Curs 1 - Grupuri, inele, corpuri - recapitulare

1. Grupuri. Subgrupuri

În liceu ați studiat, dintre structurile algebrice, pe acelea de grup, inel, corp. Reamintim pe scurt definițiile acestora.

Definition 1. Fie G o mulțime nevidă, pe care se dă o lege de compoziție internă, $* : G \times G \to G$, ce asociază oricăror elemente x, y din G elementul unic $x * y$ din G. Spunem că perechea $(G, *)$ este un grup dacă $*$ verifică următoarele axiome:

1) $*$ este asociativă: $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in G$;

2) $*$ admite element neutru: $\exists e \in G$ a.i. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in G$;

3) Orice element x din G admite un simetric: $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ a.i. $x * x' = x' * x = e$.

Dacă în plus legea de compoziție $*$ este comutativă, adică $x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$, spunem că $(G, *)$ este un grup comutativ (abelian).

Facem observația că elementul neutru al unui grup este unic. De asemenea, dacă legea de compoziție este una aditivă, $+$, elementul neutru se notează cu 0, simetricul lui x se notează $-x$ și se numește opusul lui x. Dacă legea de compoziție este una multiplicativă, $\cdot$, elementul neutru se notează cu 1, simetricul lui x se notează x^{-1} și se numește inversul lui x.

De exemplu, următoarele mulțimi au structură de grup comutativ în raport cu legea de compoziție specificată,

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Definition 2. Fie $(G, *)$ un grup și $G_0 \subset G$, $G_0 \neq \emptyset$. Spunem că G_0 este subgrup al lui G (notăm $G_0 \leq G$) dacă restricția legii de compoziție $*$ la G_0 conferă lui G_0 o structură de grup.

Se poate demonstra următorul rezultat..

Proposition 3. *Fie $(G, *)$ un grup și $G_0 \subset G$, $G_0 \neq \emptyset$. Atunci G_0 este subgrup al lui G dacă și numai dacă au loc simultan*

$$\forall x, y \in G_0 \Rightarrow x * y \in G_0$$
$$\forall x \in G_0 \Rightarrow x' \in G_0$$

De exemplu, $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Definition 4. Două grupuri $(G, *)$, $(H, \circ)$ se numesc izomorfe dacă există o bijecție $f : G \to H$ cu proprietatea $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Se poate demonstra că orice izomorfism de grupuri duce elementul neutru a unui grup în elementul neutru al celuilalt grup, $f(e_G) = e_H$ și că $f(x') = (f(x))'$, $\forall x \in G$.

De exemplu, $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $f(x) = e^x$, este izomorfism de grupuri.

Grupul permutărilor de ordinul n. Ați făcut cunoștință cu noțiunea de permutare a unei mulțimi finite încă din clasa a X-a. Fiind dată o mulțime finită A, având n elemente, ea se poate ordona în diverse moduri, în sensul că fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit rangul elementului.

Mulțimea A cu o astfel de ordine se numește *permutare* a acestei mulțimi. A face o permutare a elementelor mulțimii A este totuna cu a defini o funcție bijectivă a mulțimii A pe ea însăși.

Să presupunem acum că elementele mulțimii A sunt numerotate de la 1 la n; deci

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Dacă $\varphi : A \to A$ este o funcție bijectivă, putem scrie

$$\varphi(a_k) = a_{i_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

unde i_k este unul dintre numerele $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Se observă că în felul acesta funcției bijective φ i se asociază funcția bijectivă

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad \sigma(k) = i_k.$$

Invers, unei funcții bijective σ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ pe ea însăși i se poate asocia o funcție bijectivă a mulțimii A. Din aceste motive vom studia permutările mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ sau, ceea ce este același lucru, funcțiile bijective ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ pe ea însăși.

Definiție 5. Să notăm cu A mulțimea primelor n numere naturale,

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

O funcție bijectivă

$$\sigma : A \longrightarrow A$$

se numește *permutare (substituție) de gradul n.*

Vom nota mulțimea tuturor permutărilor de gradul n cu S_n, iar elementele din S_n le vom nota cu literele mici grecești: $\sigma, \tau, \ldots$.

Se obișnuiește ca o permutare σ de gradul n să se noteze astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

În linia a doua sunt puse în evidență toate valorile funcției σ. Deoarece σ este o funcție bijectivă, toate aceste valori sunt distincte două câte două și sunt tot numerele $1, 2, \ldots, n$, eventual în altă ordine.

