

CURS 3 - SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

OANA CONSTANTINESCU, LUCIAN MATICIUC

Definition 1. Se numește **sistem de ecuații liniare** un sistem de forma

$$(0.1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Matricele formate cu ajutorul coeficienților sistemului

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numesc **matricea sistemului**, respectiv **matricea extinsă a sistemului**.

Dacă toți termenii liberi sunt nuli, i.e. $B = O_{m,1}$ ($b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$), atunci sistemul se numește **omogen**.

Dacă $B \neq O_{m,1}$, atunci sistemul se numește **neomogen**.

Sistemul (0.1) este un sistem algebric linear de m ecuații cu n necunoscute. Folosind notațiile precedente, acesta se poate scrie sub forma restrânsă (matriceală)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

$$\text{unde } X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ iar } B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m)^t \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

reprezintă matricea necunoscutelor și, respectiv, matricea termenilor liberi.

Proposition 2. Dacă A este matrice pătratică nesară, atunci soluția sistemului este dată de

$$X = A^{-1}B.$$

Definition. (a) Rangul matricei A se numește **rangul sistemului**.

(b) Dacă există numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ care verifică ecuațiile sistemului (0.1), spunem că n -uplul $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o soluție a sistemului (0.1).

Definition 3. (a) Sistemul (0.1) este **compatibil** dacă admite cel puțin o soluție.

(b) Sistemul (0.1) este **incompatibil** dacă nu admite nici o soluție.

(c) Sistemul (0.1) este **compatibil determinat** dacă admite o singură soluție.

(d) Sistemul (0.1) este **compatibil nedeterminat** dacă admite mai multe soluții.

În cazul în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$), pentru rezolvarea sistemului se poate folosi **regula lui Cramer**

Theorem 4. Fie sistemul cu n ecuații și n necunoscute

$$(0.2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Dacă $\det A \neq 0$, **atunci sistemul este compatibil și are soluția unică dată de**

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

unde $D = \det A$, **iar** D_i **este determinantul matricei obținută prin înlocuirea în matricea** A **a coloanei** i **cu coloana termenilor liberi, pentru** $i = \overline{1, n}$.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Observăm că $\det(A) = 15 \neq 0$, deci sistemul are soluție unică dată de regula lui Cramer. Calculăm

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 45, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

și deci

$$(x, y, z) = \frac{1}{15} (45, 30, 15) = (3, 2, 1).$$

Definition 5. Fie $r = \text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$. Se numește **minor (determinant) principal al sistemului (0.1)**, orice minor de ordin r nenul al matricei A .

Fie $r = \text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$. Se numește **minor (determinant) caracteristic asociat minorului principal**, orice minor de ordin $(r + 1)$ al matricei extinse $\bar{A}$ obținut prin bordarea minorului principal cu elemente ale uneia dintre liniile rămase și ale coloanei termenilor liberi corespunzătoare.

Ecuatiile și necunoscutele corespunzătoare minorului principal se numesc **ecuații și, respectiv, necunoscute principale**, celelalte numindu-se **necunoscute secundare**.

Theorem 6. *Sistemul (0.1) este compatibil dacă și numai dacă matricele A și $\bar{A}$ au același rang, adică $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$.*

Deseori utilizăm teorema lui Rouché.

Theorem 7. *Sistemul (0.1) este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt nuli.*

Întrucât matricea extinsă $\bar{A}$ este obținută prin adăugarea unei coloane la matricea A , în general avem că $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(\bar{A})$. Așadar un sistem este incompatibil dacă prin adăugarea coloanei termenilor liberi se mărește rangul matricei.

Remark 8. În concluzie, notând cu $r := \text{rang}(A)$ și cu m și n numărul de linii, respectiv de coloane ale sistemului, au loc următoarele cazuri:

(a) Dacă $r = m$, atunci sistemul este compatibil și atunci:

(a₁) Dacă $m = n$, atunci sistemul este compatibil determinat (și atunci soluția sistemului se obține aplicând regula de calcul a lui Cramer).

(a₂) Dacă $m < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate de soluții (și atunci soluțiile sistemului se obțin parametrizând necunoscutele secundare și rezolvând sistemul format din ecuațiile principale și necunoscutele principale).

(b) Dacă $r < m$, atunci aplicăm teorema lui Kronecker–Capelli sau teorema lui Rouché.

Deci

$$\text{Un sistem este } \begin{cases} \text{compatibil determinat dacă:} & \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = n, \\ \text{compatibil nedeterminat dacă:} & \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < n, \\ \text{incompatibil dacă:} & \text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A}), \end{cases}$$

unde n este numărul de necunoscute.

