

Curs 11-12 - Spații liniare hermitiene și euclidiene

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

Amintim câteva noțiuni legate de numerele complexe.

Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a := \operatorname{Re}(z)$ este partea reală a lui z și $bi = \operatorname{Im}(z)$ este partea imaginară a lui z .

Modulul lui z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, conjugatul lui z este $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ și $z\bar{z} = |z|^2$.

Cunoaștem următoarele proprietăți ale numerelor complexe.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Definiția 1 Fie V un spațiu vectorial complex. Se numește **produs hermitian** pe V o aplicație

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

care satisface condițiile:

(i) $\langle \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}_1, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}_2, \bar{v} \rangle, \forall \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v} \in V$; (aditivă în primul argument)

(ii) $\langle \lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$; (omogenă în primul argument)

(iii) $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = \overline{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$; (simetrie conjugată)

(iv) $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \in \mathbb{R}, \forall \bar{u} \in V, \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0, \forall \bar{u} \in V$ și $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = 0$.

Să studiem dacă o astfel de aplicație este aditivă și omogenă în al doilea argument.

$\langle \bar{u}, \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \rangle = \overline{\langle \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{u} \rangle} = \overline{\langle \bar{v}_1, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}_2, \bar{u} \rangle} = \overline{\langle \bar{v}_1, \bar{u} \rangle} + \overline{\langle \bar{v}_2, \bar{u} \rangle} = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle$, deci este aditivă în al doilea argument.

$\langle \bar{u}, \alpha \bar{v} \rangle = \overline{\langle \alpha \bar{v}, \bar{u} \rangle} = \overline{\alpha \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle} = \bar{\alpha} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$. Deci nu este omogenă în al doilea argument.

Un exemplu simplu de produs hermitian pe \mathbb{C}^n este

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

unde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Definiția 2 Un spațiu liniar complex înzestrat cu un produs hermitian se numește spațiu hermitian sau unitar.

Dar dacă am lucra pe un spațiu liniar real, aplicația din definiția anterioară ce proprietăți ar avea?

Definiția 3 Fie V un spațiu vectorial real. Se numește **produs scalar** pe V o aplicație

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

care satisface condițiile:

(i) $\langle \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}_1, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}_2, \bar{v} \rangle, \forall \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v} \in V$;

(ii) $\langle \lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$;

(iii) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$;

(iv) $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0, \forall \bar{u} \in V$ și $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = 0$.

Remarca 4 Din cele patru proprietăți de mai sus, se mai pot deduce următoarele:

1. $\langle \bar{u}, \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle, \forall \bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$
2. $\langle \bar{u}, \lambda \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$
3. $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0, \forall \bar{v} \in V$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\langle \bar{u}, \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \rangle &= \langle \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}_1, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}_2, \bar{u} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle, \\ \langle \bar{u}, \lambda \bar{v} \rangle &= \langle \lambda \bar{v}, \bar{u} \rangle = \lambda \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \\ \langle \bar{0}, \bar{v} \rangle &= \langle \bar{u} - \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Deci un produs scalar este o formă bilinară, simetrică, cu forma pătratică asociată pozitiv definită.

Definiția 5 Un spațiu vectorial înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se numește **spațiu euclidian**.

Exemplul 6 Pe spațiul vectorial \mathbb{R}^n definim produsul scalar canonic

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

unde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 7 Pe spațiul vectorial al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim produsul scalar

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemplul 8 Pe spațiul vectorial al funcțiilor continue definite pe $[a, b]$ definim produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \forall f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Vom nota în general spațiile euclidiene prin $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sau simplu prin E .

