in G$ .

Se poate demonstra că orice izomorfism de grupuri duce elementul neutru al unui grup în elementul neutru al celuilalt grup,  $f(e_G) = e_H$  și că  $f(x') = (f(x))'$ ,  $\forall x \in G$ .

De exemplu,  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ ,  $f(x) = e^x$ , este izomorfism de grupuri.

**Grupul permutărilor de ordinul  $n$ .** Ați făcut cunoștință cu noțiunea de permutare a unei mulțimi finite încă din clasa a X-a. Fiind dată o mulțime finită  $A$ , având  $n$  elemente, ea se poate ordona în diverse moduri, în sensul că fiecărui element al său  $i$  se asociază un anumit număr de la 1 la  $n$ , numit rangul elementului.

Mulțimea  $A$  cu o astfel de ordine se numește *permutare* a acestei mulțimi. A face o permutare a elementelor mulțimii  $A$  este totuna cu a defini o funcție bijectivă a mulțimii  $A$  pe ea însăși.

Să presupunem acum că elementele mulțimii  $A$  sunt numerotate de la 1 la  $n$ ; deci

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Dacă  $\varphi : A \rightarrow A$  este o funcție bijectivă, putem scrie

$$\varphi(a_k) = a_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

unde  $i_k$  este unul dintre numerele  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Se observă că în felul acesta funcției bijective  $\varphi$  i se asociază funcția bijectivă

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sigma(k) = i_k.$$

Invers, unei funcții bijective  $\sigma$  a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  pe ea însăși i se poate asocia o funcție bijectivă a mulțimii  $A$ . Din aceste motive vom studia permutările mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  sau, ceea ce este același lucru, funcțiile bijective ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  pe ea însăși.

**Definiție 5.** Să notăm cu  $A$  mulțimea primelor  $n$  numere naturale,

$$A = \{1, 2, \dots, n\}.$$

O funcție bijectivă

$$\sigma : A \longrightarrow A$$

se numește *permutare (substituție) de gradul  $n$* .

Vom nota mulțimea tuturor permutărilor de gradul  $n$  cu  $S_n$ , iar elementele din  $S_n$  le vom nota cu literele mici grecești:  $\sigma, \tau, \dots$

Se obișnuiește ca o permutare  $\sigma$  de gradul  $n$  să se noteze astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

În linia a doua sunt puse în evidență toate valorile funcției  $\sigma$ . Deoarece  $\sigma$  este o funcție bijectivă, toate aceste valori sunt distincte două câte două și sunt tot numerele  $1, 2, \dots, n$ , eventual în altă ordine.

Cunoaștem din clasa a X-a că numărul tuturor permutărilor de gradul  $n$  este

$$|S_n| = n!.$$

În mulțimea  $S_n$  distingem un element remarcabil, și anume funcția identică  $1_A : A \rightarrow A$ , care poartă denumirea de *permutare identică*, notată cu  $e$ . Folosind notația de mai sus:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

**Înmulțirea (compunerea) permutărilor.** Fie  $\sigma$  și  $\tau$  două permutări de gradul  $n$ , adică  $\sigma, \tau \in S_n$ . Cum  $\sigma : A \rightarrow A$  și  $\tau : A \rightarrow A$  sunt funcții bijective ale mulțimii  $A$  pe ea însăși, are sens să vorbim de compunerea  $\sigma \circ \tau$  a acestor funcții, care este tot o funcție bijectivă:

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)), \quad \forall a \in A.$$

Deci  $\sigma \circ \tau$  este o permutare de gradul  $n$ ; această permutare poartă denumirea de *produsul (sau compunerea) permutărilor  $\sigma$  și  $\tau$* , în această ordine. Se notează mai simplu  $\sigma\tau$ .

Operația prin care din permutările  $\sigma$  și  $\tau$  obținem permutarea  $\sigma\tau$  poartă denumirea de *înmulțirea (sau compunerea) permutărilor*.

Dacă

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

atunci produsul  $\sigma\tau$  este

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

Notăm

$$\sigma^2 = \sigma\sigma, \quad \sigma^3 = \sigma^2\sigma, \quad \dots, \quad \sigma^m = \sigma^{m-1}\sigma.$$

Nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de grade diferite. Când  $\sigma$  și  $\tau$  sunt două permutări de același grad, putem face atât produsul  $\sigma\tau$ , cât și produsul  $\tau\sigma$ . De obicei  $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ , deci înmulțirea permutărilor nu este comutativă.

