

CURS 4 - INELUL POLINOAMELOR CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

Pentru aprofundarea acestui capitol puteți folosi - **Mircea Ganga, Matematică, Manual pentru clasa a XIIa, Elemente de algebră, profil M1, editura Mathpress, Ploiești, orice ediție**

În acest manual sunt tratate polinoamele cu coeficienți într-un corp comutativ, puteți să vă imaginați că acesta este corpul numerelor reale, sau corpul numerelor complexe, pentru a ușura înțelegerea materiei. Oricum, în cursul de algebră liniară, ne vom limita la aceste cazuri. Putem însă defini polinoamele pornind de la un inel unitar comutativ arbitrar.

Definition 1. Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mulțimea tuturor șirurilor cu valori în $\mathbb{K}$ care au proprietatea că doar un număr finit de termeni sunt diferiți de zero.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{f = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ a.i. } a_i = 0, \forall i > m\},$$

la care adăugăm și șirul nul $(0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Se numește **polinom cu coeficienți în $\mathbb{K}$** orice element al lui $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ se numește polinomul nul.

$a_0, a_1, \dots, a_n$, unde $n = \max \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$ se numesc **coeficienții polinomului**, iar n **gradul polinomului**.

Definition. Fie $f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$, $g = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$. Spunem $f = g \Leftrightarrow a_k = b_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

În continuare, vom defini adunarea și înmulțirea polinoamelor.

Definition 2. Fie $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$, $g = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$.

Atunci $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots)$ se numește **suma polinoamelor f, g** .

De exemplu, pentru $f = (1, 2 - i, 3, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots)$ și $g = (2 + i, 2 + i, i, 0, \dots, 0, \dots)$, obținem $f + g = (3 + i, 4, 3 + i, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots)$.

Observăm că am adunat un polinom de grad 4 cu unul de grad 3 și am obținut un polinom de grad 4.

Dar fie $h = (3, 1, i, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots)$. Atunci $f + h = (4, 3 - i, 3 + i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, deci am adunat două polinoame de gradul 4 și am obținut un polinom de gradul 3.

Remark 3. Dacă f, g sunt două polinoame cu coeficienți în $\mathbb{K}$, atunci

$$\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}f + \text{grad}g\}.$$

Definition 4. Fie $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$, $g = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$. Atunci $fg = (c_0, c_1, \dots, c_k, \dots)$ se numește **produsul polinoamelor f, g** , unde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots\dots\dots \\ c_k &= \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}. \end{aligned}$$

De exemplu, pentru $f = (1, 2 - i, 3, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots)$ și $g = (2 + i, 2 + i, i, 0, \dots, 0, \dots)$, obținem $c_0 = 2 + i$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 7 + i$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 11 + 4i$, $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 8 + \frac{11}{2}i$, deci $fg = (2 + i, 7 + i, 11 + 4i, 8 + \frac{11}{2}i, 0, \dots, 0, \dots)$.

Remark 5. Dacă f, g sunt două polinoame cu coeficienți în corpul comutativ $\mathbb{K}$, atunci

$$\text{grad}(fg) = \text{grad}f + \text{grad}g.$$

Dar dacă am lucra cu polinoame cu coeficienți într-un inel unitar comutativ, care nu este corp? Am obține același rezultat?

Hai să considerăm inelul claselor de resturi modulo 4 și polinul $f = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{0}, \dots, \hat{0}, \dots)$. Atunci $f^2 = f \cdot f = (\hat{1}, \hat{0}, \dots, \hat{0}, \dots)$. Deci produsul a două polinoame de grad 2 este, în acest caz particular, de grad 1.

