

CURS 2 - PARALELISM INTR-UN SPATIU AFIN TREI DIMENSIONAL

1. PREDAREA CAPITOLULUI DE PARALELISM IN CLASA A VIIIA

Am vazut ca notiunile de drepte paralele, dreapta paralela cu un plan, plane paralele au aparut in mod firesc, odata cu deducerea pozitiilor relative a obiectelor geometrice. In aceasta sectiune vom reaminti principalele proprietati legate de paralelismul in spatiu, insistand asupra demonstratiilor teoremelor de paralelism.

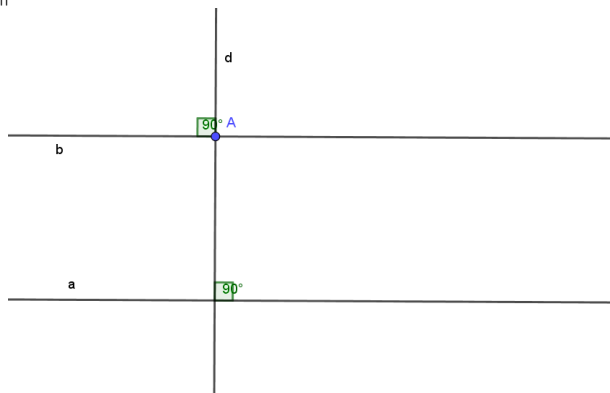
Definition 1. a) Doua drepte sunt paralele daca sunt coplanare si nu au puncte comune. b) O dreapta este paralela cu un plan daca nu au puncte comune. c) Doua plane sunt paralele daca nu au puncte comune.

In prima parte ne vom ocupa de proprietatile legate de **drepte paralele**.

In primul rand observam ca pentru a fi paralele, doua drepte trebuie sa fie mai intai coplanare. Sa revedem cum demonstram in clasa a VIIa ca exista drepte paralele? Foloseam notiunea de drepte perpendiculare si de existenta si unicitatea perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreapta. (vom reveni in cursul urmator asupra acestui rezultat).

Proposition 2. Fie dreapta a si punctul exterior ei A . Atunci exista dreapta b cu $A \in b$ si $b \parallel a$.

Proof. In planul (a, A) exista perpendiculara din A pe a , fie ea dreapta d . In acelasi plan, exista perpendiculara in A pe d , o notam cu b . Daca presupunem prin reducere la absurd ca dreptele a si b au un punct comun P , atunci in planul (a, A) s-ar putea duce doua perpendiculare din P pe d , contradictie cu unicitatea perpendicularei coborate dintr-un punct pe o dreapta. (Vom demonstra acest rezultat in cursul viitor) Deci $a, b \subset (a, A)$ si $a \cap b = \emptyset$, deci $a \parallel b$.



□

Remark 3. Unicitatea paralelei prin A la a este atestata de axioma paralelelor: *printr-un punct exterior unei drepte se poate duce cel mult o paralela la acea dreapta*.

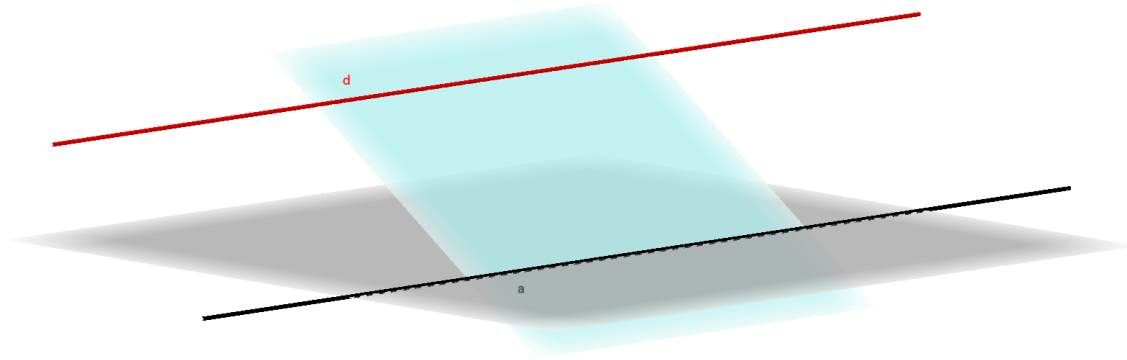
In clasa a VIa s-au studiat conditii necesare si suficiente ca doua drepte dintr-un plan dat sa fie paralele (aceste conditii erau exprimate cu ajutorul unghiurilor formate de cele doua drepte cu o secanta).

O alta proprietate importanta este tranzitivitatea relatiei de paralelism pe multimea dreptelor. Pentru a o demonstra, avem nevoie insa de anumite proprietati legate de **paralelismul dintre drepte si plane**. Evident relatia de paralelism pe multimea dreptelor este simetrica, dar nu este reflexiva. Daca ne dorim o relatie de echivalenta, definim paralelismul in sens larg a doua drepte. Doua drepte sunt paralele in sens larg daca ele coincid sau sunt paralele.

Urmatoarea teorema ne ofera un criteriu de paralelism pentru drepte si plane si, in acelasi timp, o metoda de a demonstra existenta dreptelor paralele cu plane.

Theorem 4. Daca dreapta d este paralela cu dreapta a si a este inclusa in planul α , atunci $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$.

Proof. Presupunem prin reducere la absurd ca $d \nparallel \alpha$ si $d \not\subset \alpha$. Atunci $d \cap \alpha = \{P\}$. Observam ca intersectia dintre planul (a, d) si α este dreapta a . Deoarece $P \in d \Rightarrow P \in (a, d)$. Cum $P \in \alpha$ rezulta ca $P \in (a, d) \cap \alpha \Leftrightarrow P \in a$. Dar $P \in d \Rightarrow P \in a \cap d$, contradictie cu ipoteza $d \nparallel a$. Deci $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$.