De exemplu, pentru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

avem

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proprietățile înmulțirii (compunerii) permutărilor.** Ținând cont de proprietățile compunerii funcțiilor, avem următoarele proprietăți ale înmulțirii permutărilor:

(1) **Înmulțirea permutărilor este asociativă:**

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho), \quad \forall \sigma, \tau, \rho \in S_n.$$

Această proprietate ne permite să folosim scrierea fără paranteze:  $\sigma\tau\rho$ .

(2) **Element neutru.** Permutarea identică de gradul  $n$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

este element neutru pentru înmulțirea permutărilor, adică

$$e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

(3) **Orice permutare are inversă:** oricare ar fi  $\sigma \in S_n$ , există  $\sigma^{-1} \in S_n$  astfel încât

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

Permutarea  $\sigma^{-1}$  se numește *inversa permutării*  $\sigma$ .

De exemplu,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Din proprietățile înmulțirii permutărilor deducem

**Propoziție 6.** Mulțimea permutărilor de grad  $n$ , împreună cu înmulțirea permutărilor are structură de grup necomutativ.

**Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări.**

**Definiție 7.** Fie

$$A = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Definim submulțimea  $M$  a produsului cartezian  $A \times A$  prin

$$M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Dacă  $\sigma \in S_n$  este o permutare de gradul  $n$ , o pereche ordonată  $(i, j) \in M$  se numește *inversiune a permutării*  $\sigma$  dacă

$$\sigma(i) > \sigma(j).$$

Vom nota cu  $m(\sigma)$  numărul tuturor inversiunilor permutării  $\sigma$ .

Numărul

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$$

se numește *signatura (semnul) permutării*  $\sigma$ .

Permutarea  $\sigma$  se numește *pară*, respectiv *impară*, dacă

$$\varepsilon(\sigma) = +1, \quad \text{respectiv} \quad \varepsilon(\sigma) = -1.$$

Pentru permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

numărul de inversiuni este  $m(\sigma) = 3$ , deci

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1,$$

iar  $\sigma$  este impară.

Pentru o permutare cu  $m(\sigma) = 6$  rezultă

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = +1,$$

deci permutarea este pară.

Dacă  $e$  este permutarea identică de gradul  $n$ , atunci

$$m(e) = 0, \quad \varepsilon(e) = +1,$$

deci  $e$  este pară.

**Propoziție 8.** *Mulțimea permutărilor pare de grad  $n$  este un subgrup al grupului  $S_n$ .*

**Transpoziții. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziții (facultativ).**

**Definiție 9.** Fie  $i, j \in A = \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Definim funcția  $\tau_{ij} : A \rightarrow A$  prin

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i, \\ i, & k = j, \\ k, & k \neq i, j. \end{cases}$$

Se vede că  $\tau_{ij}$  este o funcție bijectivă, deci o permutare de gradul  $n$ . O astfel de permutare se numește *transpoziție* și se notează simplu  $(ij)$ .

Folosind scrierea matricială:

$$(ij) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Se vede că  $(ij)$  permută efectiv numai numerele  $i$  și  $j$ .

Observăm că  $(ij)^2 = e$ ,  $(ij) = (ji)$ ,  $(ij)^{-1} = (ij)$ .

**Teoremă 10.** *Dacă  $\tau = (ij)$ ,  $i < j$ , este o transpoziție de gradul  $n$ , atunci*

$$\varepsilon(\tau) = -1.$$

*Cu alte cuvinte, orice transpoziție este impară.*

*Demonstrație.* Pentru  $k < i$ , deoarece  $\tau(k) = k$  și  $\tau(i) = j$ , rezultă  $\tau(k) < \tau(i)$  și deci perechea  $(k, i)$  nu este o inversiune a lui  $\tau$ . Analog, dacă  $j < k$ , perechea  $(j, k)$  nu este o inversiune.

Dacă  $i < k < j$ , atunci  $\tau(i) = j$  și  $\tau(k) = k$ , deci perechea  $(i, k)$  este o inversiune. Analog,  $\tau(j) = i$ , deci perechea  $(k, j)$  este o inversiune. La acestea se adaugă perechea  $(i, j)$ .

Prin urmare, numărul total de inversiuni este

$$m(\tau) = (j - i - 1) + (j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1,$$

care este impar. Așadar

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{m(\tau)} = -1.$$

□

**Teoremă 11.** *Data  $\sigma \in S_n$ , are loc egalitatea*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

*Demonstrație.* Produsul are  $\binom{n}{2}$  factori. Considerăm factorul

$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}, \quad i < j.$$

Dacă notăm  $\sigma(i) = l$  și  $\sigma(j) = m$ , atunci  $l \neq m$  și  $l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Numitorul se simplifică cu numitorul unui alt factor, cu semnul  $+1$  sau  $-1$ . După toate simplificările, factorul rămas este  $-1$  dacă  $(i, j)$  este o inversiune și  $+1$  în caz contrar. Numărul factorilor  $-1$  este egal cu numărul de inversiuni  $m(\sigma)$ . Prin urmare produsul este egal cu

$$(-1)^{m(\sigma)} = \varepsilon(\sigma).$$

□

**Teoremă 12.** Dacă  $\sigma$  și  $\tau$  sunt permutări din  $S_n$ , atunci

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Cu alte cuvinte, signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări.