Practic: se scriu matricele A și $\bar{A}$ și se calculează rangul lor. Dacă $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$, atunci sistemul este incompatibil. Dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, atunci sistemul este compatibil.

Acum, dacă rangul obținut este egal cu numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de regula lui Cramer.

Dacă rangul obținut este mai mic strict decât numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil nedeterminat; pentru a găsi soluția, determinăm, folosind minorul principal (cel care dă rangul), ecuațiile principale și necunoscutele principale. Celelalte necunoscute se vor numi secundare și se vor renota cu alte litere (vor deveni parametri), urmând ca necunoscutele principale să se determine în funcție de aceste necunoscute secundare.

Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ -3x + 12y - 3z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului și matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este compatibil dar nedeterminat (admite o infinitate de soluții). Determinantul principal (cel care dă rangul) este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, deci necunoscutele x și z sunt necunoscutele principale, iar y este necunoscuta secundară. Vom nota $y = \alpha$ și rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} x - 3z = 1 + 4\alpha \\ -3x - 3z = 2 - 12\alpha \end{cases}$$

care are soluția $(x, z) = (4\alpha - 1/4, -5/12)$, deci mulțimea soluțiilor sistemului inițial este

$$\{(4\alpha - 1/4, \alpha, -5/12), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Remark 9. În cazul particular al sistemelor liniare și omogene avem următoarele concluzii:

(a) Un sistem linear omogen este întotdeauna compatibil, el admitând cel puțin soluția banală $X = O$, i.e. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Evident $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$.

(b) Un sistem linear omogen admite și alte soluții (diferite de cea banală) dacă și numai dacă $\text{rang}(A)$ este mai mic decât numărul de necunoscute.

(c) Prin urmare, un sistem linear omogen în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute admite și alte soluții (diferite de cea banală) dacă și numai dacă $\det(A) = 0$.

1. Să se rezolve și să se discute următorul sistem omogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ și calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci $\text{rang} A \geq 2$. Apoi prin bordarea

minorului Δ_2 obținem doi minori de ordin superior $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ și $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Deoarece

sunt nuli deducem că $\text{rang}(A) = 2$. Evident $\text{rang} \bar{A} = \text{rang} A$, deci sistemul este compatibil dar nedeterminat; astfel necunoscutele principale sunt x_1 și x_2 iar ecuațiile principale sunt primele două. Necunoscutele secundare sunt celelalte două și le vom parametriza: $\alpha := x_3$ și $\beta := x_4$. Sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2\alpha + \beta \\ 2x_1 = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

care are soluția $x_1 = (\alpha - 3\beta)/2$, $x_2 = -5(\alpha - \beta)/4$.

Sistemul inițial are mulțimea soluțiilor $\left\{ \left(\frac{\alpha - 3\beta}{2}, \frac{-5(\alpha - \beta)}{4}, \alpha, \beta \right), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul

$$\begin{cases} x + y + 3z &= 10 \\ -2x + 3y - z &= 5 \\ -x - 2y + 3z &= 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

Există însă și o metodă alternativă de a studia sistemul. Aceasta este **metoda lui Gauss** pe care o prezentăm în continuare.

Matricea extinsă a sistemului este $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ și **vom face transformări convenabile pentru a obține zerouri sub diagonală principală, la fiecare pas noul sistem obținut fiind echivalent cu cel inițial.**

Astfel vom aduna prima linie înmulțită cu constante convenabile la celelalte linii (știm că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, rangul noii matrice obținute nu se modifică).

Apoi vom aduna a doua linie înmulțită cu constante convenabile la următoarele linii, ș.a.m.d..

Astfel vom obține zerouri pe coloane și sistemul obținut va fi unul triunghiular care se rezolvă imediat plecând de la ultima ecuație.

În cazul nostru, notând formal liniile cu L_i , scriem $2L_1 + L_2$, $L_1 + L_2$, apoi $\frac{1}{5}L'_2 + L'_3$ și obținem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2+2 & 3+2 & -1+6 & 5+20 \\ -1+1 & -2+1 & 3+3 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1+1 & 6+1 & 16+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

și sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + y + 3z &= 10 \\ 5y + 5z &= 25 \\ 17z &= 21 \end{cases}$$

Soluția lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$.

Evident, metoda lui Gauss este utilă și pentru determinarea rangului unei matrice și pentru calcul de determinanți. Menționăm, în plus, că, pentru a aplica metoda lui Gauss, nu contează numărul de ecuații și de necunoscute ale sistemului.