□

Remark 5. a) Aplicam acest criteriu de paralelism de cele mai multe ori cand vrem sa demonstram ca o dreapta este paralela cu un plan. Cealalta metoda este reducerea la absurd.

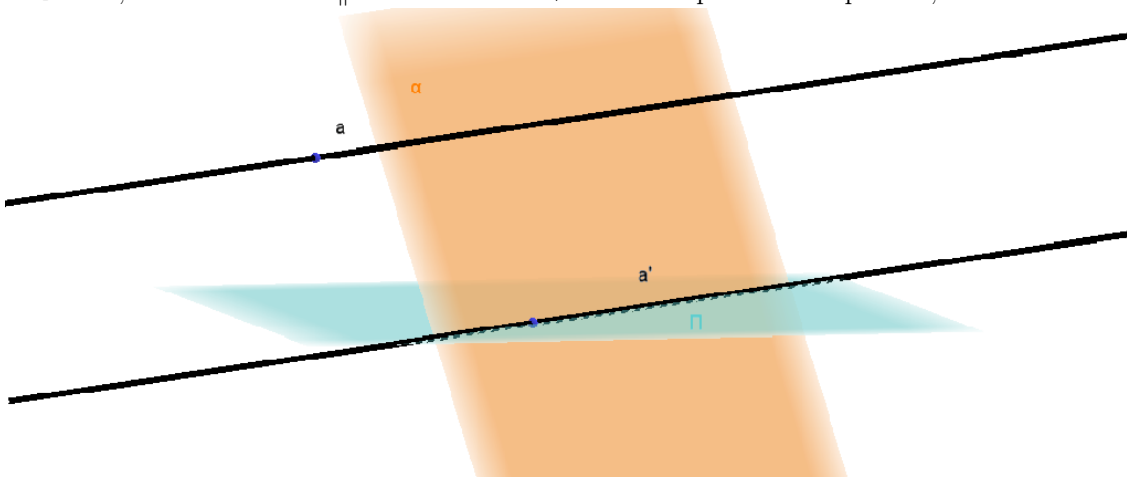
b) Daca dreapta d este paralela cu α nu rezulta ca d este paralela cu orice dreapta din α , deoarece, pentru a fi paralele, dreptele trebuie sa fie si coplanare. Deci reciproca teoremei anterioare nu este adevarata.

c) Cum ma pot folosi de aceasta teorema pentru a demonstra existenta dreptelor paralele cu plane? Dat planul α , aleg dreapta $a \subset \alpha$ si punctul $A \notin \alpha$. Fie a' paralela prin A la a (am explicat anterior existenta si unicitatea ei). Atunci teorema anterioara ne spune ca $a' \parallel \alpha$. Situatia $a' \subset \alpha$ este exclusa din $\exists A \in a' \setminus \alpha$.

Urmatoarele doua teoreme ne arata ca daca o dreapta este paralela cu un plan, atunci in acel plan exista o infinitate de drepte paralele cu dreapta data. Ele ne indica si cum putem construi aceste drepte.

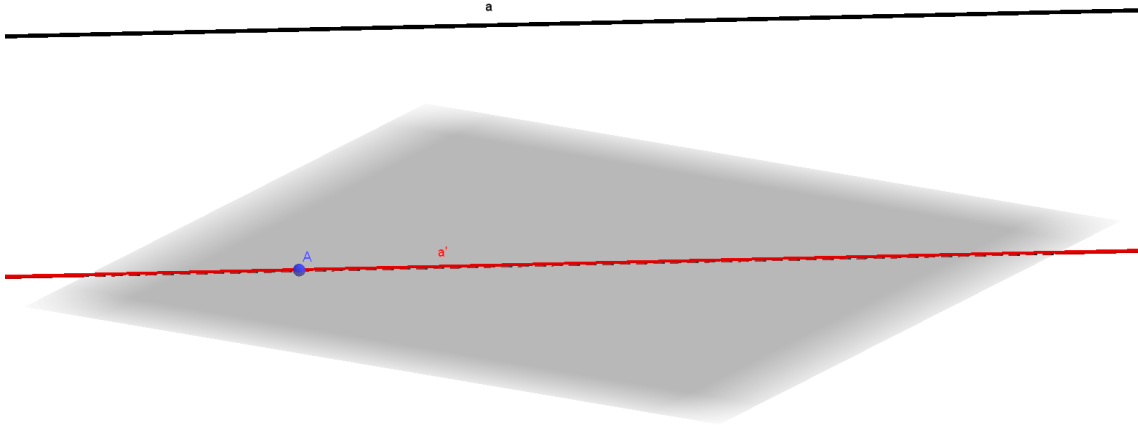
Theorem 6. Fie a o dreapta paralela cu planul π si fie α un plan arbitrar ce contine dreapta a si intersecteaza planul π dupa dreapta a' . Atunci $a \parallel a'$.

Proof. Dreptele a, a' sunt incluse in α , deci sunt coplanare. Presupunem prin reducere la absurd ca $a \cap a' = \{P\} \Rightarrow P \in a \cap \pi$, contradictie cu $a \parallel \pi$. Deci $a \cap a' = \emptyset$ si cum dreptele sunt coplanare, rezulta ca ele sunt paralele.



□

Theorem 7. Fie a o dreapta paralela cu planul π si punctul $A \in \pi$. Fie a' paralela la a prin A . Atunci $a' \subset \pi$.



Proof.

Fie $(a, A) := \alpha$. Deoarece α si π au in comun punctul A , rezulta ca $\alpha \cap \pi = a''$, cu $A \in a''$. Deoarece $a \subset \alpha$, $a \parallel \pi$ si $\alpha \cap \pi = a''$, din teorema anterioara rezulta ca $a'' \parallel a$. Dar si a' trece prin A si e paralela cu a . Din axioma paralelelor rezulta ca $a' = a''$, deci $a' \subset \pi$.