Deci pentru cazul polinoamelor cu coeficienți într-un inel comutativ, unitar, care nu este corp, avem

$$\text{grad}(f + g) \leq \text{grad}f + \text{grad}g.$$

Theorem 6. *Adunarea și înmulțirea polinoamelor au următoarele proprietăți.*

- a) *Adunarea polinoamelor este comutativă, $f + g = g + f, \forall f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- b) *Adunarea polinoamelor este asociativă, $(f + g) + h = f + (g + h), \forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- c) *Adunarea polinoamelor admite polinomul nul $0 = (0, \dots, 0, \dots)$ ca element neutru, $f + 0 = 0 + f = f, \forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- d) *Orice polinom f admite un polinom opus, adică un polinom notat $-f$ cu proprietatea $f + (-f) = (-f) + f = 0$;*
- e) *Înmulțirea polinoamelor este comutativă, $fg = gf, \forall f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- f) *Înmulțirea polinoamelor este asociativă, $(fg)h = f(gh), \forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- g) *Înmulțirea polinoamelor admite polinomul $1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ ca element neutru, $1 \cdot f = f \cdot 1 = f, \forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;*
- h) *Produsul polinoamelor este distributiv față de adunarea polinoamelor, $(f + g)h = fh + gh, \forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*
- i) *Produsul oricăror două polinoame nenule este un polinom nenul.*

Din teorema anterioară rezultă că $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ este un inel comutativ. Datorită proprietății (i) spunem că acest inel nu are divizori ai lui 0, el este un domeniu de integritate.

Faptul că $\mathbb{K}$ este corp, nu doar inel, intervine doar la demonstrarea lui i).

Evident, dacă $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$, atunci $-f = (-a_0, -a_1, \dots, -a_k, \dots)$.

Polinomul $1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ este numit polinomul unitate.

Prin convenție, gradul polinomului nul este $-\infty$.

Forma algebrică a unui polinom. Notăm cu $\mathbb{K}^0 = \{(a, 0, \dots, 0, \dots) \mid a \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, mulțimea polinoamelor de grad 0, la care se adaugă polinomul nul. Evident, $\mathbb{K}^0$, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a polinoamelor (induse din $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), are structură de inel comutativ cu $0 \neq 1$. Mai mult, $\phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^0, \phi(a) = (a, 0, \dots, 0, \dots), \forall a \in \mathbb{K}$, este izomorfism de inele, adică o aplicație bijectivă, cu proprietățile

$$\begin{aligned}\phi(a + b) &= \phi(a) + \phi(b), \\ \phi(a \cdot b) &= \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in \mathbb{K}.\end{aligned}$$

Existența acestui izomorfism permite identificarea oricărui polinom de tipul $(a, 0, \dots, 0, \dots)$ din $\mathbb{K}^0$ cu elementul a din $\mathbb{K}$. Din acest motiv, nu mai facem distincția dintre $\mathbb{K}^0$ și $\mathbb{K}$.

Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, în cazul în care unul dintre polinoame e de tipul $(a, 0, \dots, 0, \dots)$ și celălalt arbitrar, $f = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)$, produsul lor se notează simplu af și avem

$$af = (af_0, af_1, \dots, af_k, \dots).$$

Numim această operație **înmulțirea polinoamelor cu scalari**.

Notăm polinomul $(0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ cu X . Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, avem

$$\begin{aligned}X^2 &= XX = (0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \\ X^3 &= XXX = (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \\ &\dots\end{aligned}$$

$$X^k = \underbrace{XX \cdots X}_{k \text{ ori}} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

Considerăm $X^0 = 1$.

Numim polinomul X nedeterminată pe $\mathbb{K}$. Atenție, el nu reprezintă o variabilă, ci un polinom particular.

Astfel, orice polinom de grad n se scrie sub forma

$$\begin{aligned}f &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= (a_0, 0, \dots, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots, 0, \dots) + (0, 0, a_2, 0, \dots, 0, \dots) + \cdots (0, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,\end{aligned}$$

numită **forma algebrică a polinomului f , ordonat după puterile crescătoare ale nedeterminatei X** .

Notăm mulțimea polinoamelor de nedeterminată X , cu coeficienți în $\mathbb{K}$, cu $\mathbb{K}[X]$, iar mulțimea polinoamelor de nedeterminată X , cu coeficienți în $\mathbb{K}$, de grad cel mult n , cu $\mathbb{K}_n[X]$.

