

CURS 3: PERPENDICULARITATE INTR-UN SPATIU AFIN EUCLIDIAN 3 DIMENSIONAL

1. PERPENDICULARITATEA SUBSPATIILOR AFINE EUCLIDIENE

Deoarece capitolul de perpendicularitate se preda, la nivelul clasei a VIIa, de-a lungul a numeroase ore, si nu reusim sa expunem teoria intr-un singur curs, incepem tratarea acestui subiect la nivelul cursului de geometrie euclidiană. Nu vom relua toate demonstratiile teoremelor, le gasiti in cursul corespunzator anului I.

1.1. Subspatii a.e. perpendiculare/normale.

Definition 1. Fie $\mathcal{E}^n = (E, \vec{E}, \Phi)$ un spatiu afin euclidian de dimensiune **finita** $n \geq 2$ si doua subspatii affine euclidiene ale sale $E_1, E_2 \underset{s.a.e.}{\subseteq} E$. Spunem ca E_1 este **perpendicular** pe E_2 daca $\vec{E}_1 \subseteq (\vec{E}_2)^\perp$ sau $(\vec{E}_1)^\perp \subseteq \vec{E}_2$.

Daca $\vec{E}_1 = (\vec{E}_2)^\perp \Leftrightarrow \vec{E}_2 = (\vec{E}_1)^\perp$, cele doua subspatii se numesc **normale**. Am notat cu $(\vec{E}_2)^\perp$ suplementul ortogonal al lui $\vec{E}_2$ in $\vec{E}$. In acest caz spunem ca E_1 are **directia normala** $\vec{E}_2$ si E_2 are directia normala $\vec{E}_1$. In ambele situatii de mai sus notam $E_1 \perp E_2$.

Observatii:

(1) Subspatiile E_1, E_2 sunt **perpendiculare** daca si numai daca $\vec{E}_1 \subseteq (\vec{E}_2)^\perp$ sau $(\vec{E}_1)^\perp \subseteq \vec{E}_2$.

Subliniem ca incluziunile anterioare pot fi **stricte**.

De exemplu, daca d_1 si d_2 sunt doua drepte affine intr-un spatiu afin euclidian de dimensiune 3, atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_2 \subsetneq (\vec{d}_1)^\perp \Leftrightarrow \vec{d}_1 \subsetneq (\vec{d}_2)^\perp$. Mai mult, $d_1 = A_1 + [\vec{a}_1]$ si $d_2 = A_2 + [\vec{a}_2]$ sunt perpendiculare $\Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0$.

Analog, daca π_1, π_2 sunt doua plane affine intr-un spatiu euclidian afin 3 - dimensional, atunci $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow (\vec{\pi}_1)^\perp \subsetneq \vec{\pi}_2 \Leftrightarrow (\vec{\pi}_2)^\perp \subsetneq \vec{\pi}_1$. Daca $(\vec{\pi}_1)^\perp = [\vec{N}_1]$, $(\vec{\pi}_2)^\perp = [\vec{N}_2]$, atunci $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$.

(2) Relatia de perpendicularitate pe multimea subspatiilor affine euclidiene ale unui spatiu afin euclidian finit dimensional este simetrica.

(3) Doua subspatii affine E_1 si E_2 sunt normale $\Leftrightarrow \vec{E}_1 = (\vec{E}_2)^\perp \Leftrightarrow \vec{E}_2 = (\vec{E}_1)^\perp \Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = n$.

De exemplu o dreapta afina d este **normala** unui plan afin π intr-un spatiu afin euclidian 3 - dimensional daca si numai daca $\vec{d} = (\vec{\pi})^\perp \Leftrightarrow \vec{\pi} = (\vec{d})^\perp$.

Daca $d = A + \vec{d}$, $\vec{d} = [\vec{a}]$ si $\pi = B + \vec{\pi}$, cu $(\vec{\pi})^\perp = [\vec{N}]$, atunci d este normala lui $\pi \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Evident orice subspatii normale sunt perpendiculare.

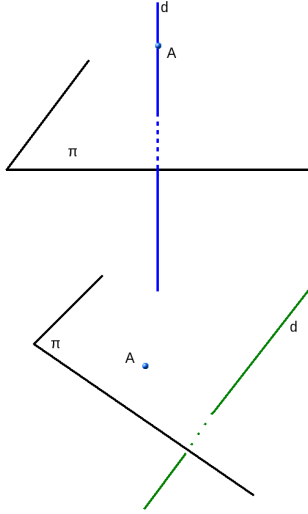
Proposition 2. Fie $\mathcal{E}^n = (E, \vec{E}, \Phi)$ un spatiu afin euclidian, punctul $A \in E$ si $E_1 \underset{s.a.e.}{\subseteq} E$. Atunci exista un unic subspatiu afin euclidian $E_2 \underset{s.a.e.}{\subseteq} E$ ce trece prin A si e normal la E_1 .

