CURS 4 - INELUL POLINOAMELOR CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

Pentru aprofundarea acestui capitol puteți folosi - **Mircea Ganga, Matematică, Manual pentru clasa a XIIa, Elemente de algebră, profil M1, editura Mathpress, Ploiești, orice ediție**

În acest manual sunt tratate polinoamele cu coeficienți într-un inel unitar comutativ, puteți să vă imaginați că acesta este inelul numerelor întregi, sau corpul numerelor raționale, reale, respectiv complexe, pentru a ușura înțelegerea materiei.

Definition 1. Fie A un inel unitar comutativ și $A^{\mathbb{N}}$ mulțimea tuturor șirurilor cu valori în A care au proprietatea că doar un număr finit de termeni sunt diferiți de zero, la care adăugăm și șirul nul $(0,0,\cdots,0,\cdots)$.

$$A^{\mathbb{N}}=\{f=(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots)\mid \exists m\in\mathbb{N}\, a.i.\, a_i=0,\,\forall i>m\}\cup\{(0,0,\cdots,0,\cdots)\}.$$

Se numește **polinom cu coeficienți în** A orice element al lui $A^{\mathbb{N}}$. $(0,0,\cdots,0,\cdots)$ se numește polinomul nul.

$a_0,a_1,\cdots,a_n$, unde $n=max\{k\in\mathbb{N}\mid a_k\neq 0\}$ se numesc **coeficienții polinomului**, iar n **gradul polinomului**.

Prin convenție, gradul polinomului nul este $-\infty$.

Definition. Fie $f,g\in A^{\mathbb{N}}$, $f=(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots)$, $g=(b_0,b_1,\cdots,b_k,\cdots)$. Spunem $f=g\Leftrightarrow a_k=b_k,\,\forall k\in\mathbb{N}$.

În continuare, vom defini adunarea și înmulțirea polinoamelor.

Definition 2. Fie $f=(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots)$, $g=(b_0,b_1,\cdots,b_k,\cdots)$.

Atunci $f+g=(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,a_k+b_k,\cdots)$ se numește **suma polinoamelor** f,g.

De exemplu, pentru $f=\left(1,2-i,3,\frac{1}{2},0,\cdots,0,\cdots\right)$ și $g=(2+i,2+i,i,0,\cdots,0,\cdots)$, obținem $f+g=\left(3+i,4,3+i,\frac{1}{2},0,\cdots,0,\cdots\right)$.

Observăm că am adunat un polinom de grad 4 cu unul de grad 3 și am obținut un polinom de grad 4.

Dar fie $h=\left(3,1,i,-\frac{1}{2},0,\cdots,0,\cdots\right)$. Atunci $f+h=(4,3-i,3+i,0,0,\cdots,0,\cdots)$, deci am adunat două polinoame de gradul 4 și am obținut un polinom de gradul 3.

Remark 3. Dacă f,g sunt două polinoame cu coeficienți în A, atunci

$$grad\,(f+g)\leq\max\{gradf,gradg\}.$$

Definition 4. Fie $f=(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots)$, $g=(b_0,b_1,\cdots,b_k,\cdots)$. Atunci $fg=(c_0,c_1,\cdots,c_k,\cdots)$ se numește **produsul polinoamelor** f,g, unde

$$\begin{aligned}
&c_0=a_0b_0,\\
&c_1=a_0b_1+a_1b_0,\\
&c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\\
&\cdots\cdots\\
&c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}.
\end{aligned}$$

De exemplu, pentru $f=\left(1,2-i,3,\frac{1}{2},0,\cdots,0,\cdots\right)$ și $g=(2+i,2+i,i,0,\cdots,0,\cdots)$, obținem

$c_0=2+i$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0=7+i$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=11+4i$, $c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=8+\frac{11}{2}i$, deci

$fg=\left(2+i,7+i,11+4i,8+\frac{11}{2}i,0,\cdots,0,\cdots\right)$.

Remark. În cazul polinoamelor cu coeficienți într-un inel comutativ, unitar, care nu este domeniu de integritate, avem

$$grad\,(fg)\leq gradf+gradg.$$

Într-adevăr, să considerăm inelul claselor de resturi modulo 4 și polinul $f=\left(\hat{1},\hat{2},\hat{0},\cdots,\hat{0},\cdots\right)$. Atunci $f^2=f\cdot f=\left(\hat{1},\hat{0},\cdots,\hat{0},\cdots\right)$. Deci produsul a două polinoame de grad 2 este, în acest caz particular, de grad 1.