Definiția 9 Fie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian sau hermitian. Spunem că \bar{x} este ortogonal pe \bar{y} ($\bar{x} \perp \bar{y}$) dacă $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Lema 10 Fie $\bar{y} \neq \bar{0}$ un vector nenul arbitrar din E . Atunci orice vector din E se poate scrie ca suma dintre un vector coliniar (liniar dependent) cu \bar{y} și un vector ortogonal pe \bar{y} .

$$\forall \bar{x} \in E \exists \alpha \in K, \exists \bar{z} \in E, \bar{z} \perp \bar{y} \text{ a.i. } \bar{x} = \alpha \bar{y} + \bar{z}.$$

Fie $\alpha = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2}$ și $\bar{z} = \bar{x} - \alpha \bar{y}$. Demonstrăm că $\bar{z} \perp \bar{y}$. $\langle \bar{z}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x} - \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2} \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle - \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2} \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = 0$.

Deci

$$\bar{x} = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2} \bar{y} + \bar{z}, \bar{z} \perp \bar{y}.$$

Definiția 11 Fie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian sau hermitian. Definim aplicația

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}, \|\bar{u}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}, \forall \bar{u} \in E$$

și o numim norma indusă de produsul scalar/hermitian.

Pentru produsul hermitian/sclar canonic pe K^n , unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, avem

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \forall \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n.$$

Teorema 12 Norma pe spațiul euclidian sau hermitian (E, \langle, \rangle) are următoarele proprietăți.

(1) $\| \bar{u} \| \geq 0, \forall \bar{u} \in E, \| \bar{u} \| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0};$

(2) $\| \lambda \bar{u} \| = |\lambda| \| \bar{u} \|, \forall \lambda \in K, \forall \bar{u} \in E, \text{ unde } K = \mathbb{R} \text{ sau } K = \mathbb{C};$

(3) $\| \bar{u} + \bar{v} \|^2 = \| \bar{u} \|^2 + 2\text{Re}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle) + \| \bar{v} \|^2;$

(4) (Pitagora) $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \| \bar{u} + \bar{v} \|^2 = \| \bar{u} \|^2 + \| \bar{v} \|^2;$

(5) (Cauchy-Buniakowski-Schwarz) $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \| \bar{u} \| \| \bar{v} \|, \forall \bar{u}, \bar{v} \in E.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă vectorii \bar{u}, \bar{v} sunt liniar dependenți (coliniari);

(6) (Minkowski) $\| \bar{u} + \bar{v} \| \leq \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|, \forall \bar{u}, \bar{v} \in E.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\exists \lambda \geq 0$ astfel încât $\bar{u} = \lambda \bar{v}$ sau $\bar{v} = \lambda \bar{u}$ (vectorii sunt coliniari și de același sens).

Temă: demonstrați (1) și (2).

(3) $\| \bar{u} + \bar{v} \|^2 = \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \overline{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle} + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \| \bar{u} \|^2 + 2\text{Re}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle) + \| \bar{v} \|^2.$

Pentru (4) se aplică (3).

(5) Fie \bar{u}, \bar{v} doi vectori arbitrari. Dacă $\bar{v} = \bar{0}$, atunci $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| = \| \bar{u} \| \| \bar{v} \| = 0$. Presupunem $\bar{v} \neq \bar{0}$. Din lema anterioară rezultă că există $\bar{w} \perp \bar{v}$ a.i. $\bar{u} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{v} \|^2} \bar{v} + \bar{w}$. Folosind teorema lui Pitagora rezultă $\| \bar{u} \|^2 = \left\| \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{v} \|^2} \bar{v} \right\|^2 + \| \bar{w} \|^2 = \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{\| \bar{v} \|^2} + \| \bar{w} \|^2 \geq \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{\| \bar{v} \|^2}$.

Deci $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \| \bar{u} \| \| \bar{v} \|$.

Observă că avem egalitate dacă și numai dacă $\frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{\| \bar{v} \|^2} + \| \bar{w} \|^2 = \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|^2}{\| \bar{v} \|^2} \Leftrightarrow \bar{w} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{u} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{v} \|^2} \bar{v}$, deci \bar{u} depinde liniar de \bar{v} .

Observăm că această demonstrație este valabilă atât pentru cazul complex, cât și pentru cel real și este foarte simplă.

Dăm totuși și o demonstrație valabilă doar pentru cazul $K = \mathbb{R}$, deoarece tehnica folosită este utilă deseori în aplicații.

Presupunem că $\bar{v} \neq \bar{0}$ și vom demonstra inegalitatea

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \| \bar{u} \| \| \bar{v} \|, \forall \bar{u}, \bar{v} \in E. \quad (1)$$

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrar. Din pozitivă definiție a produsului scalar rezultă că

$$\begin{aligned} \langle \bar{u} + \lambda \bar{v}, \bar{u} + \lambda \bar{v} \rangle &\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \lambda^2 \| \bar{v} \|^2 + 2\lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \| \bar{u} \|^2 &\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

trinomul de gradul II în λ , $\lambda^2 \| \bar{v} \|^2 + 2\lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \| \bar{u} \|^2$, are același semn cu $\| \bar{v} \|^2$ sau este nul, pentru orice λ real \Leftrightarrow discriminantul acestui trinom este negativ sau nul \Leftrightarrow

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 - \| \bar{u} \|^2 \| \bar{v} \|^2 \leq 0,$$

relație echivalentă, prin extragerea rădăcinii pătrate, cu (1).

Presupunem acum că \bar{u}, \bar{v} sunt liniar dependenți, deci $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{v} = \alpha \bar{u}$. Atunci $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| = |\langle \bar{u}, \alpha \bar{u} \rangle| = |\alpha| \| \bar{u} \|^2$ și $\| \bar{u} \| \| \bar{v} \| = \| \bar{u} \| \| \alpha \bar{u} \| = |\alpha| \| \bar{u} \|^2$, deci avem egalitate în (1).

Reciproc, presupunem că $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| = \| \bar{u} \| \| \bar{v} \|$. Atunci discriminantul ecuației de gradul II în λ ,

$$\lambda^2 \| \bar{v} \|^2 + 2\lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \| \bar{u} \|^2 = 0, \quad (2)$$

este nul, deci ecuația (2) are două soluții reale egale $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda_0$. Dar faptul că λ_0 e soluție a ecuației (2) e echivalent cu $\langle \bar{u} + \lambda_0 \bar{v}, \bar{u} + \lambda_0 \bar{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \| \bar{u} + \lambda_0 \bar{v} \|^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{u} + \lambda_0 \bar{v} = \bar{0}$, deci \bar{u}, \bar{v} sunt liniar dependenți.

(6) Analog, dacă $\bar{u} = \bar{0}$ sau $\bar{v} = \bar{0}$ avem $\| \bar{u} + \bar{v} \| = \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|$ și cei doi vectori sunt coliniari de același sens. Presupunem în continuare că $\bar{u} \neq \bar{0}$ și $\bar{v} \neq \bar{0}$ și vom demonstra inegalitatea

$$\| \bar{u} + \bar{v} \| \leq \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|. \quad (3)$$

$$\| \bar{u} + \bar{v} \|^2 = \| \bar{u} \|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle) + \| \bar{v} \|^2 \leq \| \bar{u} \|^2 + 2| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle | + \| \bar{v} \|^2 \stackrel{\text{CBS}}{\leq} \| \bar{u} \|^2 + 2\| \bar{u} \| \| \bar{v} \| + \| \bar{v} \|^2 = (\| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|)^2.$$

Prin extragerea rădăcinii pătrate obținem (3).

Avem $\| \bar{u} + \bar{v} \| = \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|$ dacă și numai dacă în șirul de două inegalități de mai sus avem egalitate între primul membru $\| \bar{u} + \bar{v} \|^2$ și ultimul membru $(\| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|^2)$, ceea ce este echivalent cu faptul că în ambele inegalități de mai sus avem egalitate \Leftrightarrow

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle) & = | \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle | \Leftrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R} \text{ și } \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \geq 0 \\ \bar{u} & = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{v} \|^2} \bar{v} \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 \text{ a.i. } \bar{u} = \alpha \bar{v}.$$

Definiția 13 Un spațiu liniar V înzestrat cu o aplicație $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ce verifică proprietățile

- (1) $\| \bar{u} \| \geq 0, \forall \bar{u} \in V, \| \bar{u} \| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$;
- (2) $\| \lambda \bar{u} \| = | \lambda | \| \bar{u} \|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{u} \in V$;
- (3) $\| \bar{u} + \bar{v} \| \leq \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ se numește spațiu liniar normat.

Deci orice spațiu liniar euclidian este un spațiu liniar normat.

Verificați dacă reciproca este adevărată!

Definiția 14 Se numește **distanță** sau **metrică** pe mulțimea nevidă M o funcție

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

care satisface condițiile:

- (i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.

Definiția 15 O mulțime M înzestrată cu o distanță (metrică) d se numește **spațiu metric**.

Demonstrați următorul rezultat.

Teorema 16 Orice spațiu vectorial normat este spațiu metric cu distanța euclidiană definită de $d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{u} - \bar{v} \|$.

Există spații metrice care nu sunt spații normate?

În continuare vom studia doar spațiile liniare euclidiene.

Remarca 17 Într-un spațiu vectorial euclidian, inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski se poate rescrie sub forma

$$| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle | \leq \| \bar{u} \| \cdot \| \bar{v} \| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{u} \| \cdot \| \bar{v} \|} \leq 1, \bar{u} \neq 0, \bar{v} \neq 0.$$

Definiția 18 Fie V un spațiu vectorial euclidian și $\bar{u}, \bar{v} \in V \setminus \{0\}$. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit prin

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\| \bar{u} \| \cdot \| \bar{v} \|}$$

se numește **unghiul** dintre vectorii \bar{u} și \bar{v} .

Definiția 19 Un vector se numește **versor** (sau **vector unitar**) dacă norma sa este 1.

Remarca 20 Orice vector $\bar{v} \in V \setminus \{0\}$ are un versor colp cu el, notat \bar{v}^0 și dat de:

$$\bar{v}^0 = \frac{1}{\|\bar{v}\|} \bar{v}.$$

Definiția 21 Fie (E, \langle, \rangle) un spațiu vectorial euclidian. Doi vectori $\bar{u}, \bar{v} \in E$ se numesc **ortogonali** dacă produsul lor scalar este nul, i.e. $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$.

O mulțime de vectori $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\}$ se numește sistem ortogonal de vectori dacă oricare doi vectori diferiți sunt ortogonali, $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0 \forall i \neq j$.

Spunem că un vector \bar{x} este ortogonal pe o mulțime de vectori M dacă \bar{x} e ortogonal pe orice vector din M .

Notăm cu M^\perp mulțimea tuturor vectorilor din spațiul liniar E care sunt ortogonali pe toți vectorii lui M . O numim ortogonalul lui M .

$$M^\perp := \{\bar{v} \in E \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0, \forall \bar{u} \in M\}$$

Fie A, B două mulțimi nevide de vectori din E . Spunem că A este ortogonală pe B (și notăm $A \perp B$) dacă $\forall \bar{x} \in A \Rightarrow \bar{x} \perp B \Leftrightarrow \forall \bar{x} \in A \Rightarrow \bar{x} \in B^\perp \Leftrightarrow A \subset B^\perp$.

Remarca 22 Se poate demonstra, pentru cazul $\dim E$ finită, că $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ și că $(A^\perp)^\perp = A$.

Deci $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp \Leftrightarrow B \perp A$, deci relația de perpendicularitate pr mulțimea părților lui E este simetrică.

Propoziția 23 Fie (E, \langle, \rangle) un spațiu vectorial euclidian și o mulțime nevidă de vectori $U \subset E$. Atunci U^\perp este subspațiu liniar al lui E .