EXERCITII

(1) Să se rezolve matriceal sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= -6 \\ x + y - 2z &= 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, matricea necunoscutelor este $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ iar matricea termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Deci sistemul se rescrie matriceal sub forma $AX = B$. Deoarece

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, matricea A admite inversă și fie A^{-1} această inversă. Înmulțind la stânga egalității cu A^{-1} obținem

$$AA^{-1}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

deci a găsi X , înseamnă a găsi inversa lui A și a calcula apoi produsul $A^{-1}B$. Se va obține $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
adică $x = -1$, $y = 1$ și $z = -1$.

- (2) Folosind regula lui Cramer, să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 38 \\ 3x + 5y + 2z = 31 \\ 5x + 2y + 3z = 31 \end{cases}$$

Rezolvare:

Calculăm mai întâi $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$, deci, sistemul având numărul de ecuații egal cu numărul necunoscutelor, este (conform regulii lui Cramer) compatibil determinat. Trebuie să mai calculăm și determinanții

$$D_1 = \begin{vmatrix} 38 & 3 & 5 \\ 31 & 5 & 2 \\ 31 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -140, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 38 & 5 \\ 3 & 31 & 2 \\ 5 & 31 & 3 \end{vmatrix} = -210, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 38 \\ 3 & 5 & 31 \\ 5 & 2 & 31 \end{vmatrix} = -350$$

iar $x = \frac{-140}{-70} = 2$, $y = \frac{-210}{-70} = 3$, $z = \frac{-350}{-70} = 5$ și deci soluția este $(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

- (3) Să se rezolve și să se discute următoarele sisteme omogene:

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

În cazul oricărui sistem omogen este evident că $\text{rang} \bar{A} = \text{rang} A$ (matricea $\bar{A}$ conține în plus o coloană cu zerouri), și deci orice sistem omogen este compatibil. În cazul $m = n$, dacă $\det A \neq 0$, atunci soluția este unică dată de regula lui Cramer. Dar orice sistem omogen admite, evident, soluția banală deci ea este singura soluție.

Dacă $m = n$ și $\det A = 0$, atunci soluția nu este unică și trebuie să determinăm necunoscutele principale și pe cele secundare.

(a) Avem $\det A = 0$, și deci sistemul compatibil este nedeterminat. Un minor principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci $\text{rang} A = 2$. Atunci acest minor principal determină ecuațiile și necunoscutele principale; astfel primele două ecuații sunt ecuații principale, x, y sunt necunoscute principale iar z , notat cu α , este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x - 3y = -4\alpha \\ x + 2y = \alpha \end{cases}$$

care are soluția $x = -\alpha$ și $y = \alpha$, deci mulțimea soluțiilor sistemului inițial este

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Avem $\det A = 0$. Un minor principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$ și deci primele două ecuații sunt ecuații principale, x, y sunt necunoscute principale iar z , notat cu α , este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + 2y = -\alpha \\ x - 2y = -2\alpha \end{cases}$$

care are soluția $x = -3\alpha/2$ și $y = \alpha/4$, deci mulțimea soluțiilor sistemului inițial este $\{(-3\alpha/2, \alpha/4, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- (4) Să se rezolve și să se discute sistemul omogen, în funcție de parametrul real λ :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ x + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\det A = -3(1 + \lambda^2) \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, deci sistemul este compatibil determinat, și fiind sistem omogen, admite doar soluția banală.

- (5) Să se rezolve și să se discute sistemul omogen, în funcție de parametrul real m :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\text{Avem } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 4m. \text{ Rezolvăm acum ecuația } \det A = 0 \Leftrightarrow 24 - 4m = 0.$$

Dacă $m \neq 6$, atunci sistemul este compatibil determinat, și fiind sistem omogen, admite doar soluția banală.

Dacă $m = 6$, sistemul este compatibil dar nu admite soluție unică. Un minor principal este $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -33$ și deci primele trei ecuații sunt ecuații principale, x_1, x_2 și x_3 sunt necunoscute principale iar x_4 , notat cu α , este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -\alpha \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \end{cases}$$

care are soluția unică dată de regula lui Cramer. Trebuie să mai calculăm determinanții

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 6 \\ -\alpha & 1 & -1 \\ \alpha & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\alpha, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 6 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 31\alpha, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & -\alpha \\ 3 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = -10\alpha$$

iar $x_1 = \frac{-4\alpha}{-33}, x_2 = \frac{31\alpha}{-33}, x_3 = \frac{-10\alpha}{-33}$ și deci soluțiile sistemului inițial sunt

$$\left\{ \frac{1}{33} (4\alpha, -31\alpha, 10\alpha, 33\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (6) Să se rezolve și să se discute sistemul, în funcție de parametrul real λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Observăm că $\det(A) = (1 + \lambda)^2$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $\det A \neq 0$ și deci sistemul are soluție unică dată de regula lui Cramer. Calculăm