Cunoaștem din clasa a X-a că numărul tuturor permutărilor de gradul n este

$$|S_n| = n!.$$

În mulțimea S_n distingem un element remarcabil, și anume funcția identică $1_A : A \to A$, care poartă denumirea de *permutare identică*, notată cu e. Folosind notația de mai sus:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Înmulțirea (compunerea) permutărilor. Fie σ și τ două permutări de gradul n, adică $\sigma, \tau \in S_n$. Cum $\sigma : A \to A$ și $\tau : A \to A$ sunt funcții bijective ale mulțimii A pe ea însăși, are sens să vorbim de compunerea $\sigma \circ \tau$ a acestor funcții, care este tot o funcție bijectivă:

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)), \qquad \forall a \in A.$$

Deci $\sigma \circ \tau$ este o permutare de gradul n; această permutare poartă denumirea de *produsul (sau compunerea) permutărilor* σ și τ, în această ordine. Se notează mai simplu $\sigma\tau$.

Operația prin care din permutările σ și τ obținem permutarea $\sigma\tau$ poartă denumirea de *înmulțirea (sau compunerea) permutărilor.*

Dacă

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

atunci produsul $\sigma\tau$ este

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

Notăm

$$\sigma^2 = \sigma\sigma, \qquad \sigma^3 = \sigma^2\sigma, \qquad \ldots, \qquad \sigma^m = \sigma^{m-1}\sigma.$$

Nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de grade diferite. Când σ și τ sunt două permutări de același grad, putem face atât produsul $\sigma\tau$, cât și produsul $\tau\sigma$. De obicei $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, deci înmulțirea permutărilor nu este comutativă.

De exemplu, pentru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

avem

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii (compunerii) permutărilor. Ținând cont de proprietățile compunerii funcțiilor, avem următoarele proprietăți ale înmulțirii permutărilor:

(1) **Înmulțirea permutărilor este asociativă:**

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho), \qquad \forall\, \sigma, \tau, \rho \in S_n.$$

Această proprietate ne permite să folosim scrierea fără paranteze: $\sigma\tau\rho$.

(2) **Element neutru.** Permutarea identică de gradul n

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

este element neutru pentru înmulțirea permutărilor, adică

$$e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

(3) **Orice permutare are inversă:** oricare ar fi $\sigma \in S_n$, există $\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

Permutarea σ^{-1} se numește *inversa permutării* σ.

De exemplu,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Din proprietățile înmulțirii permutărilor deducem

Propoziție 6. *Mulțimea permutărilor de grad n, împreună cu înmulțirea permutărilor are structură de grup necomutativ.*

Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări.

Definiție 7. Fie

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Definim submulțimea M a produsului cartezian $A \times A$ prin

$$M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, o pereche ordonată $(i, j) \in M$ se numește *inversiune a permutării* σ dacă

$$\sigma(i) > \sigma(j).$$

Vom nota cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ.

Numărul

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$$

se numește *signatura (semnul) permutării* σ.

Permutarea σ se numește *pară*, respectiv *impară*, dacă

$$\varepsilon(\sigma) = +1, \qquad \text{respectiv} \qquad \varepsilon(\sigma) = -1.$$

Pentru permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

numărul de inversiuni este $m(\sigma) = 3$, deci

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1,$$

iar σ este impară.

Pentru o permutare cu $m(\sigma) = 6$ rezultă

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = +1,$$

deci permutarea este pară.

Dacă e este permutarea identică de gradul n, atunci

$$m(e) = 0, \qquad \varepsilon(e) = +1,$$

deci e este pară.

Propoziție 8. *Mulțimea permutărilor pare de grad n este un subgrup al grupului S_n.*

Transpoziții. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziții (facultativ).

Definiție 9. Fie $i, j \in A = \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Definim funcția $\tau_{ij} : A \to A$ prin

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i, \\ i, & k = j, \\ k, & k \neq i, j. \end{cases}$$

Se vede că τ_{ij} este o funcție bijectivă, deci o permutare de gradul n. O astfel de permutare se numește *transpoziție* și se notează simplu (ij).

Folosind scrierea matricială:

$$(ij) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Se vede că (ij) permută efectiv numai numerele i și j.

Observăm că $(ij)^2 = e$, $(ij) = (ji)$, $\qquad (ij)^{-1} = (ij)$.

Teoremă 10. *Dacă $\tau = (ij)$, $i < j$, este o transpoziție de gradul n, atunci*

$$\varepsilon(\tau) = -1.$$

Cu alte cuvinte, orice transpoziție este impară.

Demonstrație. Pentru $k < i$, deoarece $\tau(k) = k$ și $\tau(i) = j$, rezultă $\tau(k) < \tau(i)$ și deci perechea (k, i) nu este o inversiune a lui τ. Analog, dacă $j < k$, perechea (j, k) nu este o inversiune.