Într-adevăr, fie $\bar{x}, \bar{y} \in U^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrari. Fie $\bar{z} \in U$ oarecare. Atunci $\langle \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z} \rangle = \alpha\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \beta\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, deci $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \perp \bar{z}$, $\forall \bar{z} \in U$.

Teorema 24 Fie (E, \langle, \rangle) un spațiu vectorial euclidian. Dacă $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset V \setminus \{0\}$ este un sistem ortogonal de vectori, adică

$$\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

atunci acesta este liniar independent.

Demonstrație

Considerăm combinația liniară

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0} &\Rightarrow \langle \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n, \bar{v}_1 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \bar{v}_n, \bar{v}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 \|\bar{v}_1\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

Înmulțind scalar pe rând relația $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$ cu ceilalți vectori $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ obținem mod analog $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definiția 25 Fie (E, \langle, \rangle) un spațiu vectorial euclidian n -dimensional și o bază $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

1. Baza B se numește **ortogonală** dacă $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ sunt ortogonali doi câte doi,

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

2. Baza B se numește **ortonormată** dacă este ortogonală și toți vectorii din B au norma 1,

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Teorema 26 (Procedeeul de ortogonalizare Gram-Schmidt) Fie (E, \langle, \rangle) un spațiu vectorial euclidian n -dimensional și $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p\}$ un sistem de vectori liniar independent. Atunci există un sistem ortogonal de vectori $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p\}$ a.i. $[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i] = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i]$, $\forall i \in \overline{1, p}$.

Demonstrație

Pasul 1. Definim $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$.

Pasul 2. Fie $\bar{v}_2 = \bar{u}_2 + \alpha_{21}\bar{v}_1$. Determinăm scalarul α_{21} punând condiția ca \bar{v}_2 să fie ortogonal pe \bar{v}_1 ,

$$0 = \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle \bar{u}_2 + \alpha_{21}\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle + \alpha_{21}\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle,$$

de unde rezultă

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}.$$

Pasul 3. Fie $\bar{v}_3 = \bar{u}_3 + \alpha_{31}\bar{v}_1 + \alpha_{32}\bar{v}_2$, unde scalarii α_{31} , α_{32} se determină punând condiția ca \bar{v}_3 să fie ortogonal pe \bar{v}_1 și \bar{v}_2 ,

$$0 = \langle \bar{v}_3, \bar{v}_1 \rangle = \langle \bar{u}_3 + \alpha_{31}\bar{v}_1 + \alpha_{32}\bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle + \alpha_{31}\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle + \alpha_{32}\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle,$$

de unde, observând că $\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = 0$, rezultă $\alpha_{31} = -\frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}$.

Apoi

$$0 = \langle \bar{v}_3, \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{u}_3 + \alpha_{31}\bar{v}_1 + \alpha_{32}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle + \alpha_{31}\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle + \alpha_{32}\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle,$$

de unde, folosind că $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle = 0$, rezultă $\alpha_{32} = -\frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle}$.

După p pași se obține sistemul ortogonal $B' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$, unde

$$\bar{v}_k = \bar{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \bar{u}_k, \bar{v}_i \rangle}{\|\bar{v}_i\|^2} \bar{v}_i.$$

Dacă dorim să obținem un sistem de vectori *ortonormat*, după determinarea fiecărui vector \bar{v}_i îl și normăm, $\bar{w}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|}$, vom avea

$$\bar{w}_k = \bar{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \bar{u}_k, \bar{w}_i \rangle \bar{w}_i.$$

O consecință imediată a procedurii de ortogonalizare Gram-Schmidt este existența bazelor ortonormate în orice spațiu liniar euclidian.