Dacă f, g sunt două polinoame cu coeficienți într-un domeniu de integritate, atunci

$$grad\,(fg) = gradf + gradg.$$

Theorem 5. *Adunarea și înmulțirea polinoamelor au următoarele proprietăți.*
a) Adunarea polinoamelor este comutativă, $f+g=g+f, \forall f,g \in A^{\mathbb{N}}$;
b) Adunarea polinoamelor este asociativă, $(f+g)+h=f+(g+h), \forall f,g,h \in A^{\mathbb{N}}$;
c) Adunarea polinoamelor admite polinomul nul $0=(0,\cdots,0,\cdots)$ *ca element neutru,* $f+0=0+f=f, \forall f \in A^{\mathbb{N}}$;
d) Orice polinom f *admite un polinom opus, adică un polinom notat* $-f$ *cu proprietatea* $f+(-f)=(-f)+f=0$;
e) Înmulțirea polinoamelor este comutativă, $fg=gf, \forall f,g \in A^{\mathbb{N}}$;
f) Înmulțirea polinoamelor este asociativă, $(fg)\,h=f\,(gh), \forall f,g,h \in A^{\mathbb{N}}$;
g) Înmulțirea polinoamelor admite polinomul $1=(1,0,\cdots,0,\cdots)$ *ca element neutru,* $1\cdot f=f\cdot 1=f, \forall f \in A^{\mathbb{N}}$;
h) Produsul polinoamelor este distributiv față de adunarea polinoamelor, $(f+g)\,h=fh+gh, \forall f,g,h \in A^{\mathbb{N}}$.
i) Produsul oricăror două polinoame nenule cu coeficienți într-un domeniu de integritate este un polinom nenul.

Din teorema anterioară rezultă că $(A^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ este un inel comutativ. Dacă A este domeniu de integritate, atunci și $(A^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ este un domeniu de integritate.

Evident, dacă $f=(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots)$, atunci $-f=(-a_0,-a_1,\cdots,-a_k,\cdots)$.

Polinomul $1=(1,0,\cdots,0,\cdots)$ este numit polinomul unitate.

Forma algebrică a unui polinom. Notăm cu $A^0=\{(a,0,\cdots,0,\cdots)\ ,|\ a\in A\}\subset A^{\mathbb{N}}$, mulțimea polinoamelor de grad 0, la care se adaugă polinomul nul. Evident, A^0, împreună cu operațiile de adunare si înmulțire a polinoamelor (induse din $A^{\mathbb{N}}$), are structură de inel comutativ cu $0\neq 1$. Mai mult, $\phi:\ A\to A^0$, $\phi(a)=(a,0,\cdots,0,\cdots)\,, \forall a\in A$, este izomorfism de inele, adică o aplicație bijectivă, cu proprietățile

$$\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b),$$
$$\phi(ab)=\phi(a)\phi(b),\ \forall a,b\in A.$$

Existența acestui izomorfism permite identificarea oricărui polinom de tipul $(a,0,\cdots,0,\cdots)$ din A^0 cu elementul a din A. Din acest motiv, nu mai facem distincția dintre A^0 și A.

Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, în cazul în care unul dintre polinoame e de tipul $(a,0,\cdots,0,\cdots)$ și celălalt arbitrar, $f=(f_0,f_1,\cdots,f_k,\cdots)$, produsul lor se noteaza simplu af și avem

$$af=(af_0,af_1,\cdots,af_k,\cdots)\,.$$

Numim acestă operație **înmulțirea polinoamelor cu scalari**.

Notăm polinomul $(0,1,0,0,\cdots,0,\cdots)$ cu X. Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, avem

$$X^2=XX=(0,0,1,0,\cdots,0,\cdots)\,,$$
$$X^3=XXX=(0,0,0,1,0,\cdots,0,\cdots)\,,$$
$$\cdots\cdots$$
$$X^k=\underbrace{XX\cdots X}_{k\ ori}=\left(\underbrace{0,\cdots,0}_{k},1,0,\cdots,0,\cdots\right).$$

Considerăm $X^0=1$.

Numim polinomul X nedeterminata pe A. Atenție, el nu reprezintă o variabilă, ci un polinom particular.

