

CURS 2 - DETERMINANȚI. MATRICE INVERSABILE. RANGUL UNEI MATRICE.

OANA CONSTANTINESCU, LUCIAN MATICIUC

Acest material este o adaptare și completare a notelor de curs ale domnului Conf. Dr. Lucian Maticiuc.

Definition 1. Fie o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se numește **determinantul** matricei A , și se notează cu $\det A$ sau cu $|A|$, numărul real definit recurent în modul următor:

(a) dacă $n = 2$, atunci

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

(b) dacă $n > 2$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} D_{1i} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}D_{1n},$$

unde D_{1i} este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obținută prin eliminarea primei linii și a coloanei i din matricea A , pentru $i = \overline{1, n}$.

Prin definiția de mai sus, calcularea unui determinant de ordin n se reduce la calcularea a n determinanți de ordin $n-1$.

În cazul particular $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ obținem:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru $n = 3$ se obține *regula lui Sarrus* (copiind primele două linii sub matricea A):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

În liceu ați aplicat fie regula lui Sarrus, fie regula triunghiului pentru determinanții de ordinul 3, dar pentru determinanții de ordin mai mare sau egal cu 4 aceste reguli nu mai funcționează, se folosește strict definiția anterioară.

În definiția de mai sus de calcul a unui determinant s-a considerat dezvoltarea după prima linie, dar se poate considera (în mod echivalent) și dezvoltarea după orice altă linie sau coloană.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numește **complementul algebric corespunzător liniei i și coloanei j** , pentru $i, j = \overline{1, n}$. Mai precis, în matricea A , suprimăm linia i și coloana j și obținem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij} .

Folosind complementul algebric corespunzător unei linii sau unei coloane, putem calcula determinantul unei matrice printr-o formulă asemănătoare celei din definiție, dezvoltând după o linie sau coloană oarecare a matricei.

Theorem 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixați avem:

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj},\end{aligned}$$

unde A_{ik} este complementul algebric corespunzător liniei i și coloanei k .

Calculați $\det A$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Este avantajos să considerăm dezvoltarea după a treia coloană deoarece conține două zerouri. Astfel

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= - \left((-1)^{1+1} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \left((-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= - \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = -4 - 8 = -12.\end{aligned}$$

Theorem 3. Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$, determinantul ei se poate calcula astfel:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

unde $\mathcal{S}_n$ reprezintă mulțimea permutărilor de ordinul n și $\epsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ .

Observăm că în fiecare termen al sumei de mai sus intră un singur element de pe fiecare linie și fiecare coloană a matricei al cărei determinant îl calculăm.

Theorem 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, arbitrare. Atunci au loc următoarele afirmații:

- (a) $\det A^t = \det A$;
- (b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
- (c) dacă matricea B este obținută prin înmulțirea unei linii a lui A cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\det B = \alpha \det A.$$

- (d) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
- (e) dacă matricea A are o linie (sau o coloană) formată numai din zerouri, atunci $\det A = 0$;
- (f) dacă matricea A are două linii (sau două coloane) egale sau proporționale, atunci $\det A = 0$;
- (g) dacă matricea B este obținută prin adăugarea la o linie (sau coloană) a lui A a unei alte linii (respectiv coloane) înmulțită cu un scalar, atunci

$$\det B = \det A;$$

- (h) dacă matricea B este obținută prin interschimbarea a două linii (coloane) ale lui A , atunci

$$\det B = -\det A;$$

- (i) dacă pentru o matrice A , elementele liniei i se scriu sub forma $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $j \in \overline{1,n}$, notând cu A' , A'' matricele obținute din A prin înlocuirea elementelor liniei i cu elementele a'_{ij} , respectiv a''_{ij} , avem $\det A = \det A' + \det A''$. proprietatea e valabilă dacă operațiile precizate se efectuează asupra coloanelor matricei A .

Definition 5. O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **nesingulară** dacă are determinantul nenul, și se numește **singulară** dacă are determinantul nul.

O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este **inversabilă** dacă există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (numită **matricea inversă** a lui A) cu proprietatea că

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

unde I_n este *matricea unitate* de ordinul n .

Theorem 6. O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă și numai dacă este matrice nesingulară. În acest caz, inversa acesteia este dată de formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

unde A^* se numește **matricea adjunctă** a lui A și este definită de

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

iar A_{ij} este complementul algebric corespunzător liniei i și coloanei j .

Adjuncta A^* se obține înlocuind fiecare element al lui A^t prin *complementul său algebric*; mai precis, în matricea A^t , suprimăm linia i și coloana j și obținem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij} , iar $A_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{i,j}$.

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\det A$, A^t , A^* și A^{-1} .