Într-adevăr, pornind de la o bază oarecare B , se determină prin acest procedeu un sistem ortogonal de vectori $B' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ cu n vectori. Rezultă că el e liniar independent. În plus, $[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n] = [B] = E$, deci B' este sistem de generatori pentru E , deci formează o bază ortogonală. Considerând versorii corespunzători vectorilor din B' se obține baza ortonormată $B'' = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$, unde $\bar{f}_i = \frac{1}{\|\bar{e}_i\|} \cdot \bar{e}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Avantajele folosirii bazelor ortonormate sunt evidente. Dacă $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ este o bază ortonormată și $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y^i \bar{e}_i$, atunci

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i, \sum_{j=1}^n y^j \bar{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j \delta_{ij} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n,$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Propoziția 27 Fie $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ o bază ortonormată și $B' = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ o altă bază arbitrară a lui E . Atunci matricea de trecere de la B la B' este ortogonală dacă și numai dacă B' este ortonormată.

Intr-adevar, fie $S = (s_{ij})_{i,j \in \overline{1, n}}$ matricea de trecere de la baza $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ la baza $B' = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$. Atunci

$$\langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n s_{ki} \bar{e}_k, \sum_{l=1}^n s_{lj} \bar{e}_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^n s_{ki} s_{lj} \underbrace{\langle \bar{e}_k, \bar{e}_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kl}.$$

Deci $\delta_{ij} = \langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \rangle \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kl} = \delta_{ij} \Leftrightarrow S^t S = I_n$.

Teorema 28 (Teorema de descompunere ortogonală) Fie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian n -dimensional și W un subspațiu liniar al lui E . Atunci există un unic subspațiu liniar W' al lui E a.i.

$$E = W \oplus W' \text{ și } W \perp W'. \quad (4)$$

Demonstrăm mai întâi că $E = W \oplus W^\perp$. Presupunem că $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p\}$ este o bază ortonormată a lui W .

Începem cu $E \subset W + W^\perp$. Fie $\bar{x} \in E$ oarecare. Observăm că $\bar{y} = \sum_{i=1}^p \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i \in W$. Demonstrăm că $\bar{x} - \bar{y} \in W^\perp$. E suficient să arătăm că $\bar{x} - \bar{y}$ e ortogonal pe fiecare vector al bazei lui W . Avem $\langle \bar{x} - \sum_{i=1}^p \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle \bar{x}, \bar{e}_j \rangle - \sum_{i=1}^p \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$. Astfel am obținut că $\bar{x} = (\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y} \in W^\perp, \bar{y} \in W$, deci $E \subset W + W^\perp$. Evident $W + W^\perp \subset E$, deci $E = W + W^\perp$.

Demonstrăm acum că suma anterioară este directă. Fie $\bar{x} \in W \cap W^\perp \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$, deci $\bar{x} = 0$.

Să arătăm că subspațiul liniar cu proprietatea din concluzia teoremei este unic. Fie W' subspațiu liniar cu proprietatea că $E = W \oplus W'$ și $W \perp W'$. Deoarece $W' \perp W$ rezultă că $W' \subset W^\perp$.

Fie $\bar{u} \in W^\perp$ oarecare. Deoarece $\bar{u} \in E = W \oplus W' \Rightarrow \exists \bar{u}_1 \in W, \exists \bar{u}_2 \in W' \subset W^\perp$ a.i. $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Evident $\bar{u} = 0 + \bar{u} \in W \oplus W^\perp$. Dar suma $W \oplus W^\perp$ este directă, deci scrierea lui \bar{u} ca suma dintre un vector din W cu un vector din W^\perp este unică, deci $\bar{u}_1 = \bar{0}, \bar{u}_2 = \bar{u} \Rightarrow \bar{u} \in W'$. Deci $W^\perp \subset W'$.

Definiția 29 Subspațiul liniar unic determinat de condițiile (4) se numește *suplementul (sau complementul) ortogonal al lui W* și se notează evident W^\perp .

Putem defini acum proiecția ortogonală a unui spațiu euclidian pe un subspațiu al său și simetria ortogonală a unui spațiu euclidian față de un subspațiu al său.