□

Remark 8. Deci, data dreapta a paralela cu planul π , cum putem obtine drepte in π , paralele cu a ? Prima metoda e de a considera fascicolul de plane ce contine dreapta a . Planele fascicolului, care taie planul π , o vor face dupa drepte paralele cu a . A doua metoda consta in alegerea unui punct arbitrar in π si construirea prin acel punct a paralelei la dreapta a . Am vazut ca atunci aceasta paralela e inclusa in π . Prin ambele metode obtinem o infinitate de drepte cu proprietatea ceruta.

In acest moment dispunem de toate uneltele pentru a demonstra:

Theorem 9. *Relatia de paralelism pe multimea dreptelor este tranzitiva: daca $a \parallel a'$ si $a' \parallel a''$, $a' \neq a''$, atunci $a \parallel a''$.*

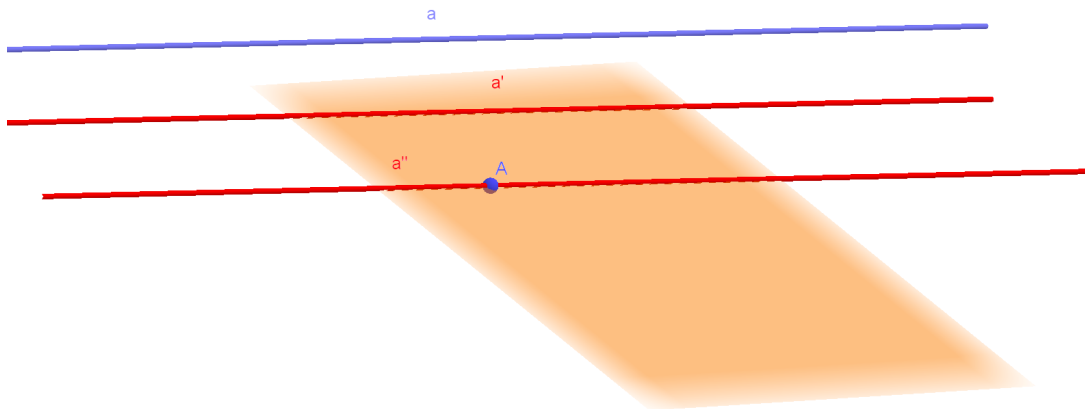
Proof. Faptul ca a' si a'' sunt disjuncte se demonstreaza rapid prin reducere la absurd. Daca exista $P \in a' \cap a''$, atunci prin P trec doua paralele la a , contradictie cu axioma paralelelor.

Sa demonstram ca a', a'' sunt coplanare. Fie $A \in a'' \Rightarrow A \notin a'$, deci exista planul $\alpha = (a', A)$. Vom demonstra ca $a'' \subset \alpha$.

Presupunem ca $a \not\subset \alpha$. Din $a \parallel a'$, $a' \subset \alpha$, rezulta ca $a \parallel \alpha$. Aplicam teorema anterioara pentru $A \in \alpha$ si $a'' \parallel a$, $A \in a''$. Rezulta $a'' \subset \alpha$. Dar $a' \subset \alpha$, deci a', a'' sunt coplanare.

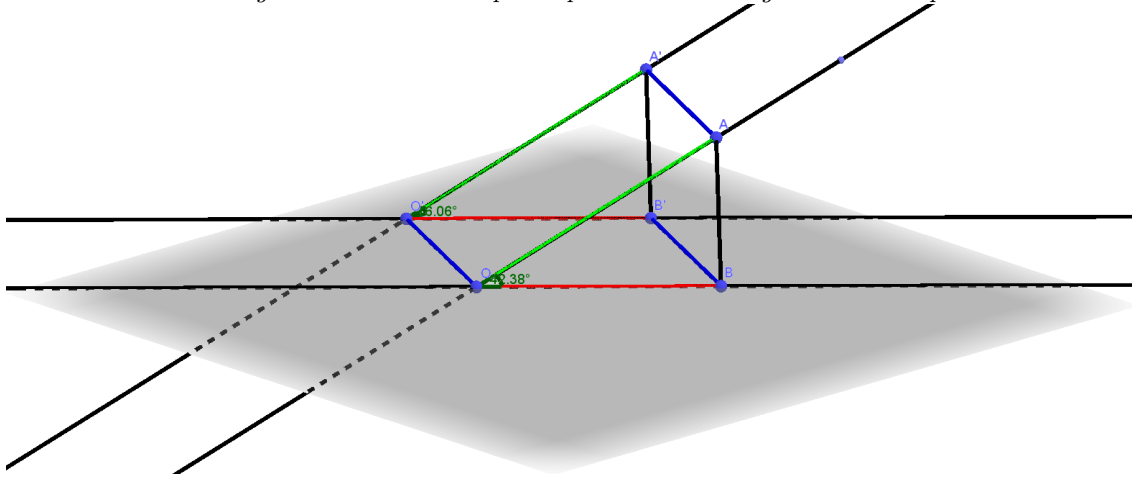
Presupunem ca $a \subset \alpha$. Din $a \parallel a'$, rezulta ca exista un singur plan ce contine ambele drepte a, a' . Cum α le contine pe amandoua, deducem ca $\alpha = (a, a') = (a', A)$, deci putem gandi α si ca planul determinat de a si A . (evident $A \notin a$, demonstrati prin RA). Fie $\beta = (a, a'')$ planul unic determinat de dreptele paralele a si a'' . Din $A \in a''$ si $a'' \subset \beta$ rezulta ca $A \in \beta$. Cum si $a \subset \beta$, rezulta ca $\beta = (a, A)$, deci $\alpha = \beta$. Automat deducem ca $a'', a' \subset \alpha$, deci dreptele sunt coplanare si in acest caz.

Am demonstrat ca a' si a'' sunt disjuncte, rezulta ca ele sunt paralele.



□

Theorem 10. Doua unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.



Proof. Fie $\widehat{X'OY'}$ si $\widehat{X'OY}$ doua unghiuri proprii, cu $OX \parallel O'X'$ si $OY \parallel O'Y'$. Sa presupunem ca cele doua unghiuri nu sunt situate in acelasi plan. Evident OX si $O'X'$, respectiv OY , $O'Y'$ sunt coplanare. Consideram cazul in care X' apartine semiplanului marginit de OO' , ce contine pe X si Y' apartine semiplanului marginit de OO' ce contine pe Y . Fie $A \in (OX)$ si $A' \in (O'X')$ a.i. $OA = OA'$ si $B \in (OY)$, $B' \in (O'Y')$ a.i. $OB = OB'$. Obtinem patrulaterele convexe $OAA'O'$ si $OBB'O'$ cu cate doua laturi opuse paralele si congruente. Rezulta ca ele sunt paralelograme, deci $OO' \parallel AA'$, $OO' = AA'$, $OO' \parallel BB'$, $OO' = BB'$. Din tranzitivitatea relatiei de paralelism pe multimea dreptelor si a relatiei de egalitate pe multimea numerelor reale, deducem ca $AA' \parallel BB'$ si $AA' = BB'$, deci $AA'BB'$ este paralelogram. Rezulta ca $AB = A'B'$. Din cazul de congruenta (LLL) avem ca $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$, deci $\widehat{X'OY} \equiv \widehat{X'O'Y'}$. Demonstratia se continua cu cazul in care X' apartine semiplanului marginit de OO' , ce contine pe X si Y' apartine semiplanului marginit de OO' ce nu contine pe Y . Considerand Y'' simetricul lui Y' fata de O' reducem problema la cazul precedent. Obtinem $\widehat{X'OY} \equiv \widehat{X'O'Y''}$. Deoarece $\widehat{X'O'Y'}$ si $\widehat{X'O'Y''}$ sunt suplementare, obtinem ca $\widehat{X'OY}$ si $\widehat{X'O'Y'}$ sunt suplementare.

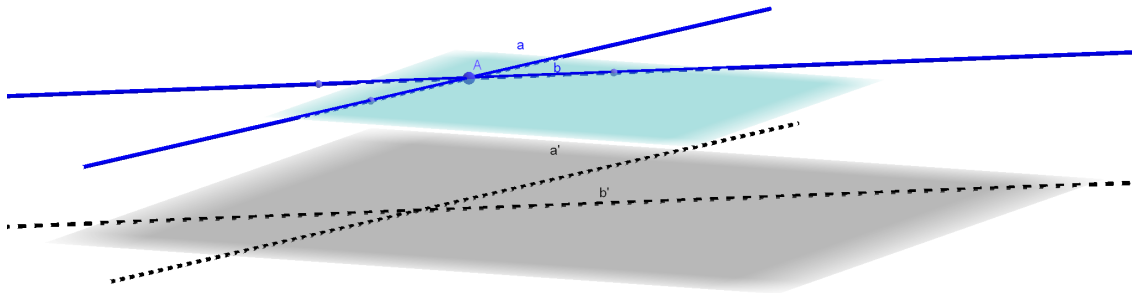
Toate celelalte cazuri sunt analoage unuia dintre aceste doua cazuri.

Ne ocupam in continuare de **paralelismul planelor**.

Prima teorema certifica existenta planelor paralele si ne da o metoda de a demonstra ca doua plane sunt paralele. $\square$

Theorem 11. Fie planul α , punctul $A \notin \alpha$ si dreptele a, b concurente in A , ambele paralele cu α . Atunci $(a, b) \parallel \alpha$.

Remark 12. Pentru a construi un plan paralel cu α prin A , se aleg doua drepte a', b' in α , concurente. Prin A se duc paralelele la a' , respectiv b' , fie acestea a , respectiv b . Din criteriul de paralelism rezulta ca $a \parallel \alpha$ si $b \parallel \alpha$. Din aceasta teorema rezulta ca planul determinat de a, b este paralel cu α .



Observam ca putem reformula teorema astfel.

- Dat A exterior planului α , exista cel putin un plan ce trece prin A si este paralel cu α .

- Daca a', b' , respectiv a, b sunt doua perechi de drepte concurente, cu $a \parallel a'$ si $b \parallel b'$, atunci $(a, b) \parallel (a', b')$.

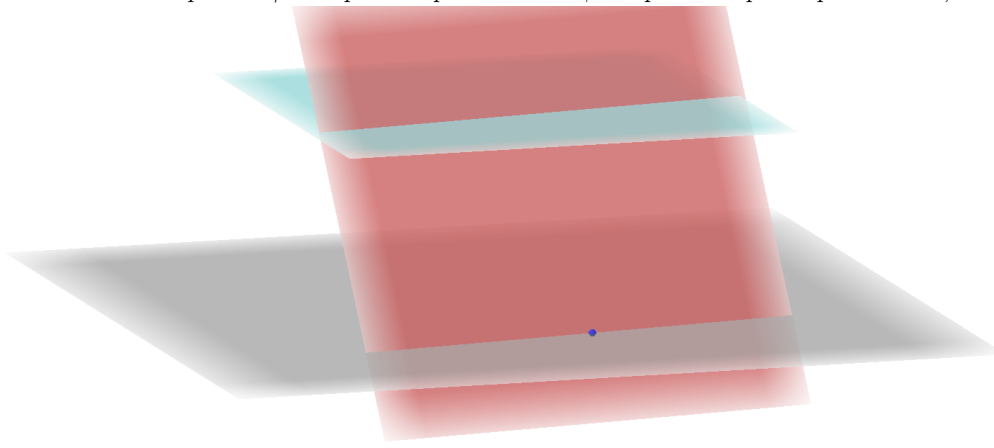
Revenim la demonstrarea teoremei.

Proof. Presupunem prin RA ca $(a, b) \not\parallel \alpha$. Deoarece $(a, b) \neq \alpha \Rightarrow (a, b) \cap \alpha = c$ o dreapta. Deci dreptele a, b, c sunt in planul (a, b) , primele doua concurente in A . Rezulta ca c taie cel putin una dintre dreptele a, b . Altfel ar rezulta ca a si b sunt amandoua paralele cu c , contradictie cu axioma paralelelor. Deci $\exists P \in a \cap c$ de exemplu. Deducem ca $P \in a \cap \alpha$, contradictie cu ipoteza $a \parallel \alpha$.

Urmatoarele doua teoreme se demonstreaza banal prin reducere la absurd. Lasam aceste demonstratii ca tema. $\square$

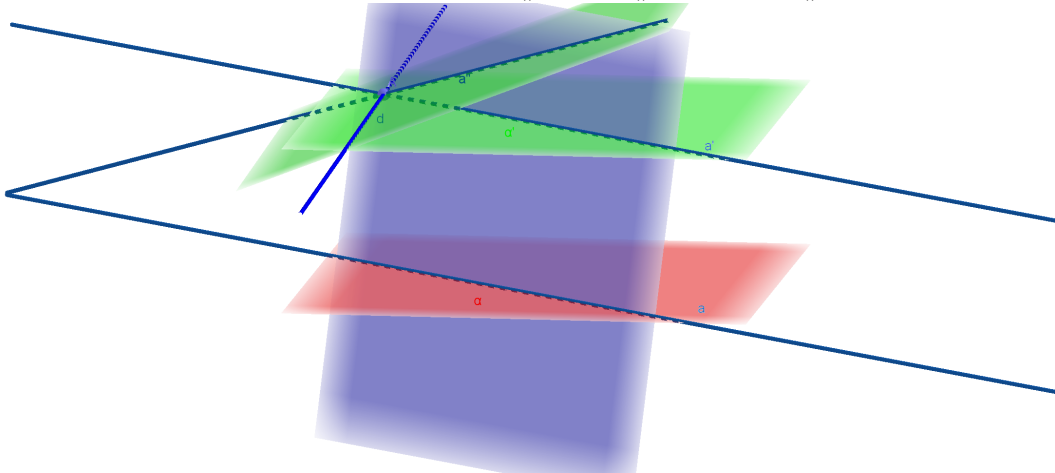
Theorem 13. *Daca planele α si β sunt paralele, atunci orice dreapta inclusa in α este paralela cu β .*

Theorem 14. *Daca planul γ taie planele paralele α si β respectiv dupa dreptele a si b , atunci $a \parallel b$.*



In continuare putem demonstra ca relatia de paralelism pe multimea planelor este tranzitiva.

Theorem 15. *Fie $\alpha, \alpha', \alpha''$ trei plane. Daca $\alpha' \parallel \alpha$ si $\alpha'' \parallel \alpha$, atunci $\alpha' \parallel \alpha''$.*



Proof. Presupunem prin reducere la absurd ca $\alpha' \not\parallel \alpha''$. Deoarece planele sunt distincte, rezulta ca $\alpha' \cap \alpha'' = d$. Fie $A \in d$ si β un plan prin A ce nu contine dreapta d si taie planele $\alpha, \alpha', \alpha''$ respectiv dupa dreptele a, a', a'' . Aplicand teorema precedenta pentru tripletele de plane α', α, β si α', α, β , rezulta ca $a' \parallel a$ si $a'' \parallel a$. Dar relatia de paralelism pe multimea dreptelor este tranzitiva, rezulta ca $a' \parallel a''$, contradictie cu $A \in a' \cap a''$. $\square$

Theorem 16. *Dat un punct exterior unui plan, exista un singur plan ce trece prin punct si e paralel cu planul dat.*

Proof. Existenta planului a fost demonstrata in prima teorema legata de plane paralele, mai exact s-a explicat cum se construiesc un astfel de plan.

Sa demonstram unicitatea. Presupunem prin reducere la absurd ca exista α, β cu $\alpha \parallel \pi$, $\beta \parallel \pi$ si $A \in (\alpha \cap \beta) \setminus \pi$. Din tranzitivitatea relatiei de paralelism pe multimea planelor rezulta ca $\alpha \parallel \beta$, contradictie cu ipoteza ca ambele plane trec prin A . □

Remark 17. Acest plan unic prin A , paralel cu π , coincide cu multimea punctelor tuturor paralelelor prin A la π .

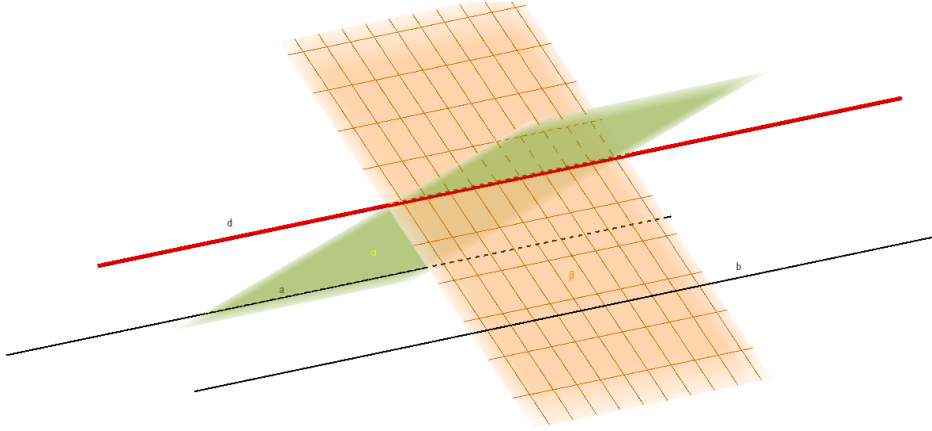
Fie $\mathcal{M} = \{P / AP \parallel \pi\}$. Fie α planul determinat de dreptele a, b , concurente in A , ambele paralele cu π .

Demonstram ca $\mathcal{M} \subset \alpha$. Daca $P \in \mathcal{M} \Rightarrow AP \parallel \pi$. Presupunem RA ca $P \notin \alpha \Rightarrow \beta := (AP, a) \neq \alpha$ e un plan paralel cu π si trece prin A . Contradictie cu unicitatea planului prin A paralel cu π deducem ca $\beta = \alpha$.

Acum demonstram ca $\alpha \subset \mathcal{M}$. Fie $Q \in \alpha$. Rezulta $AQ \subset \alpha$. Din $\alpha \parallel \pi$ deducem ca $AQ \parallel \pi$, deci $Q \in \mathcal{M}$.

Theorem 18. (teorema acoperisului) Fie dreptele paralele a si b si planele α, β , ce contin respectiv dreptele a, b si de intersecteaza dupa dreapta d . Atunci $d \parallel a$ ($\parallel b$).

Proof. $a \parallel b$, $b \subset \beta$, $a \not\subset \beta \Rightarrow a \parallel \beta$. Deoarece $a \subset \alpha$ si $\alpha \cap \beta = d$ rezulta $d \parallel b$.



□

2. SUBSPATII AFINE PARALELE

Am discutat deja in cursul precedent cateva detalii legate de subspatii affine paralele. Revenim acum cu demonstrarea rezultatelor celor mai importante.

Apoi, vom relua o parte din teoremele primei sectiuni si le vom redemonstra folosind teoria paralelismului subspatiilor affine.

Cadrul de lucru este un subspatiu afin $\mathcal{A}$ de dimensiune finita n .

Definition 19. Subspatiile affine Y_1 si Y_2 sunt **paralele** daca $\vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$ sau $\vec{Y}_2 \subseteq \vec{Y}_1$. Notam $Y_1 \parallel Y_2$.

Remark 20. a) Relatia de paralelism nu este tranzitiva. De exemplu, daca dreptele d_1 si d_2 sunt ambele paralele cu planul α , rezulta ca $\vec{d}_1 \subset \vec{\alpha}$ si $\vec{d}_2 \subset \vec{\alpha}$, dar nu putem deduce ca $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$. Relatia de paralelism devine tranzitiva daca o restrictionam la multimea subspatiilor affine de o dimensiune fixata. In acest caz este chiar o relatie de echivalenta.

b) Observam ca doua subspatii affine paralele pot avea puncte comune, mai exact unul dintre ele poate fi inclus in celalalt sau, daca au aceeasi dimensiune, ele pot coincide. Aceasta definitie coincide cu cea de paralelism in sens larg studiata in gimnaziu.

Theorem 21. Daca $Y_1 \parallel Y_2$ atunci $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, sau $Y_1 \subseteq Y_2$, sau $Y_2 \subseteq Y_1$.

Proof. Sa presupunem ca $\vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$. Daca $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, fie $O \in Y_1 \cap Y_2$ si atunci putem scrie $\vec{Y}_1 = \{\vec{OA}_1 \mid A_1 \in Y_1\}$ si $\vec{Y}_2 = \{\vec{OA}_2 \mid A_2 \in Y_2\}$. Vom demonstra ca $Y_1 \subseteq Y_2$. Fie $P \in Y_1$ arbitrar. Atunci $\vec{OP} \in \vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$, deci exista $Q \in Y_2$ astfel incat $\vec{OP} = \vec{OQ}$, de unde rezulta ca $P = Q$. Deci $P \in Y_2$, adica $Y_1 \subseteq Y_2$. $\square$

De asemenea, nu este adevarat ca doua subspatii affine disjuncte sunt paralele. Vedeti exemplul dreptelor necoplanare in $\mathcal{A}^3$. Totusi, acest rezultat este adevarat in urmatorul caz particular:

Theorem 22. *Un subspatiu afin si un hiperplan care nu se intersecteaza sunt paralele.*

Proof. Fie Y un subspatiu afin de dimensiune $k \leq n$ si H un hiperplan. Daca $Y \cap H = \emptyset$, atunci $\dim(Y + H) = \dim Y + \dim H - \dim(\vec{Y} \cap \vec{H}) + 1 = k + n - \dim(\vec{Y} \cap \vec{H})$. De asemenea $\dim(Y + H) > \max\{k, n - 1\}$, deci $\dim(Y + H) = n$. Rezulta ca $\dim(\vec{Y} \cap \vec{H}) = k = \dim \vec{Y}$, de unde $\vec{Y} \cap \vec{H} = \vec{Y}$. Rezulta $\vec{Y} \subseteq \vec{H}$, deci $Y \parallel H$. $\square$

Pentru a nu crea confuzii intre modul de definire a paralelismului in gimnaziu si in anul I, in continuare vom numi subspatii affine paralele doar pe cele cu $\vec{Y}_1 \subseteq \vec{Y}_2$ sau $\vec{Y}_2 \subseteq \vec{Y}_1$ **si disjuncte**. Altfel vom spune ca un subspatiu e inclus in celalalt sau ca ele coincid.

Theorem 23. *Dat un subspatiu afin Y si un punct A exterior lui, atunci exista o infinitate de subspatii affine ce trec prin A si sunt paralele cu Y . Dintre acestea, unul singur are aceeasi dimensiune cu Y .*

Proof. Evident, $W = A + \vec{Y}$ este unicul subspatiu afin ce trece prin A , paralel cu Y si cu $\dim W = \dim Y$. Orice subspatiu de tipul $A + V$, cu V subspatiu liniar al lui $\vec{Y}$ este paralel cu Y si trece prin A .