*Demonstrație.* Din teorema precedentă,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}, \quad \varepsilon(\tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

Aplicând aceeași formulă permutării  $\sigma\tau$ , rezultă, după regrouparea factorilor, că

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

□

**Teoremă 13.** Orice permutare din  $S_n$ , pentru  $n > 2$ , este un produs de transpoziții.

*Demonstrație.* Vom proceda prin inducție după numărul  $t$  al elementelor  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  pentru care  $\sigma(i) \neq i$ .

Dacă  $t = 0$ , atunci  $\sigma = e$ , iar afirmația este evidentă. Presupunem că  $t > 0$  și că afirmația este adevărată pentru  $1, 2, \dots, t - 1$ .

Există  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , astfel încât  $\sigma(i) = j$  și  $\sigma(j) \neq i$ . Considerăm permutarea

$$\sigma' = \tau_{ij}\sigma, \quad \tau_{ij} = (ij).$$

Se vede că, în urma acestei operații, numărul elementelor  $j$  pentru care  $\sigma'(j) \neq j$  este cel mult  $t - 1$ . Din ipoteza de inducție rezultă că  $\sigma'$  este un produs de transpoziții,

$$\sigma' = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_r.$$

Înmulțind la stânga cu  $\tau_{ij}$  și folosind

$$\tau_{ij}^2 = e,$$

obținem

$$\sigma = \tau_{ij}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_r.$$

Deci  $\sigma$  este un produs de transpoziții. □

Fie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cum  $\sigma(1) = 3 \neq 1$ , considerăm transpoziția (13) și formăm

$$\sigma' = (13)\sigma.$$

Apoi, deoarece  $\sigma'(2) \neq 2$ , considerăm transpoziția (25) și continuăm procedeul. În final se obține o descompunere de forma

$$\sigma = (13)(25)(45).$$

**Propoziție 14.** Orice permutare pară (respectiv impară) este un produs al unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.

*Demonstrație.* Fie  $\sigma \in S_n$  și

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$$

o descompunere a lui  $\sigma$  în produs de transpoziții. Din teorema privind signatura produsului,

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) \cdots \varepsilon(\tau_r).$$

□

## 2. INELE. CORPURI.

**Definition 15.** Fie  $A$  o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne,  $+: A \times A \rightarrow A$ ,  $\cdot: A \times A \rightarrow A$ . Spunem că tripletul  $(A, +, \cdot)$  este un inel unitar dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

- 1)  $(A, +)$  este grup comutativ;
- 2) " $\cdot$ " este asociativă:  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,  $\forall x, y, z \in A$ ;
- 3) " $\cdot$ " admite element neutru:  $\exists 1 \in A$  a.i.  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ,  $\forall x \in A$ ;
- 4) " $\cdot$ " este distributivă față de " $+$ " :  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ,  $\forall x, y, z \in A$ .

Dacă " $\cdot$ " este comutativă, spunem că inelul este comutativ.

Exemple de inele comutative -  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

**Definition 16.** Fie  $K$  o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne,  $+: K \times K \rightarrow K$ ,  $\cdot: K \times K \rightarrow K$ . Spunem că tripletul  $(K, +, \cdot)$  este un corp dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

- 1)  $(K, +)$  este grup comutativ;
- 2)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  este grup;
- 3) " $\cdot$ " este distributivă față de " $+$ ".

Dacă " $\cdot$ " este comutativă, numim corpul comutativ sau **câmp**.

Observăm că  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  este inel unitar comutativ dar nu este corp, iar  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sunt corpuri comutative.

### Inelul matricelor.

**Definition 17.** Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Se numește **matrice reală (respectiv complexă) cu  $m$  linii și  $n$  coloane** (și se va numi matrice de tip  $(m, n)$ ), o aplicație de la  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  la  $\mathbb{R}$  (respectiv  $\mathbb{C}$ ) care asociază fiecărei perechi  $(i, j)$  cu  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$  un unic număr real (respectiv complex) notat  $a_{ij}$ . Se folosește notația

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1, m} \\ j \in \overline{1, n}}}$$

Notăm mulțimea tuturor matricelor reale de tipul  $(m, n)$  cu  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , iar pe cea a matricelor complexe cu  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ . Numerele  $a_{ij}$  cu  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$  se numesc **elementele matricei**.

Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . Dacă  $m = n$ , atunci matricea  $A$  se numește **matrice pătratică** iar  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  se va nota prin  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Dacă  $m = 1$ , atunci matricea  $A$  se numește **matrice linie**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

iar dacă  $n = 1$ , atunci matricea  $A$  se numește **matrice coloană**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Spunem că  $A$  este **matricea nulă** dacă are toate elementele 0. O notăm  $O_{m,n}$  sau  $O_n$ .  
Matricea pătratică

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se numește **matricea unitate de ordinul  $n$** .

**Definition 18.** Prin **suma a două matrice**  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  înțelegem o nouă matrice  $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice. Astfel, dacă  $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  și  $B = (b_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci  $C = A + B$  este definită de

$$C = (c_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} \text{ cu}$$

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}.$$

În continuare vom lucra cu matrice reale și scalari reali, dar definițiile și proprietățile de mai jos sunt valabile când corpul numerelor reale e înlocuit cu corpul numerelor complexe.

**Theorem 19.** *Mulțimea matricelor reale (complexe), împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup comutativ. Adică au loc următoarele proprietăți.*

- (a)  $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});$
- (b)  $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});$
- (c)  $A + O_{m,n} = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});$
- (d)  $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, \exists (-A) = (-a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} \text{ a.i. } A + (-A) = O_{m,n}.$

**Definition 20.** Prin **produsul matricei  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  cu scalarul  $\alpha \in \mathbb{R}$**  se înțelege o nouă matrice, de același tip, obținută prin înmulțirea tuturor elementelor lui  $A$  cu scalarul  $\alpha$ . Astfel dacă  $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  iar  $\alpha \in \mathbb{R}$  este un scalar oarecare, atunci  $\alpha A$  este definită de

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}.$$

**Theorem 21.** *Înmulțirea matricelor cu scalari are următoarele proprietăți.*

- (a)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (b)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- (c)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- (d)  $1A = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$

**Definition 22.** Prin **produsul matricelor**  $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  și  $B = (b_{j,k})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  se înțelege o nouă matrice  $C = (c_{i,k})_{i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}} := AB$ , ale cărei elemente sunt date prin:

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad k \in \overline{1,p}.$$

**Example 23.** Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 55 & 18 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -5 \\ -26 & 20 & -3 \\ -10 & 15 & -7 \end{pmatrix}.$$

Deducem că înmulțirea matricelor nu este comutativă.

Calculați și:  $A^t + B$ ,  $BC$ ,  $DE$  și  $ED$ .

**Theorem 24.** Fie trei matrice  $A, B$  și  $C$  arbitrare astfel încât tipurile lor permit efectuarea operațiilor indicate mai jos și  $\alpha \in \mathbb{R}$  arbitrar. Atunci au loc următoarele afirmații:

- (a)  $A(BC) = (AB)C$ ; (b)  $A(B + C) = AB + AC$ ;
- (c)  $(B + C)A = BA + CA$ ; (d)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ;
- (e)  $I_m A = A I_n = A$

Am considerat la (e) că  $A$  e matrice de tipul  $(m, n)$ .

Deoarece mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul  $n$ , împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup abelian, înmulțirea matricelor pătratice este asociativă, admite element neutru (matricea unitate) și este distributivă față de adunarea matricelor, deducem că  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  este un inel unitar necomutativ.

**Proposition 25.** (Reguli de calcul pentru matrice care comută) Fie  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  două matrice cu proprietatea că  $AB = BA$ . Atunci au loc următoarele afirmații:

- (a)  $A^m B^n = B^n A^m, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ ;
- (b)  $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}^*$ ;
- (c)  $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**Definition 26.** Pentru o matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  se numește **transpusa matricei**  $A$  (și o vom nota prin  $A^t$ ) matricea obținută prin interschimbarea liniilor și coloanelor lui  $A$ , adică

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . Scrieți  $A^t$ .

**Proposition 27.** Fie două matrice  $A, B$  arbitrare astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operațiilor indicate mai jos și  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci au loc următoarele afirmații:

- (a)  $(A^t)^t = A$ ; (b)  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ ;  
(c)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ; (d)  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**Definition 28.** O matrice pătratică  $A$  care are proprietatea că  $A = A^t$  ( respectiv  $-A = A^t$ ) se numește *matrice simetrică* ( *antisimetrică* ).

De exemplu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  este simetrică iar  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  este antisimetrică.

Se verifică ușor că mulțimea matricelor simetrice de ordinul  $n$ , împreună cu adunarea matricelor, este subgrup al lui  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ .