

Curs 1 - Axiomele de incidenta si consecintele lor: determinarea dreptei, planului, pozitii relative

1 Prezentarea materiei cursului

Partea dedicata geometriei a cursului "Complemente de algebra si geometrie" va trata cateva elemente de baza ale predarii geometriei in spatiu.

Dorim sa recapitulam, cat mai riguros, introducerea principalelor notiuni ale geometriei in spatiu si demonstrarea unor teoreme, atat sintetic, la nivelul de clasei a VIIIA, cat si afin euclidian/analitic, la nivelul anului I.

Scopul cursului este de a va ajuta sa predati corect materia aceasta elevilor de clasa a VIIIA si, in acelasi timp, sa recapitulati pentru examenul de licenta, o parte din materia de geometrie afina si euclidiană.

Vom insista doar pe o parte din materie, care presupune, din punctul nostru de vedere, anumite dificultati de predare.

Cursul va fi organizat dupa cum urmeaza:

Curs1 : Consecintele axiomelor de incidenta: determinarea dreptei, a planului, pozitii relative

Curs 2: Paralelism in spatiu

Cursuri 3 si 4: Perpendicularitate in spatiu

Curs 5: Unghiuri, distante

Cursuri 6,7: Volumul poliedrelor si al corpurilor rotunde

2 Axiomele de incidenta - tratare sintetica la nivelul clasei a VIIIA

Acest curs este inspirat din *E. Moise, Geometrie elementara dintr-un punct de vedere superior, Ed. Didactica si Pedagogica, Bucuresti 1980.*

Pentru aceasta grupa de axiome introducem urmatoarele notiuni si relatii primare:

- notiunile primare: *punct, dreapta, plan, spatiu*;
- relatiile primare: *apartenenta unui punct la o dreapta, apartenenta unui punct la un plan.*

Notam spatiul cu $\mathcal{S}$, punctele cu $A, B, \dots$, dreptele cu $a, b, \dots$, planele cu $\alpha, \beta, \dots$.

Relatiile primare le notam prin $A \in d$, $A \in \alpha$. Daca A nu apartine dreptei a notam $A \notin a$, iar daca B nu apartine planului β notam $B \notin \beta$.

Pentru simplitate, vom mai spune ca un punct se afla pe o dreapta sau ca o dreapta trece printr-un punct, etc. Facem observatia ca daca vorbim de doua puncte, se subintelege ca ele sunt distincte.

In continuare introducem o varianta didactica a axiomelor de incidenta.

Axiomele de incidenta

(I0) *Spatiul este o multime de puncte si dreptele, respectiv planele, sunt submultimi ale spatiului.*

(I1) (Axioma de determinare a dreptei) *Fiind date doua puncte, exista o singura dreapta care trece prin cele doua puncte.*

Dreapta determinata de punctele A si B se noteaza cu AB .

Definitie Mai multe puncte situate pe o aceeași dreaptă se numesc *coliniare*. În caz contrar, ele se numesc *necoliniare*.

Observatie Din axioma I1 deducem că orice două puncte sunt coliniare.

(I2) *Fiecare dreaptă conține cel puțin două puncte. În $\mathcal{S}$ există cel puțin trei puncte necoliniare. Fiecare plan conține cel puțin un punct.*

(I3) (Axioma de determinare a planului) *Date trei puncte necoliniare, există un singur plan care trece prin cele trei puncte.*

Planul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează cu (ABC) .

(I4) *Dacă două puncte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține planului.*

Consecinta Dacă două puncte ale unei drepte aparțin unui plan, dreapta este inclusă în plan.

(I5) *Dacă două plane au în comun un punct, ele mai au în comun cel puțin încă un punct.*

Definitie Punctele situate în același plan se numesc *coplanare*. În caz contrar ele se numesc *necoplanare*.

Observatie Din axioma I3 deducem că oricare trei puncte sunt coplanare.

(I6) $\mathcal{S}$ conține cel puțin patru puncte necoplanare.

Consecinte

Folosind axiomele I2 și I6 și metoda reducerii la absurd, deducem:

C1) a) Pentru orice dreaptă dată există cel puțin un punct care nu îi aparține. b) Pentru orice plan dat există cel puțin un punct care nu îi aparține

Definitie

Un punct care nu aparține unei drepte se numește *punct exterior dreptei*.

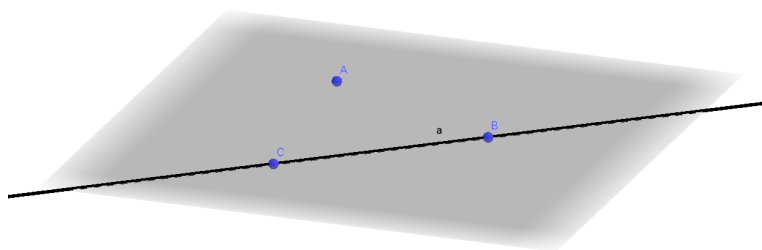
Un punct care nu aparține unui plan se numește *punct exterior planului*.

C2) (Determinarea planului) a) Orice dreaptă a și orice punct exterior ei A determină un plan unic, notat $\alpha := (a, A)$.

b) Două drepte concurente a și b determină un plan unic, notat $\alpha := (a, b)$.

Demonstratie

a)



Fie dreapta a și punctul $A \notin a$. Din I2 rezultă că există $B, C \in a$. Deci A, B, C sunt necoliniare, deci din I3 deducem că există un unic plan α cu $A, B, C \in \alpha$.

Deoarece $B, C \in a$ și $B, C \in \alpha$, din I4 rezultă că $a \subset \alpha$. Deci există planul $\alpha = (A, B, C)$ a.i. $A \in \alpha$ și $a \subset \alpha$.

Să demonstrăm că acesta este și unic. Presupunem că există planul β cu $A \in \beta$ și $a \subset \beta$. Din $B, C \in a$ și $a \subset \beta$ rezultă $B, C \in \beta$. Deci A, B, C sunt trei puncte necoliniare în β . Din axioma de determinare unică a planului rezultă că există un unic plan care conține aceste trei puncte. Deoarece $\alpha = (ABC) \Rightarrow \alpha = \beta$.

b) Tema: demonstrați în mod analog.

C3) Exista drepte ce nu apartin unui acelasi plan .

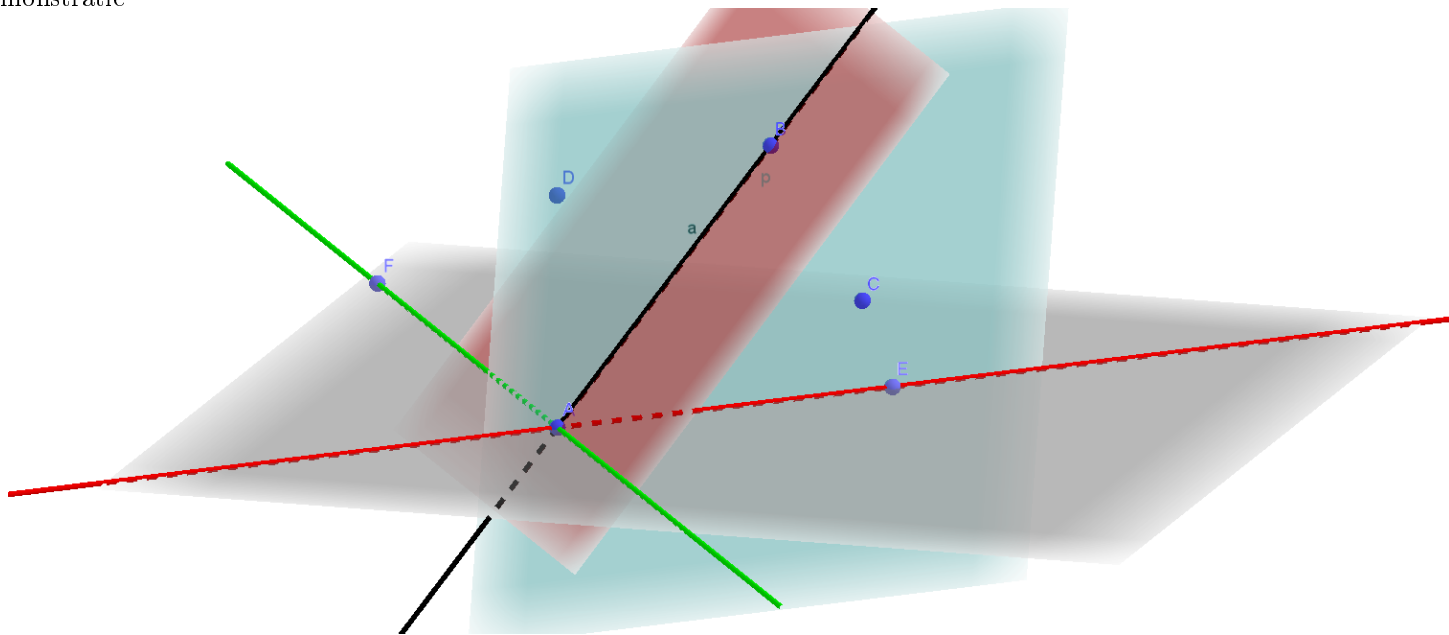
I6 cerifica existenta a cel putin patru puncte necoplanare. Fie acestea A, B, C, D . Rezulta ca dreptele AB si CD nu sunt incluse intr-un acelasi plan. Daca, prin reducere la absurd, ar exista un plan care sa contina ambele drepte, ar rezulta ca cele patru puncte sunt coplanare, contradictie.

Definitie Doua (sau mai multe) drepte pentru care nu exista nici un plan care sa le contina pe amandoua se numesc *drepte necoplanare*.

Doua sau mai multe drepte situate in acelasi plan se numesc *drepte coplanare*.

C4) Orice plan contine cel putin trei puncte necoliniare.

Demonstratie



Fie planul α . Exista atunci $A \in \alpha$ si $B \notin \alpha$ (din I2, respectiv C1b). Fie $a = AB$ (I1) . Din C1 a rezulta ca exista $C \notin a$. Din C2 b rezulta ca exista si este unic planul $\beta = (a, C)$. Aplicam din nou C1b, rezulta ca exista $D \notin \beta$. Deoarece $a \subset \beta$, rezulta ca $D \notin a$. Fie $\gamma = (a, D)$. Observam ca $A \in \alpha \cap \beta$, rezulta din I5 ca exista $E \in \alpha \cap \beta$. Analog, exista $F \in \gamma \cap \alpha$.

Vom demonstra ca punctele A, E, F din α sunt necoliniare. Presupunem prin reducere la absurd ca A, E, F sunt coliniare. Fie b dreapta care le contine. $A, E \in \beta \Rightarrow b \subset \beta$ (I4). Analog, $A, F \in \gamma \Rightarrow b \subset \gamma$. Deci $a, b \subset \beta$. $a, b \subset \gamma$ si $a \cap b = \{A\}$. Din C2 b rezulta ca $\beta = \gamma$, contradictie cu $D \in \gamma \setminus \beta$.

Din I1 respectiv I4, rezulta imediat:

C5) Doua drepte distincte au cel mult un punct comun.

C6) O dreapta ce nu este inclusa intr-un plan are cu acesta cel mult un punct in comun.

Daca $d \cap \alpha = \{P\}$ spunem ca *dreapta d este incidenta planului α* .

C7) Doua plane distincte fie nu au nici un punct comun, fie au o dreapta comuna.

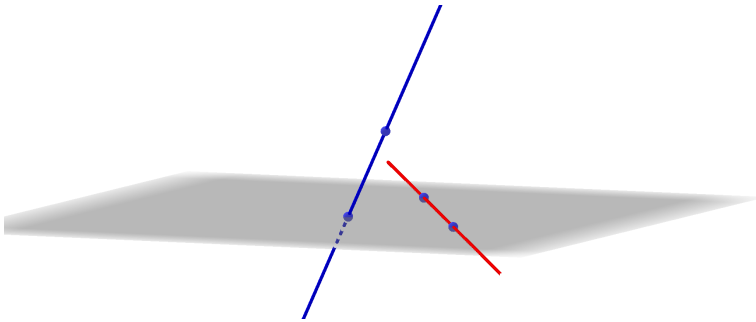
Demonstratie

Fie $\alpha \neq \beta$ doua plane. Evident exista posibilitatea ca $\alpha \cap \beta = \emptyset$ sau $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. In a doua varianta, fie $P \in \alpha \cap \beta$. Din I5 rezulta ca mai exista $Q \in \alpha \cap \beta$, iar din I4 deducem ca $PQ \subset \alpha \cap \beta$. Daca cele doua plane ar mai avea un punct comun R , exterior dreptei PQ , din axioma de determinare a planului rezulta ca $\alpha = \beta$, contradictie . Deci $\alpha \cap \beta = PQ$.

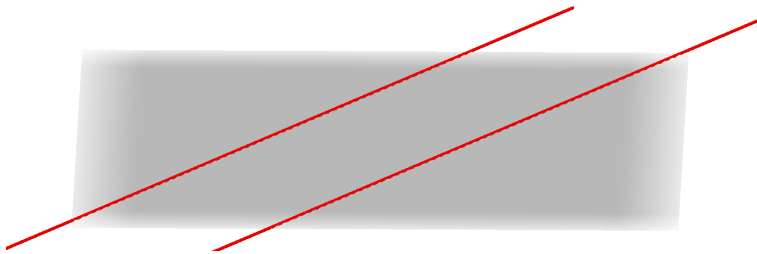
Principalele consecinte ale axiomelor de incidenta sunt deci pozitiile relative a doua drepte, a unei drepte fata de un plan si a doua plane.

In consecintele anterioare am obtinut:

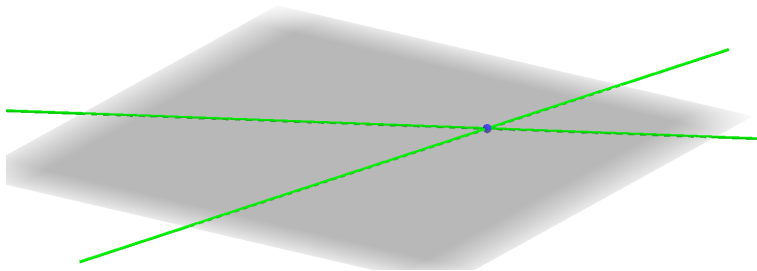
- Doua drepte pot fi
 - necoplanare



- coplanare
 - * fara puncte comune (le numim *paralele*)

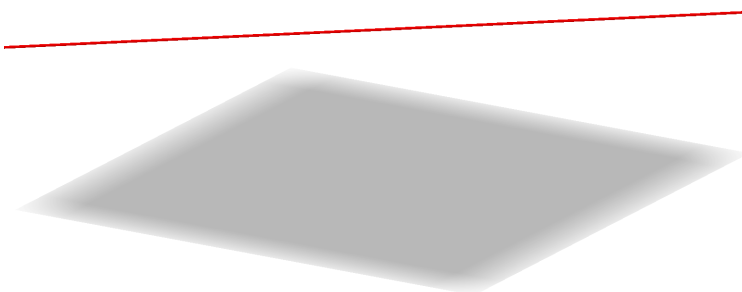


- * cu un singur punct comun (le numim *concurente*)

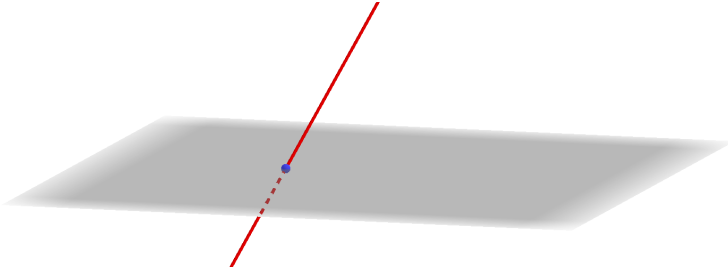


- * cu toate punctele comune (coincid)

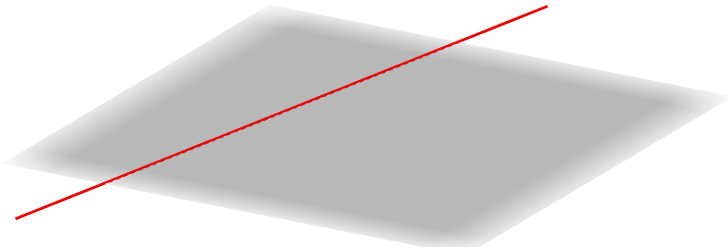
- Data o dreapta si un plan, acestea
 - nu au nici un punct comun (spunem ca *dreapta este paralela cu planul*)



- au un singur punct comun (*dreapta este incidenta planului*)

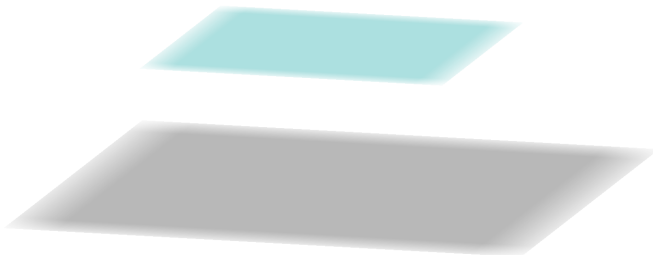


- au o infinitate de unte comune, mai exact *dreapta este inclusa in plan*

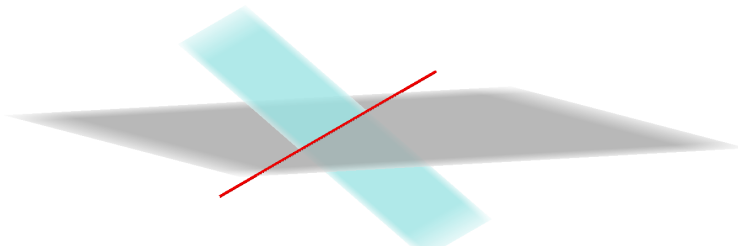


- Date doua plane, ele

- nu au puncte comune (le numim *paralele*)



- au o dreapta comuna



- coincid

Observatie Am vazut ca doua drepte sunt paralele daca sunt coplanare si nu au puncte comune. Deci date doua drepte paralele, ele determina un plan. Motivati aceasta afirmatie pe indelete! Astfel am regasit o parte din modurile de determinare a unui plan studiate in gimnaziu. Vom adauga un alt tip de determinare in capitolul dedicat perpendicularitatii in spatiu.