Sa exemplificam cum demonstram o parte din teoremele anterioare. Restul raman ca exercitii. $\square$

Theorem 24. *Fie $\mathcal{A}^3$ un spatiu afin trei dimensional. Daca dreapta d este paralela cu dreapta a si a este inclusa in planul α , atunci $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$.*

Proof. Din $d \parallel a \Rightarrow \vec{d} = \vec{a}$. Deoarece $a \subset \alpha$ rezulta ca $\vec{a}$ e subspatiu liniar al subspatiului liniar $\vec{\alpha}$. Deci $\vec{d} \subset \vec{\alpha}$. Daca exista $P \in d \cap \alpha \Rightarrow d = P + \vec{d} \subset P + \vec{\alpha} = \alpha$. Daca $d \cap \alpha = \emptyset$ rezulta ca $d \parallel \alpha$. $\square$

Theorem 25. *Fie a o dreapta paralela cu planul π si fie α un plan arbitrar ce contine dreapta a si intersecteaza planul π dupa dreapta a' . Atunci $a \parallel a'$.*

Proof. Din $a \parallel \pi \Rightarrow \vec{a} \subset \vec{\pi}$. Deoarece $a \subset \alpha$ rezulta $\vec{a} \subset \vec{\alpha}$. Din $\alpha \cap \pi = a'$ deducem $\vec{a'} = \vec{\alpha} \cap \vec{\pi} \supseteq \vec{a} \cap \vec{\pi} = \vec{a}$. Deci $\vec{a'} = \vec{a}$, deci $a \parallel a'$. $\square$

Cum stabilim, pornind de la ecuatiile unor subspatii affine, daca acestea sunt paralele?

(1) Probabil cea mai rapida metoda poate fi aplicata cand subspatiile sunt date prin ecuatii parametrice (sau canonice pentru drepte), astfel putand determina rapid cel putin un punct in fiecare subspatiu, respectiv cate o baza in subspatiile liniare directoare.

Fie $d_1 = A_1 + [\vec{a}_1]$, $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ si $d_2 = A_2 + [\vec{a}_2]$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$. Atunci dreptele d_1 si d_2 sunt paralele daca si numai daca $\vec{a}_1$ si $\vec{a}_2$ sunt coliniari (liniar dependenti) si $\vec{A_1A_2}$ si $\vec{a}_1$ sunt necoliniari (liniar independenti). In cazul spatiilor affine euclidiene, acest lucru se poate exprima prin $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$ si $\vec{A_1A_2} \times \vec{a}_1 \neq \vec{0}$.

Exemplu: Fie $d_1 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$ si $d_2 : \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2} \end{cases}$. Atunci $A_1(1, -1, 0) \in d_1$, $\vec{a}_1(2, 1, 1) \in \vec{d}_1$, $A_2(-1, 0, -2)$, $\vec{a}_2(4, 2, 2) \in \vec{d}_2$.

Se observa imediat ca $\bar{a}_2 = 2\bar{a}_1$ (sau se calculeaza $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{0}$), deci dreptele sunt paralele sau coincid. Dar $A_1 \in d_1$ si $A_1 \notin d_2$, deci dreptele sunt paralele. La aceeasi concluzie ajungeam verificand necolinaritatea vectorilor $\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1$.

Fie dreapta $d = A + [\bar{a}]$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ si planul $\pi = B + [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$, $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ liniar independenti.

Dreapta d este paralela cu π daca si numai daca $\bar{a} \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ si $\overrightarrow{AB} \notin [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$.

De exemplu, pentru dreapta d_1 din exemplul anterior si planul π :

$$\begin{cases} x = 4t + 2s + 1, \\ y = 2t + s, \\ z = 3t + 2s - 2, \end{cases} \quad \text{deducem } B(1, 0, -2), \bar{b}_1(4, 2, 3)$$

si $\bar{b}_2(2, 1, 2)$, $A(1, -1, 0)$, $\bar{a}(2, 1, 1)$. Remarcam ca $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ sunt liniar dependenti ($\bar{a} = \bar{b}_1 - \bar{b}_2$) dar $\overrightarrow{AB}, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ sunt liniar independenti. Deci $d \parallel \pi$.

Doua plane sunt paralele daca au aceleasi subspatii liniare directoare (deci ecuatiile $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ si $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ sunt echivalente) dar nu au puncte comune, (deci sistemul format din cele doua ecuatii este incompatibil) $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$.

De exemplu planele $\pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ si $\pi_2 : -4x - 2y + 2z - 1 = 0$ sunt paralele.

(2) Ne amintim ca daca un subspatiu afin e dat ca multimea punctelor ale caror coordonate (in raport cu un reper cartezian fixat) verifica un sistem de ecuatii liniare, scris in forma matriciala $AX = B$, atunci spatiul liniar director al subspatiului afin este multimea vectorilor ale caror coordonate (in raport cu baza reperului fixat) verifica sistemul de ecuatii liniare omogen $AX = O$.

Deci, pentru a verifica daca doua subspatii afine, date prin sisteme de ecuatii ca mai sus, sunt paralele, le asociem sistemele omogene, le rezolvam. Daca acestea au aceleasi solutii, deci sunt sisteme echivalente, respectiv daca solutiile unuia dintre sistemele omogene sunt toate solutii ale celuilalt sistem omogen, rezulta ca cele doua subspatii au aceleasi spatii liniare directoare, respectiv unul dintre subspatiile liniare directoare e subspatiu liniar al celuilalt. Deci cele doua subspatii afine sunt paralele, sau coincid, sau unul e inclus in celalalt. Pentru a stabili in care dintre aceste situatii ne aflam, e suficient sa alegem un punct oarecare al unuia dintre subspatiile afine si sa verificam daca acesta apartine sau nu celuilalt subspatiu afin.

De exemplu, daca in $\mathcal{A}^3$ dreapta δ este data ca intersectie de doua plane, prin sistemul de ecuatii liniare

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1, \\ x - y + 3z = 2, \end{cases} \quad \text{atunci spatiul liniar director al dreptei, } \overrightarrow{\delta}, \text{ e dat de omogenizatul sistemului anterior:}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases} \quad \text{Obtinem } \overrightarrow{\delta} = \left\{ \left(-\frac{2}{3}t, \frac{7}{3}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Fie planul } \pi \text{ cu ecuatia generala } x - y + 3z + 1 = 0,$$

atunci spatiul sau liniar director $\overrightarrow{\pi}$ are ecuatia $x - y + 3z = 0$. Observam ca $\overrightarrow{\delta} \subset \overrightarrow{\pi}$ si $P(-1, 0, 0) \in \pi$ dar $P \notin \delta$. Deci $\delta \parallel \pi$.