Astfel, orice polinom de grad n se scrie sub forma

$$\begin{aligned} f&=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,\cdots,0,\cdots)\\ &=(a_0,0,\cdots,0,\cdots)+(0,a_1,0,\cdots,0,\cdots)+(0,0,a_2,0\cdots,0,\cdots)+\cdots(0,0,\cdots,0,a_n,0,\cdots,0,\cdots)\\ &=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n, \end{aligned}$$

numită **forma algebrică a polinomului f, ordonat după puterile crescătoare ale nedeterminatei X.**

Notăm mulțimea polinoamelor de nedeterminată X, cu coeficienți în A, cu $A[X]$, iar mulțimea polinoamelor de nedeterminată X, cu coeficienți în A, de grad cel mult n, cu $A_n[X]$.

Polinoamele de grad 0, de tipul $f=(a_0,0,\cdots,0,\cdots)=a_0$ se numesc polinoame constante.

Expresiile a_kX^k, $k \in \overline{0,n}$, se numesc termenii polinomului (sau monoame), a_0 se numește termenul liber al polinomului, iar a_n coeficientul dominant.

Forma algebrică a polinoamelor ajută la simplificarea scrierii și în cazul operațiilor cu polinoame.
Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m$ și $k \in A$, atunci

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, X + \cdots + (a_i + b_i)X^i + \cdots (a_l + b_l)X^l,\ l = \max\{n, m\},$$

$$fg = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)\, X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\, X^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}\right) X^k + \cdots,$$

$$kf = ka_0 + ka_1X + ka_2X^2 + \cdots + ka_nX^n.$$

Efectuați produsul polinoamelor
a) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 + X$;
b) $f = iX + (1 - i)X^2$, $g = 1 + i - iX + 2iX^2$.

a) Folosim distributivitatea înmulțirii polinoamelor față de adunarea lor, comutativitatea și asociativitatea adunării polinoamelor.
$fg = \left(1 + X + X^2\right)(1 + X) = \left(1 + X + X^2\right)1 + \left(1 + X + X^2\right)X = 1 + X + X^2 + X + X^2 + X^3 = 1 + 2X + 2X^2 + X^3$.

b) $fg = (i - 1)\, X + 3X^2 + (-3 - i)\, X^3 + (2 + 2i)\, X^4$.

Definition 6. Fie $f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ și $x \in A$. Elementul $f(x) := a_1x + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}$, se numește **valoarea polinomului** f **în** x.
Dacă $x_0 \in A$ și $f(x_0) = 0$, spunem că x_0 **este rădăcină a polinomului** f.
Aplicația $\tilde{f} : A \to A, \tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$,se numește **funcția polinomială asociată polinomului** f.

Pentru a afla rădăcinile unui polinom, îi asociem o ecuație și aflăm soluțiile ei.

Atenție, să nu confundăm noțiunile de mai jos.

Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$	Funcția polinomială asociată $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Ecuația asociată
$f = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax + b$, $a \neq 0$	$ax + b = 0$, $a \neq 0$
$f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, $a_0 \neq 0$	$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_0 \neq 0$	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$, $a_0 \neq 0$
X = nedeterminată (e un polinom particular)	x = variabilă	x = necunoscută

Teorema împărțirii cu rest.

Theorem 7. *Fie $f, g \in A[X]$, $g \neq 0$ cu coeficientul dominant inversabil. Atunci există polinoamele unice $q, r \in A[X]$ astfel încât*

$$f = gq + r, \quad grad(r) < grad(g).$$

Definition 8. Polinomul f se numește **deîmpărțit**, polinomul g este **împărțitorul**, polinomul q este **câtul** și polinomul r este **restul** împărțirii polinomului f la polinomul g.

Dacă $r = 0 \Leftrightarrow f = gq$, spunem că polinomul f **se divide prin polinomul** g (notăm $f \vdots g$) sau g **divide** f (notăm $g \mid f$).

Exemplificăm algoritmul de împărțire a două polinoame.

1. Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$ la $g = 3X^2 - 6X + 2$, în $\mathbb{R}[X]$.

$6X^5+0X^4-17X^3-X^2+0X+3$	$3X^2-6X+2$
$-6X^5+12X^4-4X^3$	$2X^3+4X^2+X-1$
$12X^4-21X^3-X^2+0X+3$	
$-12X^4+24X^3-8X^2$	
$3X^3-9X^2+0X+3$	
$-3X^3+6X^2-2X$	
$-3X^2-2X+3$	
$3X^2-6X+2$	
$-8X+5$	

Deoarece $grad\,(-8X+5) < grad\,\left(3X^2-6X+2\right)$, rezultă că avem câtul $q=2X^3+4X^2+X-1$ și restul $r=-8X+5$.