3 Determinarea dreptei si planului ca subspatii afine

Vom reaminti acum toate modurile de determinare ale unui subspatiu afin, cat si tipurile de ecuatii ale acestora, pentru cazurile particulare ale dreptei, planului intr-un spatiu afin trei dimensional. Ne oprim doar la acele moduri de determinare corespunzatoare geometriei afine, vom reveni ulterior pentru cazul subspatiilor afine euclidiene.

3.1 Spatii afine

Reamintim cateva notiuni, teoreme, notatii, utile in prezentarile ulterioare.

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \Phi)$ un spatiu afin peste corpul comutativ $\mathbb{K}$. Adica un triplet format dintr-o multime nevida X , un spatiu vectorial $\vec{X}$ peste $\mathbb{K}$ si o functie $\Phi : X \times X \rightarrow \vec{X}$ cu proprietatile:

(1) $\exists O \in X$ a.i. functia $\Phi_O : X \rightarrow \vec{X}$, $\Phi_O(A) = \Phi(O, A)$, $\forall A \in X$, este bijectiva;

(2) $\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C)$, $\forall A, B, C \in X$.

Elementele lui X se numesc *puncte*, ale lui $\vec{X}$ *vectori*, iar functia Φ se numeste *structura afina*. Numim $\vec{X}$ *spatiul liniar director* al spatiului afin $\mathcal{A}$. Dimensiunea spatiului afin $\mathcal{A}$ este egala, prin definitie, cu dimensiunea spatiului sau liniar director.

Se poate demonstra ca daca are loc (1), atunci pentru orice $O \in X$, functia $\Phi_O : X \rightarrow \vec{X}$ este bijectiva.

Cel mai simplu exemplu este dat de spatiul afin geometric. Consider $\mathcal{S}$ multimea punctelor spatiului geometric, $\mathcal{V}$ spatiul liniar real al vectorilor liberi si

$$\Phi : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V},$$

$$\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}.$$

Evident Φ are proprietatile (1) si (2) din definitia anterioara.

Datorita acestui exemplu notam in general, pentru un spatiu afin arbitrar, $\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

Fie $P \in X$ fixat arbitrar.

Definim $+$: $X \times X \rightarrow X$ si $\cdot$: $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ prin

$$A + B = \Phi_P^{-1}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}), \forall A, B \in X,$$

$$\alpha A = \Phi_P^{-1}(\alpha \overrightarrow{PA}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in X.$$

Multimea X impreuna cu legile de compozitie definite anterior are o structura de spatiu liniar peste $\mathbb{K}$ si $\Phi_P : X \rightarrow \vec{X}$ este izomorfism de spatii liniare.

Structura de spatiu liniar a lui X depinde de alegerea lui P , de aceea notam spatiul liniar obtinut cu $T_P X$ si il numim vectorializat al lui X in P sau *spatiul liniar tangent la X in P* .

Dat spatiul afin $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \Phi)$, definim o operatie de adunare a punctelor cu vectori prin

$$+ : X \times \vec{X} \rightarrow X$$

$$P + \bar{u} = \Phi_P^{-1}(\bar{u}) \Leftrightarrow$$

$$P + \bar{u} = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \bar{u}.$$

Operatia definita anterior are urmatoarele proprietati:

(1) $A + (\bar{u} + \bar{v}) = (A + \bar{u}) + \bar{v}$, $\forall A \in X$, $\bar{u}, \bar{v} \in \vec{X}$;

(2) $A + \bar{0} = A$ $\forall A \in X$;

(3) $\forall A, B \in X \exists! \bar{v} \in \vec{X}$ a.i. $B = A + \bar{v}$.

Observam ca putem defini un spatiu afin ca un triplet $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, +)$, cu $+$: $X \times \vec{X} \rightarrow X$ o lege de compozitie ce are proprietatile (1),(2),(3) din teorema anterioara.

Atunci, consideram $\Phi : X \times X \rightarrow \vec{X}$, definita prin $\Phi(A, B) = \bar{u}$ unic determinat de conditia $A + \bar{u} = B$.

Se verifica faptul ca Φ este o structura afina pe X .

Se numeste **combinatie afina de puncte** o expresie de tipul

$$\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^n A_n, \text{ cu } \sum_{i=1}^n \alpha^i = 1, \alpha^i \in \mathbb{K}, \forall i \in \overline{1, n}.$$

Conditia $\sum_{i=1}^n \alpha^i = 1$ este esentiala pentru ca expresia $\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^n A_n$ sa nu depinda de spatiul liniar $T_P \mathcal{S}$ in care s-a definit.

Punctul $A = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^n A_n$ se numeste **baricentrul sistemului de puncte $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ cu ponderile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$** .

Daca ponderile sunt egale vorbim de echibaricentru.

Fie multimea nevida $M \subset X$.

Infasuratoarea (acoperirea/inchiderea) afina a lui M este multimea tuturor combinatiilor afine finite de puncte din M :

$$\langle M \rangle_{af} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha^i P_i \mid P_i \in M, \alpha^i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^m \alpha^i = 1, m \in \mathbb{N} \right\}$$

(1) Un sistem de puncte $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ se numeste **afin dependent** daca $\exists i \in \overline{1, n}$ astfel incat P_i sa fie baricentrul cu anumite ponderi ale celorlalte puncte din sistem.

(2) Un sistem finit de puncte se numeste **afin independent** daca contine un singur punct sau daca nu este afin dependent.

(3) O multime infinita de puncte $S \subset X$ se numeste afin independenta daca orice sistem finit de puncte ale sale este afin independent.

(4) Sistemul de puncte $\{P_1, \dots, P_n\}$ este afin dependent (respectiv afin independent) daca si numai daca sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_n}\}$ este liniar dependent (liniar independent).

In acest caz sistemul de puncte $\{\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_n}\}$ este liniar dependent (liniar independent), $\forall i \in \overline{2, n}$.

Observatii

(1) Orice doua puncte afin independente sunt distincte. Numim segment un sistem de doua puncte afin independente.

(2) Trei puncte sunt afin independente daca si numai daca sunt necoliniare. Un sistem de trei puncte afin independente se numeste triunghi. De asemenea patru puncte sunt afin independente daca si numai daca sunt necoplanare. Ele formeaza un tetraedru.

Presupunem ca $\dim \mathcal{A} = n$. Un **reper afin** este un sistem de $n+1$ puncte afin independente $\mathcal{R}_a = \{A_0, A_1, \dots, A_n\} \subset X$.

Daca $\mathcal{R}_a = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ este un reper afin in $\mathcal{A}^n$, atunci oricarui punct $P \in X$ i se asociaza in mod unic scalarii $\alpha^i \in \mathbb{K}$, $i \in \overline{0, n}$, cu $\sum_{i=1}^n \alpha^i = 1$, astfel incat $P = \alpha^0 A_0 + \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n$.

Numerele α^i , $i \in \overline{0, n}$ se numesc **coordonatele baricentrice** ale lui P in raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a$.

3.2 Subspatii afine

Definitie

Fie $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \Phi)$ un spatiu afin peste $\mathbb{K}$. O submultime $Y \subset X$ se numeste subspatiu afin al lui X daca $Y = \emptyset$ sau daca $Y \neq \emptyset$ si exista un subspatiu liniar V al lui $\vec{X}$ astfel incat $\Phi(Y \times Y) \subset V$ si $(Y, V, \Phi|_{Y \times Y})$ este un spatiu afin.

Teorema de caracterizare

(a) Daca Y este subspatiu afin nevid al lui X atunci pentru orice punct $O \in Y$ multimea $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in Y\}$ este subspatiu liniar al lui $\vec{X}$ si coincide cu $\vec{Y}$. In plus $\forall O \in Y : Y = O + \vec{Y} = \{O + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{Y}\}$.

(b) Daca $\emptyset \neq Y \subset X$ si exista $O \in Y$ astfel incat $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in Y\}$ este subspatiu liniar al lui $\overrightarrow{X}$, atunci Y este subspatiu afin al lui X si $\overrightarrow{Y} = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in Y\}$. In plus $Y = O + \overrightarrow{Y}$.

Deci un prim mod de determinare a unui subspatiu afin este prin a se da un punct al sau si subspatiul liniar director al sau (se precizeaza o baza in acesta).

Teorema de caracterizare

- (1) Daca $\text{Car}\mathbb{K} \neq 2$, Y este subspatiu afin al lui X daca si numai daca $\forall P, Q \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha P + (1 - \alpha)Q \in Y$.
- (2) Daca $\text{Car}\mathbb{K} = 2$, Y este subspatiu afin al lui X daca si numai daca $\forall P, Q, R \in Y \Rightarrow \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R \in Y$.

Corolar

Fie $\emptyset \neq Y \subset X$. Atunci Y este subspatiu afin al lui X daca si numai daca Y isi contine toate baricentrele cu orice ponderi $\Leftrightarrow Y = \langle Y \rangle_{af}$.

Din rezultatul anterior rezulta ca infasuratoarea afina a unei multimi este un subspatiu afin.

Astfel avem un al doilea mod de determinare a unui subspatiu afin. El este dat ca infasuratoarea afina a unei multimi de puncte afin independente (deci se precizeaza un reper afin al sau).

O **dreapta afina** este un subspatiu afin de dimensiune 1.

Fie doua puncte distincte $A, B \in X$. **Atunci** infasuratoarea afina a multimii formate din cele doua puncte este o dreapta afina.

$$\langle AB \rangle := \langle A, B \rangle_{af} = \{\alpha A + (1 - \alpha)B \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Vedem similitudinea cu axioma de determinare a dreptei.

Evident $\{A, B\}$ este un reper afin pe dreapta $\langle AB \rangle$, iar $\{A; \overrightarrow{AB}\}$ un reper cartezian.

Dreapta afina poate fi data si printr-un punct al ei si un vector nenul din spatiul sau liniar director

$$d = A + \overrightarrow{d} = A + [\overline{a}],$$

unde am notat cu $[\overline{a}]$ subspatiul liniar generat de vectorul director nenul $\overline{a} \in \overrightarrow{d}$. De exemplu $\langle AB \rangle = A + [\overrightarrow{AB}]$.

Un **plan afin** este un subspatiu afin de dimensiune 2.

Fie A, B, C trei puncte afin independente.

Atunci $\langle ABC \rangle := \langle A, B, C \rangle_{af} = \{\alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)C \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ este un plan afin. $\{A, B, C\}$ este un reper afin in planul considerat si $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ este un reper cartezian.

Aici observam asemanarea cu axioma de determinare a planului.

Un plan afin π este unic determinat si de un punct $A \in \pi$ arbitrar fixat si $\overline{a}, \overline{b} \in \overrightarrow{\pi}$ doi vectori necoliniari.

$$\pi = A + \overrightarrow{\pi} = A + [\overline{a}, \overline{b}].$$

De exemplu $\langle ABC \rangle = A + [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Acest mod de definire a unui plan afin este similar teoremei care spune ca doua drepte concurente determina un plan.

Operatii cu subspatii affine

1) O intersectie arbitrara de subspatii affine este subspatiu afin. Daca intersectia este nevida, atunci spatiul sau liniar director este intersectia spatiilor liniare directe ale subspatiilor affine considerate.

Fie P un punct arbitrar din intersectia subspatiilor affine $Y_i \subset X$, $i \in I \neq \emptyset$. Atunci

$$\bigcap_{i \in I} Y_i = P + \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{Y}_i.$$

Se poate demonstra ca infasuratoarea afina a unei multimi nevide $S \subset X$ coincide cu intersectia tuturor subspatiilor affine ale lui X ce contin pe S , de aceea utilizam pentru $< S >_{af}$ si denumirea de subspatiu afin generat de S .