Definiția 30 Fie W subspațiu liniar al lui E . Folosind $E = W \oplus W^\perp$, rezultă că orice vector \bar{x} din E se scrie în mod unic ca $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \in W, \bar{x}_2 \in W^\perp$. \bar{x}_1 se notează $Pr_W(\bar{x})$ și se numește *proiecția ortogonală a lui \bar{x} pe W* . Analog $\bar{x}_2 = Pr_{W^\perp}(\bar{x})$ este *proiecția ortogonală a lui \bar{x} pe W^\perp* . Aplicațiile

$$Pr_W : E \rightarrow W, \bar{x} \rightarrow Pr_W(\bar{x}), \quad Pr_{W^\perp} : E \rightarrow W^\perp, \bar{x} \rightarrow Pr_{W^\perp}(\bar{x})$$

se numesc respectiv *proiecția ortogonală a lui E pe W* , *proiecția ortogonală a lui E pe W^\perp* .

Simetria ortogonală a lui E față de W este

$$S_W : E \rightarrow E, S_W = 2Pr_W - Id_E, S_W(\bar{x}) = Pr_W(\bar{x}) - Pr_{W^\perp}(\bar{x}).$$

Analog se poate defini simetria ortogonală a lui E față de W^\perp .

Determinăm o formulă de calcul pentru $Pr_W(\bar{x})$.

Fie $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p, \bar{e}_{p+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ o bază ortonormată a lui E a.i. $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p\}$ e bază a lui W iar $\{\bar{e}_{p+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ e bază a lui W^\perp . Atunci orice $\bar{x} \in E$ se scrie

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p \alpha^i \bar{e}_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha^i \bar{e}_i, \quad Pr_W(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha^i \bar{e}_i, \quad Pr_{W^\perp}(\bar{x}) = \sum_{i=p+1}^n \alpha^i \bar{e}_i.$$

Pentru a determina scalarii α^i înmulțim scalar pe rând relația $\bar{x} = \sum_{i=1}^p \alpha^i \bar{e}_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha^i \bar{e}_i$ cu $\bar{e}_k, k \in \overline{1, n}$. Deducem

$$\alpha^k = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_k \rangle}{\|\bar{e}_k\|^2} = \langle \bar{x}, \bar{e}_k \rangle, \forall k \in \overline{1, n},$$

deci

$$Pr_W(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i, \quad Pr_{W^\perp}(\bar{x}) = \sum_{i=p+1}^n \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i.$$

În particular, dacă \bar{a} e un vector nenul, proiecția ortogonală a lui E pe subspațiul liniar generat de \bar{a} se notează simplu $Pr_{\bar{a}}$. Evident avem

$$Pr_{\bar{a}}(\bar{x}) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a} = \frac{\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|} \left(\frac{1}{\|\bar{a}\|} \bar{a} \right) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|} \bar{a}^0.$$

Aplicația

$$pr_a : E \rightarrow \mathbb{R}, pr_a(\bar{x}) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle}{\| \bar{a} \|}$$

se numește proiecția scalară a lui E pe \bar{a} . Dacă θ este unghiul dintre \bar{x} și \bar{a} , atunci evident $pr_{\bar{a}}(\bar{x}) = \| \bar{x} \| \cos \theta$.

Toate aplicațiile definite anterior, proiecția ortogonală pe W , simetria ortogonală față de W , proiecția scalară pe \bar{a} sunt aplicații liniare.

Definiția 31 Fie $\bar{x} \in E$ un vector nenul, $W \subset E$ un subspațiu liniar al lui E . Numim unghiul dintre \bar{x} și W numărul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dat de

$$\cos \varphi = \frac{\| Pr_W(\bar{x}) \|}{\| \bar{x} \|}.$$

Se poate demonstra că unghiul dintre \bar{x} și W este minimul mulțimii tuturor unghiurilor dintre \bar{x} și vectorii lui W .