Putem face rapid proba, $\left(3X^2-6X+2\right)\left(2X^3+4X^2+X-1\right)+(-8X+5)=6X^5-17X^3-X^2+3$.

Aflați câtul și restul împărțirii lui $f=6X^3-7X^2+3X+2$ la $g=2X^2-3X+2$, în $\mathbb{R}[X]$.

$6X^3-7X^2+3X+2$	$2X^2-3X+2$
$-6X^3+9X^2-6X$	$3X+1$
$2X^2-3X+2$	
$-2X^2+3X-2$	
/	

Rezultă că avem câtul $q=3X+1$ și restul $r=0$, polinomul nul. Deci $g \mid f$.

2. Aflați câtul și restul împărțirii lui $f=X^6-X^5+X^4-X^3+X^2+3$ la $g=X-i$, în $\mathbb{C}[X]$.

$X^6-X^5+X^4-X^3+X^2+3$	$X-i$
$-X^6+iX^5$	$X^5+(i-1)X^4-iX^3+X+i$
$(i-1)X^5+X^4-X^3+X^2$	
$-(i-1)X^5+i(i-1)X^4$	
$-iX^4-X^3+X^2$	
iX^4+X^3	
X^2	
$-X^2+iX$	
iX	
$-iX-1$	
-1	

Deci avem câtul $q=X^5+(i-1)X^4-iX^3+X+i$ și restul $r=-1$, polinom de grad 0.

Theorem 9. *Fie $f \in A[X]$ diferit de polinomul nul. Atunci restul împărțirii lui f prin $g=X-a$ este egal cu valoarea numerică a polinomului pentru $x=a$, adică $r=f(a)$.*

O teoremă extrem de utilizată este cea a lui Bezout.

Theorem 10. *(Bezout) Un element $a \in A$ este rădăcină a polinomului $f \in A[X]$ dacă și numai dacă $X-a$ divide pe f.*

Definition 11. Elementul $a \in A$ este rădăcină de ordin $p \in \mathbb{N}^*$ pentru polinomul f dacă $(X-a)^p$ divide f și $(X-a)^{p+1}$ nu divide f.

Exercise 12. a) Să se determine restul împărțirii lui $f=X^4+2X^3-X+4$ la $g=X-1$.
b) Arătați că $a=1$ este rădăcină pentru $h=X^3-2X^2+3X-2$.
a) Restul împărțirii lui f la g este $f(1)=6$.
b) Se verifică $h(1)=0$.

Putem folosi **schema lui Horner** pentru a determina câtul și restul împărțirii unui polinom prin $X-a$.

Exercise 13. a) Folosiți schema lui Horner pentru a afla câtul și restul împărțirii lui f la g, $f = 3X^5 - 2X^3 + 3X^2 - 5$, $g = X - 2$.

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	0	-2	3	0	-5
2	3	$2 \cdot 3 + 0 = 6$	$2 \cdot 6 - 2 = 10$	$2 \cdot 10 + 3 = 23$	$2 \cdot 23 + 0 = 46$	$2 \cdot 46 - 5 = 87$
	X^4	X^3	X^2	X	X^0	

Deci restul este $r = 87$ iar câtul este $q = 3X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 23X + 46$.

b) Folosiți schema lui Horner pentru a afla ordinul de multiplicitate a rădăcinii $a = 2$ a lui $f = X^6 - 7X^5 + 15X^4 - 40X^2 + 48X - 16$.

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
2	1	-7	15	0	-40	48	-16
2	1	$2 \cdot 1 - 7 = -5$	$2(-5) + 15 = 5$	$2 \cdot 5 + 0 = 10$	$2 \cdot 10 - 40 = -20$	$2(-20) + 48 = 8$	$2 \cdot 8 - 16 = 0$
2	1	$2 \cdot 1 - 5 = -3$	$2(-3) + 5 = -1$	$2(-1) + 10 = 8$	$2 \cdot 8 - 20 = -4$	$2(-4) + 8 = 0$	
2	1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2(-1) - 1 = -3$	$2(-3) + 8 = 2$	$2 \cdot 2 - 4 = 0$		
2	1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2(-1) + 2 = 0$			
2	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq 0$	concluzie: 2 e rădăcină de ordinul 4			
	X^2	X	X^0				

$f = (X-2)^4 \left(X^2 + 3X + 5\right)$.