Evident $E_2 = A + (\vec{E}_1)^\perp$.

Definition 3. Acest subspatiu afin euclidian unic determinat se numeste **subspatiul afin normal prin A la E_1** .

Daca E_1 este un hiperplan al lui E , atunci E_2 este o dreapta afina, numita **normala prin A la E_1** .

De exemplu, intr-un spatiu afin euclidian 3 dimensional, dat un plan afin π si un punct A , exista o singura dreapta ce trece prin A si e normala planului π . Analog, data o dreapta afina d si un punct A , exista un singur plan afin ce trece prin A si e normal dreptei d .



Dat punctul $A \in E$ si $E_1 \subseteq E$, exista cel putin un $E_2 \subseteq E$ ce trece prin A si este perpendicular pe E_1 .

Orice s.a.e. de tipul $A + W$, cu W subspatiu liniar al lui $(\vec{E}_1)^\perp$ indeplineste conditia ceruta. Intr-un spatiu afin euclidian 3 dimensional, data o dreapta afina d si un punct A , exista o infinitate de drepte ce trec prin A si sunt perpendiculare pe d si reuniunea lor formeaza planul afin prin A , normal dreptei d .

Proposition 4. *Intersectia a doua subspatii affine euclidiene normale este formata dintr-un singur punct.*

Definition 5. Daca E_1 si E_2 sunt subspatii affine euclidiene normale, numim $\{P\} = E_1 \cap E_2$ **picioarul subspatiului normal E_2 la E_1** sau invers.

1.2. Ecuatiile unui subspatiu afin dat printr-un punct si o directie normala a sa. Fie $\mathcal{E}^n = (E, (\vec{E}, <, >), \Phi)$ un spatiu afin euclidian n -dimensional. Ce noutati apar cand vrem sa scriem ecuatiile unui subspatiu afin euclidian al sau?

In primul rand, vom fixa un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ in $\mathcal{E}^n$.

Subspatiul afin euclidian $\mathcal{E}_1^p = (E_1, \vec{E}_1, \Phi|_{E_1 \times E_1})$ p -dimensional ($1 \leq p \leq n-1$) al lui $\mathcal{E}^n$ este unic determinat de un punct al sau $A \in E_1$ si de directia sa normala $(\vec{E}_1)^\perp$. Deoarece $\dim \vec{E}_1 = p$ rezulta ca $\dim (\vec{E}_1)^\perp = n-p$.

Sa presupunem ca $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-p}$ sunt vectorii unei baze in $(\vec{E}_1)^\perp$.

Consideram coordonatele elementelor ce determina subspatiul E_1 in raport cu $\mathcal{R}$: $\bar{r}_0 = \vec{OA} = \sum_{i=1}^n x_0^i \bar{e}_i$, $\bar{v}_k = \sum_{i=1}^n v_{ki} \bar{e}_i$, $\forall k \in \overline{1, n-p}$. Fie un punct arbitrar $P \in E$, cu $\bar{r} = \vec{OP} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i$.

Atunci $P \in E_1 \Leftrightarrow \vec{AP} \in \vec{E}_1 \Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{r}_0) \perp (\vec{E}_1)^\perp \Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{r}_0) \perp \bar{v}_i, \forall i \in \overline{1, n-p}$.

Deci $P(\bar{r}) \in E_1 \Leftrightarrow \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_i \rangle = 0, \forall i \in \overline{1, n-p}$. Am obtinut astfel un sistem de $n-p$ **ecuatii vectoriale** pentru subspatiul afin $\mathcal{E}_1^p$:

$$\begin{cases} \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_1 \rangle = 0, \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_2 \rangle = 0, \\ \dots \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_{n-p} \rangle = 0. \end{cases}$$

Inlocuind coordonatele vectorilor $\bar{r}_0$ si $\bar{v}_i$, $i \in \overline{1, n-p}$, folosind faptul ca $\mathcal{R}$ este un reper ortonormat, deci $\langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$, obtinem ecuatiile lui $\mathcal{E}_1^p$ ca **intersectie de $n-p$ hiperplane**:

$$\begin{cases} v_{11}(x^1 - x_0^1) + v_{12}(x^2 - x_0^2) + \dots + v_{1n}(x^n - x_0^n) & = 0, \\ v_{21}(x^1 - x_0^1) + v_{22}(x^2 - x_0^2) + \dots + v_{2n}(x^n - x_0^n) & = 0, \\ \dots & \\ v_{n-p,1}(x^1 - x_0^1) + v_{n-p,2}(x^2 - x_0^2) + \dots + v_{n-p,n}(x^n - x_0^n) & = 0. \end{cases}$$

Ecuatia unui hiperplan afin euclidian. Daca E_1 este un hiperplan, deci un subspatiu afin de dimensiune $n-1$. Rezulta ca directia sa normala are dimensiune 1.