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda - 2$$

și deci

$$(x, y, z) \in \left\{ \frac{1}{(1+\lambda)^2} (3\lambda + 3, 3\lambda - 3, -2\lambda^2 + 2\lambda - 2), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$

Dacă $\lambda = -1$, atunci $\det A = 0$ și scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculăm $\text{rang}(A) = 2$ și $\text{rang}(\bar{A}) = 3$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

(7) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - 4y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y + 2z &= 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului și matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\text{rang}(A) = 2$, deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Pe de altă

parte, $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ iar celălalt minor obținut

prin bordarea lui Δ_2 este $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Deci $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(\bar{A})$ și, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

(8) Să se rezolve și să se discute sistemul, în funcție de parametri reali α, β :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + \alpha y + (\alpha + 1)z &= 1 \\ (\beta - 1)x + \beta y + (\beta + 1)z &= 1 \\ x + y + z &= -2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ \beta - 1 & \beta & \beta + 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 & 1 \\ \beta - 1 & \beta & \beta + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \beta - 1 & \beta \end{vmatrix} = \alpha - \beta$ iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ \beta - 1 & \beta & \beta + 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Dacă $\alpha \neq \beta$, atunci $\text{rang}(A) = 2$. În ceea ce privește pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \beta - 1 & \beta \end{vmatrix} = \alpha - \beta$ iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ \beta - 1 & \beta & \beta + 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & 1 \\ \beta - 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\beta - 2\alpha \neq 0$ pentru $\alpha \neq \beta$. Deci $\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang}(\bar{A})$, prin urmare sistemul este incompatibil.

Dacă $\alpha = \beta$, atunci calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $\text{rang}(A) = 2$. În ceea ce privește pe $\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ iar Δ_3 este nul, oricum l-am alege. Deci $\text{rang}(\bar{A}) = 2 = \text{rang}(A)$, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat.

Minorul principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, deci prima și a treia ecuație sunt cele principale, necunoscutele x și y sunt necunoscutele principale, iar z este necunoscuta secundară. Vom nota $z = a$ și rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} (\alpha-1)x + \alpha y &= -(\alpha+1)a \\ x + y &= -2-a \end{cases}$$

care are soluția unică $(x, y) = (-1-2\alpha+a, -1+2\alpha-2a)$, pentru a fixat, deci mulțimea soluțiilor sistemului inițial este $\{(-1-2\alpha+a, -1+2\alpha-2a, a), a \in \mathbb{R}\}$.

(9) Să se rezolve și să se discute sistemele:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 &= 1 \end{cases}$$

și

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 &= 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 &= -4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{cases};$$

$$(e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 14 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem, mai întâi, matricea sistemului și matricea extinsă. Calculăm rangurile lor și vedem dacă sunt sau nu egale. Dacă nu sunt egale atunci sistemul este incompatibil. Dacă sunt egale atunci se determină necunoscutele principale și pe cele secundare.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deoarece } \det \bar{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix} = 0, \text{ deducem că } \text{rang}(\bar{A}) \leq 3. \text{ Pe de altă parte, } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A \geq 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A \geq 3 \text{ și } \text{rang} \bar{A} \geq 3, \text{ deci obținem } \text{rang}(A) =$$

$3 = \text{rang}(\bar{A})$, adică sistemul este compatibil. Minorul principal este Δ_3 deci primele trei ecuații sunt cele principale iar x_1, x_2, x_3 sunt necunoscutele principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \end{cases}$$

care are soluția dată de regula lui Cramer. Se va obține $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -2)$.

(b) Avem

$$A = \begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$\det A = \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3.$$

Iar $\det A = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$.

Rădăcinile (rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber) sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 3$ (adică $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$).