In general, reuniunea a doua spatii affine nu este un spatiu afin.

De exemplu, $Y_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$ si $Y_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 1\}$ sunt subspatii affine ale lui $\mathbb{R}^2$. Fie $P = (1, 0)$ si $Q = (2, 1)$. Observam ca $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = (\frac{3}{2}, 1) \notin Y_1 \cup Y_2$, deci $Y_1 \cup Y_2$ nu este subspatiu afin.

2) Suma a doua subspatii affine $Y_1, Y_2 \subset X$ este subspatiul afin generat de reuniunea lor:

$$Y_1 + Y_2 = < Y_1 \cup Y_2 >_{af}.$$

Deci $Y_1 + Y_2$ este cel mai mic subspatiu afin (in sensul incluziunii) care contine pe $Y_1 \cup Y_2$.

3.3 Ecuatiile subspatiilor affine

Consideram spatiul afin real $\mathcal{A}^3 = (X, \vec{X}, \Phi)$ de dimensiune trei, in care fixam un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Putem scrie ecuatiile unui subspatiu afin $Y = A + \vec{Y}$ al lui X atunci cand cunoastem un punct al lui Y si o baza in spatiul linar director.

Consideram $d = A + \vec{d}$ o dreapta afina.

Presupunem ca A are in raport cu $\mathcal{R}$ vectorul de pozitie

$\bar{r}_0 = \vec{OA} = x_0^1 \bar{e}_1 + x_0^2 \bar{e}_2 + x_0^3 \bar{e}_3$ si $\bar{a} = a^1 \bar{e}_1 + a^2 \bar{e}_2 + a^3 \bar{e}_3 \neq \bar{0}$, $\bar{a} \in \vec{d}$ este un vector director al dreptei.

Fie un punct arbitrar $P \in X$ de vector de pozitie $\bar{r} = \vec{OP} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3$.

Punctul P apartine dreptei d daca si numai daca $\vec{AP} \in [\bar{a}] \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}. i. \vec{AP} = t\bar{a}$, deci vectorul sau de pozitie, respectiv coordonatele sale in raport cu $\mathcal{R}$ verifica unul din seturile de ecuatii echivalente:

- ecuatia vectoriala: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$, $t \in \mathbb{R}$;
- ecuatiile parametrice:
$$\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + ta^1, \\ x^2 &= x_0^2 + ta^2, \\ x^3 &= x_0^3 + ta^3, \end{cases} t \in \mathbb{R};$$
- ecuatiile canonice: $\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \frac{x^3 - x_0^3}{a^3};$
- ecuatiile dreptei ca intersectie de (hiper)plane:
$$\begin{cases} a^2 x^1 - a^1 x^2 + (a^1 x_0^2 - a^2 x_0^1) &= 0, \\ a^3 x^2 - a^2 x^3 + (a^2 x_0^3 - a^3 x_0^2) &= 0. \end{cases}$$

Daca dreapta d e data ca $d = < A, B >_{af}$, $A \neq B$, atunci $\vec{AB} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$ este o baza in $\vec{d}$ si putem particulariza formulele anterioare pentru $\bar{a} = \vec{AB}$.

Exemplu

Fie dreapta $d = A + [\bar{a}]$, cu $A(\bar{r}_0)$, $\bar{r}_0 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$, $\bar{a} = -4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 - \bar{e}_3$.

- Ecuatiile parametrice:
$$\begin{cases} x^1 &= 2 - 4t, \\ x^2 &= -3 + 7t, \\ x^3 &= 5 - t, \end{cases} t \in \mathbb{R};$$

- Ecuatiile canonice:

$$\frac{x^1 - 2}{-4} = \frac{x^2 + 3}{7} = \frac{x^3 - 5}{-1};$$

- Ecuatiile dreptei ca intersectie de plane:
$$\begin{cases} 7x^1 + 4x^2 - 2 &= 0, \\ x^2 + 7x^3 - 32 &= 0. \end{cases}$$

Ecuatiile planului afin in $\mathcal{A}^3$

Fie planul afin $\pi = A + \vec{\pi}$ ce trece prin $A(\bar{r}_0)$, cu spatiul liniar director $\vec{\pi} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ fiind vectorii unei baze in $\vec{\pi}$.

In raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}$, presupunem ca $\bar{r}_0 = x_0^1 \bar{e}_1 + x_0^2 \bar{e}_2 + x_0^3 \bar{e}_3$, $\bar{a}_1 = a_1^1 \bar{e}_1 + a_1^2 \bar{e}_2 + a_1^3 \bar{e}_3 \neq \bar{0}$, $\bar{a}_2 = a_2^1 \bar{e}_1 + a_2^2 \bar{e}_2 + a_2^3 \bar{e}_3 \neq \bar{0}$. Atunci un punct oarecare $P \in X$, ce are in raport cu $\mathcal{R}$ vectorul de pozitie $\bar{r} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3$, apartine planului π daca si numai daca $\overrightarrow{AP}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sunt coplanari, deci vectorul sau de pozitie, respectiv coordonatele sale in raport cu $\mathcal{R}$ verifica unul din seturile de ecuatii echivalente:

- ecuatia vectoriala: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t^1 \bar{a}_1 + t^2 \bar{a}_2$, $t^1, t^2 \in \mathbb{R}$;
- ecuatii parametrice:
$$\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + t^1 a_1^1 + t^2 a_2^1, \\ x^2 &= x_0^2 + t^1 a_1^2 + t^2 a_2^2, \\ x^3 &= x_0^3 + t^1 a_1^3 + t^2 a_2^3, \end{cases} t^1, t^2 \in \mathbb{R};$$
- ecuatia planului sub forma de determinant:
$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ x^2 - x_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \\ x^3 - x_0^3 & a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = 0;$$
- ecuatia generala a planului, obtinuta din dezvoltarea determinantului anterior dupa prima coloana:

$$ax^1 + bx^2 + cx^3 + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

- Daca $\pi = \langle A, B, C \rangle_{af}$, cu A, B, C necoliniare, consideram $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ o baza in $\vec{\pi}$ si particularizam formulele anterioare pentru $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ si $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$.

De exemplu, ecuatii planului π ce trece prin $A(1, 2, 3)$, avand spatiul liniar director $\vec{\pi} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$, $\bar{a}_1(3, -2, 5)$, $\bar{a}_2(1, -4, 2)$ sunt:

- ecuatii parametrice:
$$\begin{cases} x^1 &= 1 + 3t^1 + t^2, \\ x^2 &= 2 - 2t^1 - 4t^2, \\ x^3 &= 3 + 5t^1 + 2t^2, \end{cases} t^1, t^2 \in \mathbb{R};$$
- ecuatia sub forma de determinant:
$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & 3 & 1 \\ x^2 - 2 & -2 & -4 \\ x^3 - 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$
- ecuatia generala: $16x^1 - x^2 - 10x^3 + 16 = 0$.

3.4 Pozitii relative

Pentru ca in studiul pozitiiilor relative intervine notiunea de subspatii affine paralele, reamintim:

Definitie Subspatiile affine Y_1 si Y_2 sunt **paralele** daca $\vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$ sau $\vec{Y}_2 \subseteq \vec{Y}_1$. Notam $Y_1 \parallel Y_2$.

Teorema Daca $Y_1 \parallel Y_2$ atunci $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, sau $Y_1 \subseteq Y_2$, sau $Y_2 \subseteq Y_1$.

Observatie Nu este adevarat ca doua subspatii affine disjuncte sunt paralele.

Observam ca doua subspatii affine paralele pot avea puncte comune, mai exact unul dintre ele poate fi inclus in celalalt sau, daca au aceeasi dimensiune, ele pot coincide. Aceasta definitie coincide cu cea de paralelism in sens larg studiata in gimnaziu.

Pentru a nu crea confuzii între modul de definire a paralelismului în gimnaziu și în anul I, în continuare vom numi subspații affine paralele doar pe cele cu $\vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$ sau $\vec{Y}_2 \subseteq \vec{Y}_1$ și disjuncte. Altfel vom spune că un subspațiu este inclus în celălalt sau că ele coincid.

Vom reveni la aceste aspecte legate de paralelism în cursul II.

Pozitiile relative a doua drepte în $\mathcal{A}^3$

Fie $d_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$, $\bar{a}_1 \neq \bar{0}$ și $d_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$, $\bar{a}_2 \neq \bar{0}$. Atunci dreptele d_1 și d_2 sunt:

- necoplanare dacă și numai dacă $(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0$;
- concurente $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0$ și $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \neq \bar{0}$;
- paralele $\Leftrightarrow \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{0}$ și $\overrightarrow{A_1A_2} \times \bar{a}_1 \neq \bar{0}$;
- coincid $\Leftrightarrow \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{0}$ și $\overrightarrow{A_1A_2} \times \bar{a}_1 = \bar{0}$.

Evident, o altă metodă de a studia poziția relativă a două drepte este determinarea soluțiilor sistemului format din ecuațiile celor două drepte.

Exemplu

Studiati în funcție de parametrii reali α, β , pozițiile relative ale dreptelor:

a) $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{\alpha} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$;

b) $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+\beta}{3}$, $d_2 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$.

a) Determinăm $A_1(0, -1, 0) \in d_1$, $\bar{a}_1(2, \alpha, 1) \in \vec{d}_1$, $A_2(-1, 0, 1) \in d_2$, $\bar{a}_2(4, 1, 2) \in \vec{d}_2$. Calculăm $(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = -6\alpha + 3$.

Dacă $\alpha \neq \frac{1}{2}$ rezultă că dreptele sunt necoplanare.

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ observăm că $\bar{a}_2 = 2\bar{a}_1$ și $\overrightarrow{A_1A_2}$ e necoliniară cu $\bar{a}_1$, deci dreptele sunt paralele.

b) Determinăm $A_1(1, 0, -\beta) \in d_1$, $\bar{a}_1(1, 2, 3) \in \vec{d}_1$, $A_2(3, -1, -1) \in d_2$, $\bar{a}_2(-2, 1, 1) \in \vec{d}_2$. Calculăm $(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 5\beta$.

Dacă $\beta \neq 0$ rezultă că dreptele sunt necoplanare.

Dacă $\beta = 0$ observăm că $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sunt necoliniari, deci dreptele sunt concurente. Rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte, determinăm punctul de concurență: $d_1 \cap d_2 = \{A_1\}$.

Pozitiile relative ale unei drepte față de un plan în $\mathcal{A}^3$

Fie dreapta $d = A + [\bar{a}]$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ și planul $\pi = B + [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$, $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ liniar independenți.

Dreapta d este inclusă în planul π dacă și numai dacă $\bar{a} \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ și $\overrightarrow{AB} \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$.

Dreapta d este incidentă planului π dacă și numai dacă $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ sunt liniar independenți.

Dreapta d este paralelă cu π dacă și numai dacă $\bar{a} \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ și $\overrightarrow{AB} \notin [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$.

Studiul poziției relative a unei drepte față de un plan se poate face studiind și mulțimea soluțiilor sistemului format din ecuația dreptei, respectiv a planului.

De exemplu, dacă $d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$ cu $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$ și $\pi : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$, $\text{rang} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1$, atunci:

d este incidenta planului π dacă și numai dacă sistemul
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$
 are soluție unică $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dreapta d este paralela cu planul π dacă și numai dacă sistemul de mai sus este incompatibil. Știm că
$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2.$$
 Sistemul format din cele trei ecuații e incompatibil dacă

și numai dacă
$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 3.$$
 Dacă presupunem că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci minorul caracteristic

corespunzător acestui minor principal trebuie să fie nenul:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$
 Deci $d \parallel \pi$ dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dreapta d este inclusă în planul π dacă și numai dacă sistemul format din cele trei ecuații este compatibil dublu nedeterminat, deci dacă și numai dacă
$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 2,$$
 adică toți minorii caracteristici anteriori

anteriori sunt nuli:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplu

Studiat poziția relativă a dreptei δ față de planul π :

$$d: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \quad \pi: \alpha x + y + 2z + 1 = 0.$$

Considerăm sistemul
$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + y + z = 0, \\ \alpha x + y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$
 Determinantul matricii sistemului este $2\alpha - 1$. Dacă $\alpha \neq \frac{1}{2}$ rezultă

că sistemul are soluție unică, deci dreapta este incidentă planului. Pentru a determina punctul de intersecție dintre dreapta și plan, se rezolvă sistemul prin metoda Cramer de exemplu.