Deci $E_1 = A + \vec{E}_1$, cu $(\vec{E}_1)^\perp = [\bar{N}]$, $\bar{N} \neq \bar{0}$. Presupunem ca $\bar{r}_0 = \vec{OA} = \sum_{i=1}^n x_0^i \bar{e}_i$, $\bar{N} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{e}_i$.

- Ecuatia vectoriala: $\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N} \rangle = 0$;
- Ecuatia generala: $a_1(x^1 - x_0^1) + a_2(x^2 - x_0^2) + \dots + a_n(x^n - x_0^n) = 0 \Leftrightarrow a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + b = 0$, cu $b = -a_1x_0^1 - \dots - a_nx_0^n$.

Observam ca in ecuatia generala a hiperplanului, coeficientii lui $x^1, \dots, x^n$ sunt coordonatele unui vector normal hiperplanului.

- Ecuatiile canonice ale normalei la hiperplanul E_1 prin punctul A sunt:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a_1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a_2} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{a_n}$$

Pozitiile relative a doua hiperplane. Putem determina acum mult mai usor pozitia relativa a doua hiperplane.

Fie $\mathcal{H}_1$ hiperplanul prin A_1 , de directie normala $[\bar{N}_1]$ si $\mathcal{H}_2$ hiperplanul prin A_2 , de directie normala $[\bar{N}_2]$, de ecuatii generale

$$(\mathcal{H}_1): a_1x^1 + \dots + a_nx^n + d = 0, (\mathcal{H}_2): b_1x^1 + \dots + b_nx^n + e = 0. (a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0, b_1^2 + \dots + b_n^2 > 0)$$

Cele doua hiperplane sunt paralele daca si numai daca $\bar{N}_1$ si $\bar{N}_2$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Daca $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{d}{e}$ cele doua hiperplane sunt paralele si disjuncte, iar daca $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{d}{e}$ cele doua hiperplane coincid.

Daca $\bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2$ atunci intersectia celor doua hiperplane este un subspatiu afin de dimensiune $n-2$.

Ecuatiile dreptei afine euclidiene. Fie dreapta afina d prin $A(\bar{r}_0)$, de directie normala $(\vec{d})^\perp = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1}]$. Sistemul ecuatiilor dreptei este

$$\begin{cases} \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_1 \rangle & = 0, \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_2 \rangle & = 0, \\ \dots & \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_{n-1} \rangle & = 0. \end{cases}$$

Exemple in $\mathcal{E}^3$. Consideram un spatiu afin euclidian trei dimensional $\mathcal{E}^3$ si reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

a) Fie **dreapta afina** $d = A + \vec{d}$, cu $A(\bar{r}_0)$, $\bar{r}_0 = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, de directie normala $(\vec{d})^\perp = [\bar{N}_1, \bar{N}_2]$,

$\bar{N}_1 = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\bar{N}_2 = \bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$.

$P(\bar{r}) \in d \Leftrightarrow \vec{AP} = \bar{r} - \bar{r}_0 \in \vec{d} \Leftrightarrow \vec{AP} \perp [\bar{N}_1, \bar{N}_2]$. Astfel obtinem ecuatiile vectoriale

$$\begin{cases} \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}_1 \rangle & = 0, \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}_2 \rangle & = 0. \end{cases}$$

Inlocuind $\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$ si $\bar{r}_0 = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ obtinem ecuatiile dreptei ca intersectie de plane:

$$\begin{cases} 3(x^1 - 2) + 5(x^2 + 4) - 2(x^3 - 1) & = 0, \\ (x^1 - 2) - 7(x^2 + 4) + 4(x^3 - 1) & = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^1 + 5x^2 - 2x^3 + 16 & = 0, \\ x^1 - 7x^2 + 4x^3 - 34 & = 0. \end{cases}$$

In spatiul linear euclidian $(\vec{E}, \langle, \rangle)$ avem **produsul vectorial a doi vectori**. Recapitulati proprietatile acestuia!

Deoarece $\vec{N}_1 \perp \vec{d}$, $\vec{N}_2 \perp \vec{d}$, $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \perp \vec{N}_1$, $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \perp \vec{N}_2$, rezulta ca ca $\vec{d} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2]$. Deci data o dreapta ca intersectie de plane, deducem imediat un vector director al dreptei ca fiind produsul vectorial al vectorilor normali la cele doua plane.

Pentru dreapta $(d) : \begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 + 1 = 0, \\ x^1 - 3x^2 + 4x^3 - 1 = 0, \end{cases}$ observam ca $\bar{N}_1(2, 1, -1)$ e vector normal planului $(\pi_1) : 2x^1 + x^2 - x^3 + 1 = 0$ si $\bar{N}_2(1, -3, 4)$ e vector normal planului $(\pi_2) : x^1 - 3x^2 + 4x^3 - 1 = 0$. Deci un vector director al dreptei d este $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & 2 & 1 \\ \bar{e}_2 & 1 & -3 \\ \bar{e}_3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\bar{e}_1 - 9\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3$.

b) Fie **planul afin** π in $\mathcal{E}^3$ ce trece prin $A(1, 2, 3)$ si are directia normala $(\vec{\pi})^\perp = [\bar{N}]$, cu $\bar{N}(3, -4, 2)$. Atunci $P(\bar{r}) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \bar{r} - \bar{r}_0 \in \vec{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp [\bar{N}]$ si ecuatia vectoriala a planului π este $\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N} \rangle = 0$, iar ecuatia generala este

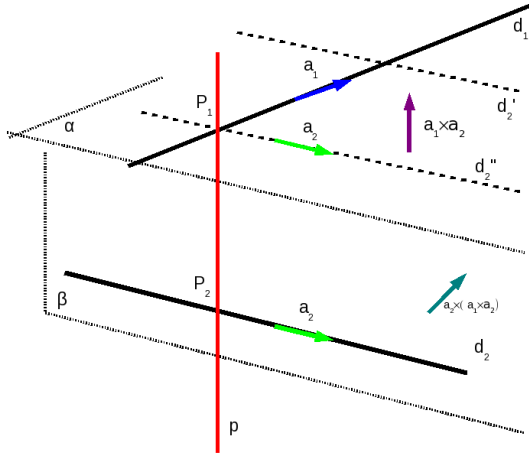
$$3(x^1 - 1) - 4(x^2 - 2) + 2(x^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x^1 - 4x^2 + 2x^3 - 1 = 0.$$

c) Ecuatiile canonice ale **normalei** prin $B(1, 4, 1)$ la planul γ de ecuatie generala $3x^1 - 2x^2 + 5x^3 + 2 = 0$ sunt

$$\frac{x^1 - 1}{3} = \frac{x^2 - 4}{-2} = \frac{x^3 - 1}{5}.$$

Theorem 6. Fie d_1 si d_2 doua drepte afine necoplanare dintr-un spatiu afin euclidian $\mathcal{E}^3$ de dimensiune 3. Atunci exista o unica dreapta ce se sprijina pe cele doua drepte si este perpendiculara pe ambele drepte. Aceasta dreapta se numeste **perpendiculara comuna a dreptelor d_1 si d_2** .

Fie $d_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$ si $d_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$ doua drepte **necoplanare** din spatiul afin euclidian trei dimensional $\mathcal{E}^3$.



Sa demonstram si vectorial faptul ca dreapta p de ecuatii

$$\begin{cases} \langle \bar{r} - \bar{r}_1, \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \rangle = 0, \\ \langle \bar{r} - \bar{r}_2, \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \rangle = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{a}_1, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = 0, \\ (\bar{r} - \bar{r}_2, \bar{a}_2, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = 0, \end{cases}$$

este unica perpendiculara comuna a dreptelor necoplanare d_1 si d_2 .

Existenta

Fie β planul $\langle \bar{r} - \bar{r}_1, \bar{N}_2 \rangle = 0$ si π planul $\langle \bar{r} - \bar{r}_1, \bar{N}_1 \rangle = 0$, unde

$$\bar{N}_1 = \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle \bar{a}_1 - \|\bar{a}_1\|^2 \bar{a}_2,$$

$$\bar{N}_2 = \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \|\bar{a}_2\|^2 \bar{a}_1 - \langle \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle \bar{a}_2.$$

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (\|\bar{a}_1\|^2 \|\bar{a}_2\|^2 - \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle^2) \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \stackrel{\text{Id. Lagrange}}{=} \|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|^2 \bar{a}_1 \times \bar{a}_2. \text{ Deoarece } \bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2 \text{ rezulta ca}$$

$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \neq \bar{0} \Leftrightarrow \bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2$, deci planele β si π nu sunt paralele, deci intersectia lor este intr-adevar o dreapta p , de directie $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \parallel \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$. Deoarece $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \perp \bar{a}_1$ si $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \perp \bar{a}_2$, rezulta ca $p \perp d_1$ si $p \perp d_2$.

Este suficient sa mai demonstram ca p e coplanara si cu d_1 , si cu d_2 . Va rezulta automat ca p intersecteaza ambele drepte.

Fie $P(\bar{r}_0)$ un punct arbitrar al dreptei p .

Deci $\langle \bar{r}_0 - \bar{r}_1, \bar{N}_1 \rangle = \langle \bar{r}_0 - \bar{r}_2, \bar{N}_2 \rangle = 0$.

Dreapta p este dreapta prin $P(\bar{r}_0)$, de directie $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ deci dreptele p si d_1 sunt coplanare daca si numai daca $(\bar{r}_0 - \bar{r}_1, \bar{N}_1 \times \bar{N}_2, \bar{a}_1) = 0$.

$$\begin{aligned} (\bar{r}_0 - \bar{r}_1, \bar{N}_1 \times \bar{N}_2, \bar{a}_1) &= (\bar{r}_0 - \bar{r}_1, \|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|^2 \bar{a}_1 \times \bar{a}_2, \bar{a}_1) = \\ &= -\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|^2 (\bar{a}_1, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2, \bar{r}_0 - \bar{r}_1) = \|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|^2 \langle \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2), \bar{r}_1 - \bar{r}_0 \rangle = \\ &= \|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|^2 \langle \bar{N}_1, \bar{r}_1 - \bar{r}_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Deci p este coplanara cu d_1 . Analog se demonstreaza ca p e coplanara cu d_2 .

Unicitatea Presupunem ca mai exista p' o alta perpendiculara comuna dreptelor d_1, d_2 , de ecuatie $\bar{r} = \bar{r}'_0 + t\bar{a}'$, $t \in \mathbb{R}$.

Deoarece $p' \perp d_1$ si $p' \perp d_2$ rezulta ca $\bar{a}' \parallel \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$, deci $\vec{p} = \vec{p}'$.

Sa demonstram ca $p \cap p' \neq \emptyset$. Ar rezulta atunci ca dreptele p si p' au acelasi spatiu liniar director si un punct comun, deci $p = p'$.

Stim ca $p' \cap d_1 \neq \emptyset$, deci p' si d_1 sunt coplanare. Analog p', d_2 sunt coplanare $\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r}'_0 - \bar{r}_1, \bar{a}_1, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = 0, \\ (\bar{r}'_0 - \bar{r}_2, \bar{a}_2, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = 0, \end{cases}$ deci punctul $M \in p'$ de vector de pozitie $\bar{r}'_0$ verifica ecuatiile dreptei p , rezulta $p \cap p' \neq \emptyset$.

De **exemplu**, fie dreptele

$$d_1 : \frac{x^1 - 1}{2} = \frac{x^2 - 2}{1} = \frac{x^3}{1}, \quad d_2 : \frac{x^1}{-3} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3 + 1}{2}.$$

Atunci $A_1(1, 2, 0) \in d_1$, $\vec{d}_1 = [\bar{a}_1]$, $\bar{a}_1(2, 1, 1)$, $A_2(0, 0, -1) \in d_2$, $\vec{d}_2 = [\bar{a}_2]$, $\bar{a}_2(-3, 1, 2)$.

Deoarece $(\vec{A_1 A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0 \Rightarrow$ dreptele d_1 si d_2 sunt necoplanare.

Calculam $\bar{N}_1 = \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = (12, -9, -15) \parallel (4, -3, -5)$ si $\bar{N}_2 = \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = (19, 17, 20)$.

Deci ecuatiile perpendicularei comune sunt

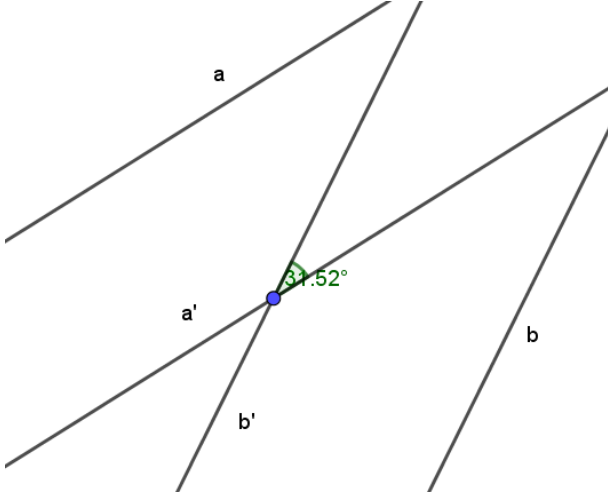
$$\begin{cases} 4x^1 - 3x^2 - 5x^3 + 2 &= 0, \\ 19x^1 + 17x^2 + 20x^3 + 20 &= 0. \end{cases}$$

2. DREPTE PERPENDICULARE, DREAPTA PERPENDICULARA PE UN PLAN IN $\mathcal{E}^3$. TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE SI RECIPROCELE EI.

Pentru a introduce notiunea de drepte perpendiculare, reamintim cum definim unghiul (neorientat) a doua drepte in $\mathcal{E}^3$.

Definition 7. Fie dreptele a, b . Consideram punctul arbitrar fixat O si prin O construim paralelele la a , respectiv b . Aceste paralele formeaza patru unghiuri (doua cate doua opuse la varf, deci respectiv congruente). Unul dintre cele mai mici unghiuri (ca masura) din cele formate de a si b se numeste unghiul dreptelor a si b .

Daca dreptele sunt deja concurente, evident nu mai are rost constructia anterioara. Daca dreptele sunt paralele, unghiul lor este unghi nul. Constructia descrisa anterior este utila pentru dreptele necoplanare.

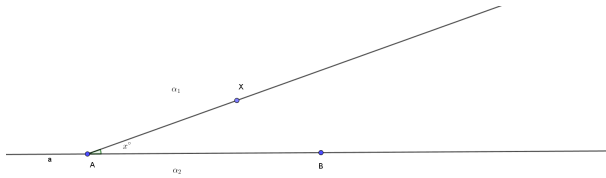


Remark 8. Definitia anterioara nu depinde de alegerea lui O , deoarece unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente (alegand cel mai mic unghi format de drepte, ele nu pot fi suplementare).

Presupunem cunoscute proprietatile de incidenta si ordine, cat si notiunea de masura a unghiurilor. Notam cu $\mathcal{U}$ multimea unghiurilor din spatiu.

(M0) Masura unghiurilor este o functie $m : \mathcal{U} \rightarrow [0, 180]$.

(M1) **Axioma de constructie a unui unghi de masura data.** In planul α se da dreapta a , punctele $A, B \in a$. Dreapta a imparte planul in doua semiplane, α_1, α_2 . Dat numarul $x \in (0, 180)$ si semiplanul α_1 , exista o singura semidreapta $(AX \subset \alpha_1$ a.i. $m(\widehat{XAB}) = x^\circ$.



(M2) (Axioma adunarii unghiurilor) Daca $D \in \widehat{IntBAC}$ atunci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC})$.

Definitie Daca doua unghiuri au o latura comuna si celelate doua laturi sunt semidrepte opuse, spunem ca sunt adiacente suplementare.

(M3) (Axioma suplementului) Daca doua unghiuri sunt adiacente suplementare, atunci ele au suma masurilor 180.

Definition 9. Un unghi se numeste drept daca are masura de 90° .

Doua drepte sunt perpendiculare daca unghiul lor este unghi drept.

Amintim ca doua unghiuri sunt congruente daca au aceeasi masura. Se arata usor ca un unghi e drept daca si numai daca el este congruent cu un unghi adiacent suplementar.

Observam ca in definitie nu apare nicaieri obligativitatea ca cele doua drepte sa fie concurente. Exista drepte necoplanare perpendiculare. Doar in plan oricare doua drepte perpendiculare sunt concurente deoarece dreptele sunt in acest caz subspatii a.e. normale. Evident putem demonstra acest lucru si elementar. Daca presupunem prin reducere la absurd ca doua drepte coplanare, perpendiculare, nu sunt concurente, ar rezulta ca ele sunt paralele, deci unghiul lor ar fi nul, nu drept.

Cum putem demonstra existenta dreptelor perpendiculare? In cazul unui plan dat, vom folosi **axioma de constructie a unui unghi de masura data** si

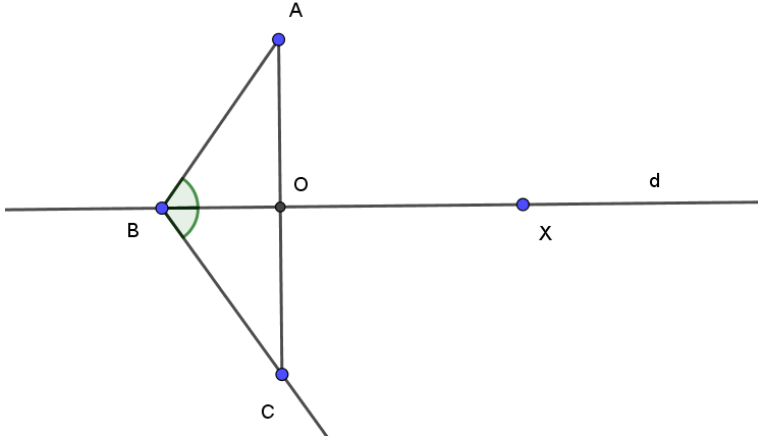
axioma de constructie a unui segment de lungime data. Fie semidreapta $(AX$ si numarul real strict pozitiv l . Atunci exista un unic punct $B \in (AX$ a.i. $d(A, B) = l$.

Proposition 10. Fie planul α , dreapta $d \subset \alpha$ si punctul $A \in \alpha$. Atunci exista o unica dreapta $p \subset \alpha$ astfel incat $A \in p$ si $p \perp d$.

Proof. a) Presupunem ca $A \in d$. Atunci aplicam axioma de constructie a unui unghi de masura data, pentru cazul particular $x = 90^\circ$. Dreapta suport a semidreptei unice construite cu ajutorul axiomei este cea cautata.

b) Daca $A \notin d$, fie $B \in d$. Daca $AB \perp d$, ea este tocmai perpendiculara ceruta.

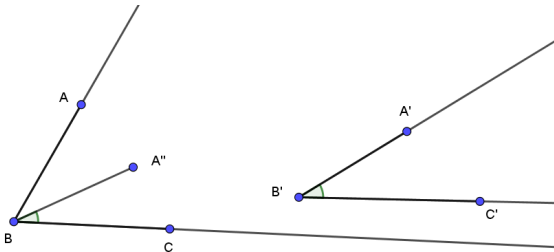
Presupunem ca AB nu e perpendiculara pe d . Fie $X \in d \setminus \{B\}$ astfel incat $\widehat{ABX}$ sa fie ascutit. In semiplanul marginit de d , care nu contine punctul A , construim semidreapta unica $(BY$ astfel incat $\widehat{ABX} \equiv \widehat{XBY}$. Fie $C \in (BY$ unicul punct cu proprietatea $[BA] \equiv [BC]$. Deoarece A si C sunt in semiplane opuse marginite de d , rezulta ca $\exists (AC) \cap d = \{O\}$. Triunghiurile ABO si CBO sunt congruente (LUL: $[BA] \equiv [BC]$, $\widehat{ABO} \equiv \widehat{CBO}$ si $[BO]$ latura comuna), deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COB}$. Cum aceste doua unghiuri sunt adiacente suplementare, rezulta ca ele sunt unghiuri drepte, deci $AC \perp d$.



Pentru a demonstra **unicitatea perpendicularei din A pe d**, folosim metoda reducerii la absurd si teorema care afirma ca orice unghi exterior al unui triunghi este mai mare decat oricare unghi al triunghiului, neadiacent lui.

Presupunem ca $\exists O', O \in d$ astfel incat $AO \perp d$ si $AO' \perp d$. In acest caz triunghiul AOO' ar avea un unghi exterior drept, congruent cu un unghi al triunghiului neadiacent lui. Astfel am obtinut o contradictie cu teorema unghiului exterior pe care o demonstram mai jos.

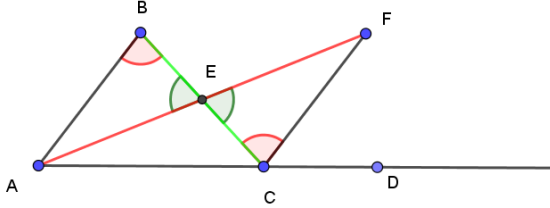
Spunem ca $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$ daca $m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{A'B'C'}) \Leftrightarrow \exists A'' \in \text{Int}\widehat{ABC}$ astfel incat $\widehat{A''BC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.



□

Theorem 11. Fie $\triangle ABC$, punctul D astfel incat $A - C - D$ (C este situat intre A si C). Atunci $\widehat{BCD} > \widehat{ABC}$ si $\widehat{BCD} > \widehat{BAC}$.