Polinoamele de grad 0, de tipul $f = (a_0, 0, \dots, 0, \dots) = a_0$ se numesc polinoame constante.

Expresiile $a_k X^k$, $k \in \overline{0, n}$, se numesc termenii polinomului (sau monoame), a_0 se numește termenul liber al polinomului, iar a_n coeficientul dominant.

Forma algebrică a polinoamelor ajută la simplificarea scrierii și în cazul operațiilor cu polinoame.

Dacă $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$, $g = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_m X^m$ și $k \in \mathbb{K}$, atunci

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \dots + (a_i + b_i) X^i + \dots + (a_l + b_l) X^l, \quad l = \max\{n, m\},$$

$$fg = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k + \dots,$$

$$kf = ka_0 + ka_1 X + ka_2 X^2 + \dots + ka_n X^n.$$

Efectuați produsul polinoamelor

a) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 + X$;

b) $f = iX + (1 - i)X^2$, $g = 1 + i - iX + 2iX^2$.

a) Folosim distributivitatea înmulțirii polinoamelor față de adunarea lor, comutativitatea și asociativitatea adunării polinoamelor.

$$fg = (1 + X + X^2)(1 + X) = (1 + X + X^2)1 + (1 + X + X^2)X = 1 + X + X^2 + X + X^2 + X^3 = 1 + 2X + 2X^2 + X^3.$$

b) $fg = (i - 1)X + 3X^2 + (-3 - i)X^3 + (2 + 2i)X^4$.

Definition 7. Fie $f \in \mathbb{K}[X]$, $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ și $x \in \mathbb{K}$. Elementul $f(x) := a_1 x + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{K}$, se numește **valoarea polinomului f în x** .

Dacă $x_0 \in \mathbb{K}$ și $f(x_0) = 0$, spunem că x_0 **este rădăcină a polinomului f** .

Aplicația $\tilde{f} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$, se numește **funcția polinomială asociată polinomului f** .

Pentru a afla rădăcinile unui polinom, îi asociem o ecuație și aflăm soluțiile ei.

Atenție, să nu confundăm noțiunile de mai jos.

Polinomul $f \in \mathbb{K}[X]$	Funcția polinomială asociată $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Ecuația asociată
$f = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax + b$, $a \neq 0$	$ax + b = 0$, $a \neq 0$
$f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$, $a_0 \neq 0$	$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, $a_0 \neq 0$	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$, $a_0 \neq 0$
$X = \text{nedeterminată (e un polinom particular)}$	$x = \text{variabilă}$	$x = \text{necunoscută}$

Teorema împărțirii cu rest.

Theorem 8. Fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$, $g \neq 0$. Atunci există polinoamele unice $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât

$$f = gq + r, \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(g).$$

Definition 9. Polinomul f se numește **deîmpărțit**, polinomul g este **împărțitorul**, polinomul q este **câtul** și polinomul r este **restul** împărțirii polinomului f la polinomul g .

Dacă $r = 0 \Leftrightarrow f = gq$, spunem că polinomul f **se divide prin polinomul g** (notăm $f : g$) sau g **divide f** (notăm $g \mid f$).

Exemplificăm algoritmul de împărțire a două polinoame.

1. Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$ la $g = 3X^2 - 6X + 2$, în $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{array}{r|l}
6X^5 + 0X^4 - 17X^3 - X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 \\
-6X^5 + 12X^4 - 4X^3 & 2X^3 + 4X^2 + X - 1 \\
\hline
12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3 & \\
-12X^4 + 24X^3 - 8X^2 & \\
\hline
3X^3 - 9X^2 + 0X + 3 & \\
-3X^3 + 6X^2 - 2X & \\
\hline
-3X^2 - 2X + 3 & \\
3X^2 - 6X + 2 & \\
\hline
-8X + 5 &
\end{array}$$

Deoarece $\text{grad}(-8X + 5) < \text{grad}(3X^2 - 6X + 2)$, rezultă că avem câtul $q = 2X^3 + 4X^2 + X - 1$ și restul $r = -8X + 5$.