Vom obține $\det A = 1$ și $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Definition 7. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $p \leq \min(m, n)$.

(a) Se numește **minor de ordinul p al matricei A** , orice determinant de ordin p al unei matrice obținute prin intersectarea a p linii și p coloane din A ;

(b) Se numește **rangul matricei A** (și se notează cu $\text{rang}(A)$), ordinul maxim al minorilor nenuli ai lui A .

Prin urmare, $r \leq \min(m, n)$ este rangul matricei A dacă aceasta are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Remark 8. Operațiile care păstrează rangul unei matrice se numesc *transformări elementare* și sunt următoarele:

- înmulțirea unei linii (coloane) cu o constantă nenulă
- interschimbarea a două linii (coloane)
- adunarea unei linii (coloane) înmulțită cu o constantă la o altă linie (coloană).

Pentru calculul rangului unei matrice se folosește teorema lui Kronecker:

Theorem 9. Dacă într-o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ există un minor de ordin $r \leq \min(m, n)$ nenul și toți minorii de ordin $(r+1)$ ce se pot forma cu aceștia, prin bordarea cu elementele unei noi linii și ale unei noi coloane sunt nuli, atunci $\text{rang}(A) = r$.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $\text{rang}(A)$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ și } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } \text{rang}(A) = 2.$$

EXERCIIU

(1) Să se calculeze determinanții:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (\text{dezvoltăm după prima linie care conține două zerouri}) \\ &= +1 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \left(+3 \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} \right) + \left(+2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \right) \\ &= (3(-49) - 4 \cdot 49 + 7 \cdot 49) + (2 \cdot 49 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 31) = 216. \end{aligned}$$

(b) Avem

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (\text{dezvoltăm după a patra coloană care conține două zerouri}) \\ &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -2 \cdot 67 + 2 \cdot 14 = -106. \end{aligned}$$

$$(c) \text{ Avem } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11 \text{ (se va dezvolta după prima linie, apoi după a doua linie, apoi după a treia linie).}$$

(2) Să se calculeze determinanții:

$$(a) \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm proprietatea: *dacă matricea B este obținută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulțită cu un scalar, atunci $\det B = \det A$.*

(a) Înmulțind coloana a doua cu -3 și adunând-o la a treia coloană, obținem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 0 \\ 2! & 2! & 0 \\ 3! & 3! & 3! - 3 \cdot 3! \end{vmatrix} = (\text{dezvoltăm după coloana a treia}) \\ = -(3-1)3! \begin{vmatrix} 1! & 2! \\ 2! & 2! \end{vmatrix} = -2 \cdot 3! \cdot (2! - 2 \cdot 2!) = 2 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 2! = (-1)^{3+1} (3-1)! 3! 2! 1!.$$

(b) Înmulțind coloana a treia cu -4 și adunând-o la a patra coloană, obținem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 0 \\ 2! & 2! & 3! & 0 \\ 3! & 3! & 3! & 0 \\ 4! & 4! & 4! & 4! - 4 \cdot 4! \end{vmatrix} = (\text{dezvoltăm după coloana a patra}) \\ = -(4-1)4! \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = -(4-1)4! (-1)^{3+1} (3-1)! 3! 2! 1! = (-1)^{4+1} (4-1)! 4! 3! 2! 1!.$$

(c) Înmulțind coloana a doua cu -1 și adunând-o la a treia coloană (scădem coloana a doua din coloana a treia), obținem, dezvoltând după ultima coloană, valoarea -2 .

(d) Înmulțind coloana a doua cu -1 și adunând-o la a patra coloană (scădem coloana a doua din coloana a patra), obținem, dezvoltând după ultima coloană, valoarea -4 .

(3) Să se calculeze determinanții Vandermonde

$$V_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm proprietatea: *dacă matricea B este obținută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulțită cu un scalar, atunci $\det B = \det A$.* Se va obține, adunând la o linie, linia precedentă înmulțită cu $(-a)$ și dezvoltând apoi după linie sau coloană convenabilă,

$$V_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-a & b-a & c-a \\ a^2-a^2 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}.$$

Acum, putem calcula direct sau putem aplica o metodă de calcul a unui determinant: *dacă matricea B este obținută prin înmulțirea unei linii (sau coloane) a lui A cu un scalar α , atunci $\det B = \alpha \det A$.* Deci

$$\begin{aligned} V_3(a, b, c) &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) V_2(b, c) = (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Aceeași tehnică se poate aplica acum și pentru determinanți Vandermonde de ordin superior. Astfel

$$\begin{aligned}
 V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 - a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_1^2 - a_1^2 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ a_1^3 - a_1^3 & a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ 0 & a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) V_3(a_1, a_2, a_3) \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).
 \end{aligned}$$