Dacă $i < k < j$, atunci $\tau(i) = j$ și $\tau(k) = k$, deci perechea (i, k) este o inversiune. Analog, $\tau(j) = i$, deci perechea (k, j) este o inversiune. La acestea se adaugă perechea (i, j).

Prin urmare, numărul total de inversiuni este

$$m(\tau) = (j - i - 1) + (j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1,$$

care este impar. Așadar

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{m(\tau)} = -1.$$

□

Teoremă 11. *Dată $\sigma \in S_n$, are loc egalitatea*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Demonstraţie. Produsul are $\binom{n}{2}$ factori. Considerăm factorul

$$\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}, \qquad i<j.$$

Dacă notăm $\sigma(i)=l$ și $\sigma(j)=m$, atunci $l\neq m$ și $l,m\in\{1,2,\ldots,n\}$. Numitorul se simplifică cu numitorul unui alt factor, cu semnul $+1$ sau -1. După toate simplificările, factorul rămas este -1 dacă (i,j) este o inversiune și $+1$ în caz contrar. Numărul factorilor -1 este egal cu numărul de inversiuni $m(\sigma)$. Prin urmare produsul este egal cu

$$(-1)^{m(\sigma)}=\varepsilon(\sigma).$$

□

Teoremă 12. *Dacă σ și τ sunt permutări din S_n, atunci*

$$\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Cu alte cuvinte, signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări.

Demonstraţie. Din teorema precedentă,

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}, \qquad \varepsilon(\tau)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}.$$

Aplicând aceeași formulă permutării $\sigma\tau$, rezultă, după regruparea factorilor, că

$$\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

□

Teoremă 13. *Orice permutare din S_n, pentru $n>2$, este un produs de transpoziții.*

Demonstraţie. Vom proceda prin inducție după numărul t al elementelor $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ pentru care $\sigma(i)\neq i$.

Dacă $t=0$, atunci $\sigma=e$, iar afirmația este evidentă. Presupunem că $t>0$ și că afirmația este adevărată pentru $1,2,\ldots,t-1$.

Există i,j, $1\leq i<j\leq n$, astfel încât $\sigma(i)=j$ și $\sigma(j)\neq i$. Considerăm permutarea

$$\sigma'=\tau_{ij}\sigma, \qquad \tau_{ij}=(ij).$$

Se vede că, în urma acestei operații, numărul elementelor j pentru care $\sigma'(j)\neq j$ este cel mult $t-1$. Din ipoteza de inducție rezultă că σ' este un produs de transpoziții,

$$\sigma'=\tau_1\tau_2\cdots\tau_r.$$

Înmulțind la stânga cu τ_{ij} și folosind

$$\tau_{ij}^2=e,$$

obținem

$$\sigma=\tau_{ij}\tau_1\tau_2\cdots\tau_r.$$

Deci σ este un produs de transpoziții. □

Fie

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}.$$

Cum $\sigma(1)=3\neq 1$, considerăm transpoziția (13) și formăm

$$\sigma'=(13)\sigma.$$

Apoi, deoarece $\sigma'(2)\neq 2$, considerăm transpoziția (25) și continuăm procedeul. În final se obține o descompunere de forma

$$\sigma=(13)(25)(45).$$

Propoziție 14. *Orice permutare pară (respectiv impară) este un produs al unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.*

Demonstraţie. Fie $\sigma \in S_n$ și

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$$

o descompunere a lui σ în produs de transpoziții. Din teorema privind signatura produsului,

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_r).$$

□

2. Inele. Corpuri.

Definition 15. Fie A o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne, $+ : A \times A \to A$, $\cdot : A \times A \to A$. Spunem că tripletul $(A, +, \cdot)$ este un inel unitar dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

1) $(A, +)$ este grup comutativ;

2) " $\cdot$ " este asociativă: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall x, y, z \in A$;

3) " $\cdot$ " admite element neutru: $\exists 1 \in A$ a.i. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall x \in A$;

4) " $\cdot$ " este distributivă față de " $+$ " : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $\forall x, y, z \in A$.

Dacă " $\cdot$ " este comutativă, spunem că inelul este comutativ.

Exemple de inele comutative - $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Definition 16. Fie K o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne, $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$. Spunem că tripletul $(K, +, \cdot)$ este un corp dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

1) $(K, +)$ este grup comutativ;

2) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ este grup;

3) " $\cdot$ " este distributivă față de " $+$ ".

Dacă " $\cdot$ " este comutativă, numim corpul comutativ sau **câmp**.

Observăm că $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este inel unitar comutativ dar nu este corp, iar $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

Inelul matricelor.