Putem face rapid proba, $(3X^2 - 6X + 2)(2X^3 + 4X^2 + X - 1) + (-8X + 5) = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$.

Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 6X^3 - 7X^2 + 3X + 2$ la $g = 2X^2 - 3X + 2$, în $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{array}{r|l}
6X^3 - 7X^2 + 3X + 2 & 2X^2 - 3X + 2 \\
-6X^3 + 9X^2 - 6X & 3X + 1 \\
\hline
2X^2 - 3X + 2 & \\
-2X^2 + 3X - 2 & \\
\hline
/ &
\end{array}$$

Rezultă că avem câtul $q = 3X + 1$ și restul $r = 0$, polinomul nul. Deci $g \mid f$.

2. Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + 3$ la $g = X - i$, în $\mathbb{C}[X]$.

$$\begin{array}{r|l}
X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + 3 & X - i \\
-X^6 + iX^5 & X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i \\
\hline
(i-1)X^5 + X^4 - X^3 + X^2 & \\
-(i-1)X^5 + i(i-1)X^4 & \\
\hline
-iX^4 - X^3 + X^2 & \\
iX^4 + X^3 & \\
\hline
X^2 & \\
-X^2 + iX & \\
\hline
iX & \\
-iX - 1 & \\
\hline
-1 &
\end{array}$$

Deci avem câtul $q = X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i$ și restul $r = -1$, polinom de grad 0.

Theorem 10. Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ diferit de polinomul nul. Atunci restul împărțirii lui f prin $g = X - a$ este egal cu valoarea numerică a polinomului pentru $x = a$, adică $r = f(a)$.

O teoremă extrem de utilizată este cea a lui Bezout.

Theorem 11. (Bezout) Un element $a \in \mathbb{K}$ este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{K}[X]$ dacă și numai dacă $X - a$ divide pe f .

Definition 12. Elementul $a \in \mathbb{K}$ este rădăcină de ordin $p \in \mathbb{N}^*$ pentru polinomul f dacă $(x - a)^p$ divide f și $(x - a)^{p+1}$ nu divide f .

Exercise 13. a) Să se determine restul împărțirii lui $f = X^4 + 2X^3 - X + 4$ la $g = X - 1$.

b) Arătați că $a = 1$ este rădăcină pentru $h = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.

a) Restul împărțirii lui f la g este $f(1) = 6$.

b) Se verifică $h(1) = 0$.

Putem folosi **schema lui Horner** pentru a determina câtul și restul împărțirii unui polinom prin $X - a$.

Exercise 14. a) Folosiți schema lui Horner pentru a afla câtul și restul împărțirii lui f la g , $f = 3X^5 - 2X^3 + 3X^2 - 5$, $g = X - 2$.

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	0	-2	3	0	-5
2	3	$2 \cdot 3 + 0 = 6$	$2 \cdot 6 - 2 = 10$	$2 \cdot 10 + 3 = 23$	$2 \cdot 23 + 0 = 46$	$2 \cdot 46 - 5 = 87$
	X^4	X^3	X^2	X	X^0	

Deci restul este $r = 87$ iar câtul este $q = 3X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 23X + 46$.

b) Folosiți schema lui Horner pentru a afla ordinul de multiplicitate a rădăcinii $a = 2$ a lui $f = X^6 - 7X^5 + 15X^4 - 40X^2 + 48X - 16$.

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
2	1	-7	15	0	-40	48	-16
2	1	$2 \cdot 1 - 7 = -5$	$2(-5) + 15 = 5$	$2 \cdot 5 + 0 = 10$	$2 \cdot 10 - 40 = -20$	$2(-20) + 48 = 8$	$2 \cdot 8 - 16 = 0$
2	1	$2 \cdot 1 - 5 = -3$	$2(-3) + 5 = -1$	$2(-1) + 10 = 8$	$2 \cdot 8 - 20 = -4$	$2(-4) + 8 = 0$	
2	1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2(-1) - 1 = -3$	$2(-3) + 8 = 2$	$2 \cdot 2 - 4 = 0$		
2	1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2(-1) + 2 = 0$			
2	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq 0$	concluzie: 2 e rădăcină de ordinul 4			
	X^2	X	X^0				

$$f = (X - 2)^4 (X^2 + 3X + 5).$$

Theorem 15. (polinoame cu coeficienți reali) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a + ib$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a lui f , atunci $\bar{x}_0 = a - ib$ este de asemenea o rădăcină complexă a lui f și $x_0, \bar{x}_0$ au același ordin de multiplicitate.