Se poate și aduna la fiecare coloană, prima coloană înmulțită cu -1 și vom obține:

$$V_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \dots,$$

precum și

$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_1^3 & a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \dots.$$

(4) Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3\alpha & 2\alpha + \beta & \alpha + 2\beta & 3\beta \\ 3\alpha^2 & \alpha^2 + 2\alpha\beta & 2\alpha\beta + \beta^2 & 3\beta^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 3\alpha & 2\alpha+\beta-3\alpha & \alpha+2\beta-3\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha^2 & 2\alpha\beta+\beta^2-3\alpha^2 & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta-\alpha^3 & \alpha\beta^2-\alpha^3 & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 2\beta-2\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 2\alpha(\beta-\alpha) & (\beta-\alpha)(2\alpha+\beta+\alpha) & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^2(\beta-\alpha) & \alpha(\beta^2-\alpha^2) & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta & 3(\beta+\alpha) \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha) & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta-4\alpha & 3(\beta+\alpha)-6\alpha \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha)-2\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2-3\alpha^2 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 3\beta-3\alpha \\ \alpha\beta-\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha-2\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & \beta+\alpha+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^6.
\end{aligned}$$

- (5) Să se determine dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ este singulară sau nu. Dacă este nesingulară, atunci calculați inversa A^{-1} .

Rezolvare:

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, deci matricea este nesingulară și deci inversabilă. Inversa este dată de formula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$. Pentru calculul adjunței A^* scriem mai întâi transpusa $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ și apoi

$$A^* = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{și deci } A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7/13 & -1/13 & -1/13 \\ 18/13 & 3/13 & -10/13 \end{pmatrix}.$$

- (6) Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{vmatrix} = x^2 - 2x + m - 1$ care este diferit de zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă discriminantul este strict negativ. Deci matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $4 - 4(m - 1) = 4(2 - m) < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

(7) Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (b) B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(e) E = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (f) F = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix};$$

$$(g) G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}; \quad (h) H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

$$(a) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad (b) B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix};$$

$$(c) C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}; \quad (d) D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix};$$

$$(e) E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{3}{64} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{64} \end{pmatrix}; \quad (f) F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{128} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{256} & \frac{3}{256} & \frac{5}{256} \end{pmatrix};$$

$$(g) G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (h) H^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

(8) Să se calculeze rangul următoarelor matrice pentru diferite valori ale parametrului real α :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}; \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

(a) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci $\text{rang}(A) \geq 2$. Calculăm și minorul de ordinul al treilea (singurul care există): $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3 - 4\alpha$. Deci, dacă $\alpha = 3/4$, atunci $\text{rang}(A) = 2$, iar dacă $\alpha \neq 3/4$, atunci $\text{rang}(A) = 3$.

(b) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci $\text{rang}(B) \geq 2$. Calculăm (este suficient conform teoremei lui Kronecker) și cei doi minori de ordinul al treilea obținuți prin bordarea celui diferit de zero: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 6\alpha - 5$ și $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 15$.

Prin urmare, dacă $\alpha = 1$, atunci $\Delta_3 = 0$ și $\Delta'_3 = -12 \neq 0$ și deci $\text{rang}(B) = 3$.

Dacă $\alpha = 5$, atunci $\Delta_3 = \Delta'_3 = 0$ și deci $\text{rang}(B) = 2$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$, atunci $\Delta_3 \neq 0$ și $\Delta'_3 \neq 0$ și deci $\text{rang}(B) = 3$.

(9) Să se calculeze rangul matricelor:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; (b) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; (c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

$$\text{Avem } \text{rang}(A) = 3, \text{rang}(B) = 2, \text{rang}(C) = 5.$$

(10) Să dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & n \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine m și n astfel încât încât cele două matrice să aibă același rang.

Rezolvare:

$$\text{Avem } \text{rang}(A) \geq 2 \text{ și } \text{rang}(A) = 3 \Leftrightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3.$$

$$\text{Pe de altă parte } \text{rang}(B) \geq 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 3 \text{ și } \Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & n \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n - 1.$$

Prin urmare $\text{rang}(B) = 3 \Leftrightarrow (m \neq -3 \text{ sau } n \neq 1)$. Deci dacă $m = -3$, atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 2$ doar dacă $n = 1$, iar dacă $m \neq -3$, atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$.

(11) Să se rezolve ecuația matriceală $XA = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\text{Deoarece } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ matricea } A \text{ admite inversă și fie } A^{-1} \text{ această inversă.}$$

Înmulțind la dreapta egalității cu A^{-1} obținem

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1},$$

deci a găsi X , înseamnă a găsi inversa lui A și a calcula apoi produsul BA^{-1} . Se va obține $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.