(3) In cursul anterior am insistat asupra determinarea pozitiei relative a unor subspatii studiind solutiile sistemului format din toate ecuatiile acelui subspatiu. Va invit sa recititi sectiunea respectiva, insistand asupra cazurilor de paralelism.

Vom da un singur exemplu.

Revenim la dreapta si planul din exemplul anterior. Luam sistemul

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + 3z = 2 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases} \quad \text{format din toate ecuatiile}$$

cele doua subspatii. Se observa ca rangul matricii sistemului este 2, luam de exemplu minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Singurul minor caracteristic este $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Deci sistemul este incompatibil, deducem ca dreapta nu are

puncte comune cu planul. Deoarece planul este un hiperplan, putem aplica teorema 22 si deducem ca dreapta este paralela cu planul.

Atentie, in cazul dreptelor disjuncte nu mai putem deduce ca dreptele sunt paralele, ele pot fi necoplanare.

3. APLICATII

- (1) Aratati ca doua segmente paralele, cuprinse intre plane paralele, sunt congruente.
- (2) Un plan α taie muchiile cubului $ABCD A' B' C' D'$ in punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (D' C')$, $Q \in (A' D')$. Specificati natura patrulaterului $MNPQ$. Determinati apoi sectiunea completa pe care o face α cu toate fetele cubului.
- (3) Prin varfurile paralelogramului $ABCD$ se duc dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 . Un plan α intersecteaza aceste dreptele respectiv in A', B', C', D' . Aratati ca $(AA'D) \parallel (BB'C)$, $(A'AB) \parallel (D'DC)$. Precizati natura patrulaterului $A' B' C' D'$.
- (4) Fie $VABCD$ o piramida cu baza paralelogramul $ABCD$. Daca M, N, P sunt respectiv mijloacele segmentelor (VA) , (VD) , (VC) , aratati ca $(MNP) \parallel (ABC)$.
- (5) Consideram un cub $ABCD A' B' C' D'$ si notam cu O_1, O_2, O_3 respectiv centrele fetelor $ABB' A'$, $BCC' B'$, $ABCD$. Demonstrati ca $(O_1 O_2 O_3) \parallel (D A' C')$.
- (6) Fie paralelogramele $ABB_1 A_1$ si $BCC_1 B_1$ situate in plane diferite, P mijlocul segmentului $[AB]$, O centrul paralelogramului $BCC_1 B_1$ si O_1 mijlocul lui $[A_1 C]$. Demonstrati ca:
 - (a) dreapta AC_1 este paralela cu planul (PCB_1) ;
 - (b) dreapta OO_1 este paralela cu dreapta de intersectie a planelor $(A_1 B_1 C_1)$ si (ABC_1) .
- (7) Fie planele paralele α si β , punctele $A, B \in \alpha$, dreapta CD necoplanara cu dreapta AB si $CD \parallel \alpha$. Dreptele CA, CB, DB, DA taie planul β respectiv in punctele M, N, P, Q . Demonstrati ca $MNPQ$ este paralelogram.
- (8) Fie punctele A, B, C, D necoplanare. Punctul D se proiecteaza pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ in E si pe bisectoarea unghiului $\widehat{CAD}$ in F . Demonstrati ca dreapta EF este paralela cu planul (ABC) .
- (9) Fie $ABCD$ un paralelogram si punctul M exterior planului (ABC) . Demonstrati ca:
 - (a) dreapta BC este paralela cu dreapta de intersectie a planelor (MAD) si (MBC) ;
 - (b) planul determinat de dreptele de intersectie a planelor (MAD) cu (MBC) , respectiv (MAB) cu (MDC) este paralel cu planul (ABC) .
- (10) (T. Thales) Trei plane paralele determina pe doua drepte pe care le intersecteaza segmente proportionale.
- (11)
 - (a) Aratati ca dreptele urmatoare sunt paralele:

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-4}, \quad d_2 : \begin{cases} 5x-2y+z-6 &= 0, \\ 9x-2y+3z-16 &= 0. \end{cases}$$
 - (b) Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat dreptele urmatoare sa fie paralele:

$$\delta_1 : \begin{cases} x &= 2t+1, \\ y &= t-1, \\ z &= -t+2, \end{cases} \quad \delta_2 : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{\alpha} = \frac{z}{-2}.$$
 - (c) Scrieti ecuatiile dreptei ce trece prin $A(1, -1, 2)$ si este paralela cu dreapta de intersectie a planelor $\alpha : x+y-2z+1=0$ si $\beta : x-2y+z+1=0$.
 - (d) Scrieti ecuatiile tuturor dreptelor ce trec prin $P(1, 2, 3)$ si sunt paralele cu planul $\pi : x+2y-z+1=0$. Ce reprezinta multimea acestor drepte?

(12) Scrieti ecuatia planului

(a) ce trece prin $Q(1, 0, 2)$ si este paralel cu dreptele $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ si $d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

(b) ce contine dreapta $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ si este paralel cu dreapta $\delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

(c) ce trece prin $A(2, 1, 0)$ si e paralel cu planul $\pi : \begin{cases} x = 5 + 2t - 2s, \\ y = 3 - t + s, \\ z = 1 + t - 3s. \end{cases}$

(d) ce trece prin $P(2, 0, 1)$ si e paralel cu planul $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$.

(13) Fie punctele $A(-1, 3, 2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 0, 3)$, $D(3, -1, -2)$.

(a) Verificati ca A, B, C, D sunt necoplanare.

(b) Scrieti ecuatia dreptei ce trece prin B si este paralela cu mediana din A a tetraedrului $ABCD$.
(mediana unui tetraedru e dreapta ce uneste un varf cu centrul de greutate al fetei opuse)

(c) Scrieti ecuatia planului ce contine muchia AB si este paralel cu CD .