Deci dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ atunci $\det A \neq 0$ și sistemul este compatibil determinat, soluția unică fiind găsită cu regula lui Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \frac{(1-\lambda)^2(\lambda-3)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3-2\lambda & \lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \frac{(1-\lambda)^2(4-\lambda)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ x_3 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{1}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Dacă $\lambda = 1$ atunci $\det A = 0$ și sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Acum $\text{rang}(A) = 1 = \text{rang}(\bar{A})$ deci sistemul este compatibil nedeterminat și, plecând de la minorul principal, găsim că necunoscutele principale și ecuațiile principale sunt x_1 respectiv prima ecuație. Sistemul devine, notând necunoscutele secundare $x_2 = \alpha$ și $x_3 = \beta$,

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$$

adică mulțimea soluțiilor sistemului inițial este $\{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Dacă $\lambda = 3$ atunci $\det A = 0$ și sistemul devine

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Acum $\text{rang}(A) = 2$ și $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ deci sistemul este incompatibil.

(c) Avem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \\ 6 & -5 & 11 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 274 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A = 3$. În ceea ce privește pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_4 =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ deci } \text{rang}(\bar{A}) \leq 3, \text{ prin urmare } \text{rang}(\bar{A}) = 3 \text{ (deoarece există minorul } \Delta_3 \neq 0).$$

Obținem $\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(\bar{A})$ și deci sistemul este compatibil nedeterminat. Determinantul principal

este Δ_3 , deci necunoscutele x, y și z sunt necunoscute principale iar primele trei ecuații sunt ecuațiile principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 15 \end{cases}$$

care este cu trei ecuații și trei necunoscute și care are determinantul matricei sistemului nenul. Deci se poate rezolva cu regula lui Cramer. Calculăm determinanții

$$\begin{vmatrix} 11 & 4 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \\ 15 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 548, \quad \begin{vmatrix} 2 & 11 & -3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 15 & -8 \end{vmatrix} = 274, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -274$$

și deci

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1).$$

(d) Avem $\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(\bar{A})$ și apoi $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(-8, 3 + \alpha, 6 + 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(e) Avem $\text{rang}(A) = 4 = \text{rang}(\bar{A})$, iar soluția este dată de regula lui Cramer, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 1)$.

(10) Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele:

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = -3 \\ y + 2z = 4 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ 2x + y - z + 2t = 9 \\ -x + 2y + 2z - t = 5 \\ x + 3y - z - 2t = -4 \end{cases}$$

și

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -1 \end{cases}; \quad (d) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}; \quad (e) \begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 4x + 3y - 2z = 11 \\ -2x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$(a) \text{ Avem că } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0 \text{ și numărul de ecuații este egal cu numărul de necunos-$$

cute. Obținem $\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(\bar{A})$ și deci sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de regula lui Cramer.

Vom folosi metoda lui Gauss.

Scriem matricea extinsă $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și vom face transformări convenabile pentru a

obține zerouri sub diagonala principală. Astfel vom aduna prima linie înmulțită cu constante convenabile la celelalte linii (știm că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătrate, sistemul e transformat într-unul echivalent cu el). Apoi vom aduna a doua linie înmulțită cu constante convenabile la următoarele linii, ș.a.m.d.. Astfel obținem zerouri pe coloane și sistemul devine unul triunghiular. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2-2 & -1-4 & 1+6 & -3-0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1-1 & 2+7/5 & 4-3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 17/5 & 17/5 \end{pmatrix}$$

și deci sistemul inițial este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -5y + 7z = -3 \\ 17z/5 = 17/5 \end{cases}$$

Soluția lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 1)$.

(b) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ și vom face transformări convenabile pentru a obține zerouri sub diagonala principală. Obținem

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2-2 & 1-2 & -1-2 & 2+2 & 9-4 \\ -1+1 & 2+1 & 2+1 & -1-1 & 5+2 \\ 1-1 & 3-1 & -1-1 & -2+1 & -4-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3-3 & 3-9 & -2+12 & 7+15 \\ 0 & 2-2 & -2-6 & -1+8 & -6+10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8+8 & 7-\frac{8}{6} \cdot 10 & 4-\frac{8}{6} \cdot 22 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & -76/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

și sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ -y - 3z + 4t = 5 \\ -6z + 10t = 22 \\ -19t/3 = -76/3 \end{cases}$$

Soluția lui este imediată $(x, y, z, t) = (1, 2, 3, 4)$.

(c) Avem, citind matricea extinsă,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

și sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0x_3 + 0x_4 = -2 \end{cases}$$

care nu are soluții deoarece am obținut $0 = -2$, care este o contradicție. Deci sistemul inițial este incompatibil.

Se poate observa, calculând pentru sistemul inițial cele două ranguri, că $\text{rang}(A) = 2$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ și $\Delta_3, \Delta'_3 = 0$) și $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ și $\Delta_3, \Delta'_3 = 0$ dar există și $\Delta''_3 = 6 \neq 0$). Deci $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$ ceea ce înseamnă că sistemul dat este incompatibil.