Theorem 14. *(polinoame cu coeficienți reali) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a + ib$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a lui f, atunci $\overline{x_0} = a + ib$ este de asemenea o rădăcină complexă a lui f și x_0, $\overline{x_0}$ au același ordin de multiplicitate.*

În consecință, orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe ce nu sunt reale. De asemenea, orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăconă reală.

Theorem 15. *(polinoame cu coeficienți raționali) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, este o rădăcină pătratică a lui f, atunci $\overline{x_0} = a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină pătratică a lui f și x_0, $\overline{x_0}$ au același ordin de multiplicitate.*

Există și o teoremă pentru cazul coeficienților întregi.

Theorem 16. *(polinoame cu coeficienți întregi) Fie $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$. Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a lui f, atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.*

În particular, dacă p este o rădăcină întreagă a lui f, atunci $p \mid a_0$.

Theorem 17. *(relațiile lui Viete) Fie $f \in A[X]$ un polinom de grad n, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, a_n inversabil, care are în A rădăcinile $x_1, x_2, \cdots .x_n$, nu neapărat distincte. Atunci au loc următoarele relații.*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots x_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sum_{i,j \in \overline{1,n},\, i \neq j} x_i x_j & = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \sum_{i,j,k \in \overline{1,n},\, i \neq j \neq k \neq i} x_i x_j x_k & = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \sum_{i_1, \cdots, i_k \in \overline{1,n},\, i_j \neq i_l,\, \forall j \neq l} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} & = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \cdots & \cdots \\ x_1 x_2 \cdots x_n & = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

De exemplu, fie $f = 2X^4 + X^3 - 3X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale, nu neapărat distincte. Atunci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = -\frac{1}{2}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 & = -\frac{3}{2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 & = 0, \\ x_1x_2x_3x_4 & = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercise 18. Rezolvați următoarele ecuații.

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - \sqrt{3}$.

b) $3x^3 - 10x^2 + 31x + 26 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - 3i$.

c) $z^3 + (4 - 2i)z^2 + (2 - 7i)z - 3 - 3i = 0$, dacă admite cel puțin o soluție reală.

a) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 - 3X^2 - 3X + 1$. Deoarece $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ este rădăcină a lui f, deducem că $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ este și ea rădăcină a lui f. Deci polinomul f se divide prin $g = \left(X - 2 - \sqrt{3}\right)\left(X - 2 + \sqrt{3}\right) = X^2 - 4X + 1$. Împărțind f la g obținem câtul $X + 1$, deci a treia soluție a ecuației se obține rezolvând ecuația $x + 1 = 0$, adică $x_3 = -1$.

Bineînțeles, puteam folosi și relațiile lui Viete, pentru a nu mai împărți cele două polinoame. Suma celor trei rădăcini este 3, deci $x_3 = -1$.

b) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți reali $f = 3X^3 - 10X^2 + 31X + 26$. Deducem că $x_1 = 2 - 3i$ e rădăcină a lui f, deci și $x_2 = 2+3i$ este rădăcină a lui f. Rezultă că f se divide prin $g = (X - 2 + 3i)(X - 2 - 3i) = X^2 - 4X + 13$. Câtul împărțirii lui f la g este $3X + 2$, deci a treia soluție a ecuației este $x_3 = -\frac{2}{3}$.

Puteți aplica direct relațiile lui Viete!

c) Fie x o soluție reală a ecuației date. Deci $x^3 + (4 - 2i)x^2 + (2 - 7i)x - 3 - 3i = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + 4x^2 + 2x - 3\right) + i\left(-2x^2 - 7x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 + 4x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ -2x^2 - 7x - 3 &= 0 \end{cases}$$

Rezolvăm mai întâi ecuația de gradul al doilea, cu soluțiile -3 și $-\frac{1}{2}$. Doar $x = -3$ este și soluție a ecuației de gradul 3, deci singura rădăcină reală a polinomului $f = X^3 + (4 - 2i)X^2 + (2 - 7i)X - 3 - 3i$ este -3. Împărțim f la $X + 3$ (sau folosim schema lui Horner) și obținem câtul $X^2 + (1 - 2i)X - 1 - i$. Asociem ecuația de gradul doi, cu coeficienți în $\mathbb{C}$, $z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i = 0$. Evident soluțiile sunt i și $-1 + i$.