În consecință, orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe ce nu sunt reale. De asemenea, orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

Theorem 16. (polinoame cu coeficienți raționali) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, este o rădăcină pătratică a lui f , atunci $\bar{x}_0 = a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină pătratică a lui f și $x_0, \bar{x}_0$ au același ordin de multiplicitate.

Există și o teoremă pentru cazul coeficienților întregi.

Theorem 17. (polinoame cu coeficienți întregi) Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$. Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a lui f , atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

În particular, dacă p este o rădăcină întreagă a lui f , atunci $p \mid a_0$.

Theorem 18. (relațiile lui Viete) Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad n , $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, care are în corpul $\mathbb{K}$ rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$, nu neapărat distincte. Atunci au loc următoarele relații.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sum_{i,j \in \overline{1,n}, i \neq j} x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \sum_{i,j,k \in \overline{1,n}, i \neq j \neq k \neq i} x_i x_j x_k &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \sum_{i_1, \dots, i_k \in \overline{1,n}, i_j \neq i_l, \forall j \neq l} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \dots &\dots \\ x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

De exemplu, fie $f = 2X^4 + X^3 - 3X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale, nu neapărat distincte. Atunci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{1}{2}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 &= -\frac{3}{2}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 &= 0, \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercise 19. Rezolvați următoarele ecuații.

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - \sqrt{3}$.

b) $3x^3 - 10x^2 + 31x + 26 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - 3i$.

c) $z^3 + (4 - 2i)z^2 + (2 - 7i)z - 3 - 3i = 0$, dacă admite cel puțin o soluție reală.

a) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 - 3X^2 - 3X + 1$. Deoarece $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ este rădăcină a lui f , deducem că $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ este și ea rădăcină a lui f . Deci polinomul f se divide prin $g = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3}) = X^2 - 4X + 1$. Împărțind f la g obținem câtul $X + 1$, deci a treia soluție a ecuației se obține rezolvând ecuația $x + 1 = 0$, adică $x_3 = -1$.

Bineînțeles, puteam folosi și relațiile lui Viète, pentru a nu mai împărți cele două polinoame. Suma celor trei rădăcini este 3, deci $x_3 = -1$.

b) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți reali $f = 3X^3 - 10X^2 + 31X + 26$. Deducem că $x_1 = 2 - 3i$ e rădăcină a lui f , deci și $x_2 = 2 + 3i$ este rădăcină a lui f . Rezultă că f se divide prin $g = (X - 2 + 3i)(X - 2 - 3i) = X^2 - 4X + 13$. Câtul împărțirii lui f la g este $3X + 2$, deci a treia soluție a ecuației este $x_3 = -\frac{2}{3}$.

Puteți aplica direct relațiile lui Viète!

c) Fie x o soluție reală a ecuației date. Deci $x^3 + (4 - 2i)x^2 + (2 - 7i)x - 3 - 3i = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 4x^2 + 2x - 3) + i(-2x^2 - 7x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = 0 \\ -2x^2 - 7x - 3 = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm mai întâi ecuația de gradul al doilea, cu soluțiile -3 și $-\frac{1}{2}$. Doar $x = -3$ este și soluție a ecuației de gradul 3, deci singura rădăcină reală a polinomului $f = X^3 + (4 - 2i)X^2 + (2 - 7i)X - 3 - 3i$ este -3 . Împărțim f la $X + 3$ (sau folosim schema lui Horner) și obținem câtul $X^2 + (1 - 2i)X - 1 - i$. Asociem ecuația de gradul doi, cu coeficienți în $\mathbb{C}$, $z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i = 0$. Evident soluțiile sunt i și $-1 + i$.