Definition 17. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte **matrice reală (respectiv complexă) cu m linii şi n coloane** (şi se va numi matrice de tip (m, n)), o aplicaţie de la $\{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$ la $\mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{C}$) care asociază fiecărei perechi (i, j) cu $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$ un unic număr real (respectiv complex) notat a_{ij}. Se foloseşte notaţia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} .$$

Notăm mulţimea tuturor matricelor reale de tipul (m, n) cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, iar pe cea a matricelor complexe cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Numerele a_{ij} cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **elementele matricei**.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $m = n$, atunci matricea A se numeşte **matrice pătratică** iar $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se va nota prin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $m = 1$, atunci matricea A se numeşte **matrice linie,**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

iar dacă $n = 1$, atunci matricea A se numeşte **matrice coloană**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Spunem că A este **matricea nulă** dacă are toate elementele 0. O notăm $O_{m,n}$ sau O_n.
Matricea pătratică

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea unitate de ordinul** n.

Definition 18. Prin **suma a două matrice** $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ înţelegem o nouă matrice $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice. Astfel, dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ și $B = (b_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $C = A + B$ este definită de $C = (c_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ cu

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},\ i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\ .$$

În continuare vom lucra cu matrice reale și scalari reali, dar definițiile si proprietățile de mai jos sunt valabile când corpul numerelor reale e înlocuit cu corpul numerelor complexe.

Theorem 19. *Mulțimea matricelor reale (complexe), împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup comutativ. Adică au loc următoarele proprietăți.*

$$\begin{aligned}
&(a) A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\
&(b) (A + B) + C = A + (B + C),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\
&(c) A + O_{m,n} = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\
&(d) \forall A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}},\ \exists\, (-A) = (-a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}\ a.i.\ A + (-A) = O_{m,n}.
\end{aligned}$$

Definition 20. Prin **produsul matricei** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **cu scalarul** $\alpha \in \mathbb{R}$ se înţelege o nouă matrice, de același tip, obţinută prin înmulţirea tuturor elementelor lui A cu scalarul α. Astfel dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$ este un scalar oarecare, atunci αA este definită de

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

Theorem 21. *Înmulțirea matricelor cu scalari are următoarele proprietăți.*

$$\begin{aligned}
&(a) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R};\\
&(b) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\\
&(c) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\\
&(d) 1A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Definition 22. Prin **produsul matricelor** $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B = (b_{j,k})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ k\in\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ se înţelege o nouă matrice $C = (c_{i,k})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}} := AB$, ale cărei elemente sunt date prin:

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ i \in \overline{1,n},\ k \in \overline{1,p}\ .$$

Example 23. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 55 & 18 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -5 \\ -26 & 20 & -3 \\ -10 & 15 & -7 \end{pmatrix}.$$

Deducem că înmulţirea matricelor nu este comutativă.

Calculaţi şi: $A + B$, BC, DE şi ED.

Theorem 24. *Fie trei matrice A, B şi C arbitrare astfel încât tipurile lor permit efectuarea operaţiilor indicate mai jos şi $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(a) $A(BC) = (AB)C$; (b) $A(B + C) = AB + AC$;

(c) $(B + C)A = BA + CA$; (d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(e) $I_mA = AI_n = A$

Am considerat la (e) că A e matrice de tipul (m, n).

Deoarece mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul n, împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup abelian, înmulțirea matricelor pătratice este asociativă, admite element neutru (matricea unitate) și este distributivă față de adunarea matricelor, deducem că $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **este un inel unitar necomutativ.**

Proposition 25. *(Reguli de calcul pentru matrice care comută) Fie $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că $AB = BA$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

$(a) A^mB^n = B^nA^m,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*;$

$(b) A^k - B^k = (A - B)\left(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1}\right),\ \forall k \in \mathbb{N}^*;$

$(c)\ (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

Definition 26. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeşte **transpusa matricei** A (şi o vom nota prin A^t) matricea obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor lui A, adică

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Scrieţi A^t.

Proposition 27. *Fie două matrice A, B arbitrare astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operaţiilor indicate mai jos şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(a) $(A^t)^t = A$; (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

(c) $(A+B)^t = A^t + B^t$; (d) $(AB)^t = B^t A^t$.

Definition 28. O matrice pătratică A care are proprietatea că $A = A^t$ (respectiv $-A = A^t$) se numeşte *matrice simetrică* (*antisimetrică*).

De exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ este simetrică iar $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ este antisimetrică.

Se verifică ușor că mulțimea matricelor simetrice de ordinul n, împreună cu adunarea matricelor, este subgrup al lui $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.