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, observăm că rangul matricii sistemului este 2, de exemplu alegem minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Minorul caracteristic este
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0,$$
 deci sistemul este incompatibil. Rezultă că dreapta este paralela cu planul.

Pozițiile relative a două plane în $\mathcal{A}^3$

Fie planele $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 1$ și $\text{rang} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$.

Planurile coincid dacă cele două ecuații anterioare au aceleași soluții, deci sunt echivalente $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$.

Planele sunt paralele dacă au aceleași subspații liniare directoare (deci ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ sunt echivalente) dar nu au puncte comune, (deci sistemul format din cele două ecuații este incompatibil) $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$.

Intersecția celor două plane este o dreapta dacă și numai dacă sistemul format din ecuațiile lor este compatibil

simplu nedeterminat $\Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$.

De exemplu, planele $\pi_1 : x + y - z - 1 = 0$ si $\pi_2 : 2x - y + 1 = 0$ se intersecteaza dupa o dreapta, planele $\alpha_1 : 2x - 3y + z - 2 = 0$, $\alpha_2 : 4x - 6y + 2z + 1 = 0$ sunt paralele, iar planele $\beta_1 : x + y - 2z + 1 = 0$, $\beta_2 : 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ coincid.

Vom completa ulterior acest studiu in cazul euclidian.

4 Aplicatii

1) Fie punctele A, B, C, D necoplanare, M, N, P respectiv mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CA]$. Demonstrati ca intersectia planelor $(DMC), (DBP), (DAN)$ este o dreapta.

2) (Teorema lui Desargues) Fie punctele A, B, C, D necoplanare si punctele $M \in (AB), N \in (AC), P \in (AD)$ astfel incat $MN \cap BC = \{E\}, NP \cap CD = \{F\}$ si $MP \cap BD = \{G\}$. Demonstrati ca punctele E, F, G sunt coliniare.

3) a) Cate drepte diferite se pot forma cu patru puncte? b) Se dau zece puncte distincte, nu toate coplanare. Care e numarul minim de drepte diferite determinate de aceste puncte? Dar numarul maxim?

4) Se dau cinci puncte distincte, nu toate coplanare. Determinati numarul minim/maxim de plane diferite ce se pot forma cu aceste puncte.

Cadrul de lucru: un spatiu afin real trei dimensional in care se fixeaza un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ce determina axele de coordonate Ox, Oy, Oz .

5) Scrieti toate tipurile de ecuatii pentru dreptele afine urmatoare:

a) dreapta ce trece prin $A(2, -1, 3)$ si are spatiul liniar director $\vec{\delta} = [\bar{a}]$ cu $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$;

b) dreapta ce trece prin punctele $P_1(1, -1, 1)$ si $P_2(3, 1, -2)$;

c) dreapta ce trece prin $P(1, 2, 3)$ si este paralela cu axa Oy ;

d) dreapta ce trece prin $Q(-1, 2, 6)$ si este paralela cu dreapta de ecuatii $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$;

e) dreapta data ca intersectie de doua plane $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

6) Determinati ecuatiile parametrice si ecuatia generala a urmatoarelor plane:

a) planul ce trece prin $P(3, -1, 2)$ si are spatiul liniar director $V = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$, cu $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{u}_2 = -2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$;

b) planul ce trece prin punctele $A(1, 2, 3), B(2, -1, 1), C(3, 0, 1)$;

c) planul prin $P(3, 1, 6)$ paralel cu planul (xOy) ;

d) planul prin $Q(4, -2, 1)$, paralel cu dreptele de ecuatii

$$\delta_1 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}, \quad \delta_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{5};$$

e) planul prin $P(1, 5, -6)$, paralel cu planul $\pi : 2x + y - z + 1$;

f) planul ce contine dreapta

$$\delta_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$$

si e paralel cu dreapta

$$\delta_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-\frac{1}{2}};$$

g) planul ce trece prin $R(1, 2, 3)$ si prin intersectia planelor $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ si $\pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0$.

h) planul ce contine dreapta $\delta : \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ si este paralel cu planul $\pi : x + y - z + 15 = 0$.

7) Studiați poziția relativă a următoarelor drepte. Dacă sunt coplanare, scrieți ecuația generală a planului ce le conține. În cazul în care dreptele sunt concurente, determinați coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

$$d_1 : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 4 + 2t \\ z = 8 + 5t \end{cases}$$

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}, \quad d_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1};$$

$$d_1 : \frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}, \quad d_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-\frac{1}{2}};$$

$$d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1}, \quad d_2 : \frac{x-5}{4} = \frac{y-9}{7} = \frac{z-6}{3}.$$

$$d_1 : \begin{cases} 4x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

8) Determinați poziția relativă a următoarelor perechi de plane:

- a) $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$, $\pi_2 : x + y + z - 1 = 0$;
- b) $\pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0$, $\pi_2 : 6x + 3y - 3z + 2 = 0$;
- c) $\pi_1 : 2x - 3y + 6z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y + 4z - 2 = 0$;
- d) $\pi_1 : 2x + 3y - 6z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + 6y - 12z - 1 = 0$.

9) Fie dreapta

$$\delta : \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{x-1}{5}$$

și planul $\pi : x + 3y - 2z + 15 = 0$. Determinați poziția relativă a dreptei δ față de planul π și scrieți ecuația generală a planului ce conține dreapta δ și este paralel cu planul π .

10) Determinați poziția relativă a dreptei $d : \frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{6}$ față de planul $\pi : 2x + y - 7z + 1 = 0$.