Proof. Fie E mijlocul lui (BC) si F simetricul lui A fata de E . Atunci $\triangle FEC \equiv \triangle AEB$ (LUL) deci $\widehat{FCE} \equiv \widehat{ABE}$. Se poate motiva, folosind anumite teoreme deduse din axiomele de ordine, ca punctul F astfel construit apartine interiorului unghiului $\widehat{BCD}$, deci $\widehat{BCD} > \widehat{ABC}$.



Pentru a demonstra ca $\widehat{BCD} > \widehat{BAC}$ ne folosim de faptul ca unghiul opus la varf lui $\widehat{BCD}$ este congruent cu acesta si este si el unghi exterior al triunghiului dat. Se demonstreaza analog ca acest unghi nou este mai mare decat $\widehat{ABC}$.

Facem observatia ca putem demonstra faptul ca $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC})$ doar folosind axioma paralelelor. $\square$

Remark 12. Relatia de perpendicularitate pe multimea dreptelor unui plan dat este simetrica, evident nu este reflexiva. Se poate usor demonstra ca doua drepte coplanare, perpendiculare pe o a treia dreapta inclusa in acelasi plan, sunt paralele (am facut demonstratia in cursul precedent, cand am aratat ca exista drepte paralele, si foloseam exact unicitatea perpendicularei dintr-un punct pe o dreapta). Deducem de aici ca relatia de perpendicularitate pe multimea dreptelor unui plan dat nu este tranzitiva.

2.1. Dreapta perpendiculara pe un plan.

Definition 13. O dreapta d este perpendiculara pe un plan daca d este perpendiculara pe orice dreapta inclusa in plan.

Observati legatura cu definitia din prima sectiune a cursului. d este normala planului π daca $\vec{d}^\perp = \vec{\pi} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{\pi}^\perp$, deci orice vector director al dreptei va fi perpendicular pe $\vec{\pi}$, deci pe orice vector al acestuia. Cum un subspatiu liniar este complet determinat de o baza a sa, este suficient ca vectorul director al dreptei sa fie perpendicular pe doi vectori liniar independenti ai planului vectorial. Regasim aceasta teorema reformulata la nivelul clasei a VIIIa astfel.

Theorem 14. Daca dreapta d este perpendiculara pe doua drepte concurente din planul α , atunci $d \perp \alpha$.

Aplicam aceasta teorema atunci cand dorim sa aratam ca o dreapta este perpendiculara pe un plan. O vom folosi ulterior si pentru a demonstra ca dat un punct A si un plan α , exista o singura dreapta ce trece prin A si e perpendiculara pe α . Aceasta teorema certifica existenta dreptelor perpendiculare pe plan.

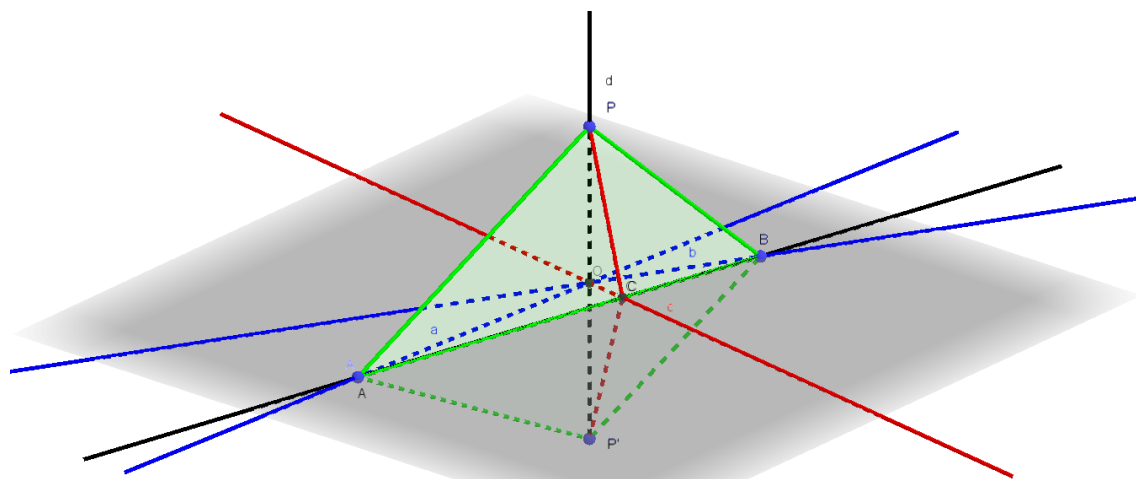
Sa revenim la demonstratia teoremei.

Proof. Fie dreptele concurente $a, b \subset \alpha$ astfel incat $d \perp a$ si $d \perp b$. Fie $c \subset \alpha$ o dreapta arbitrara. Vom demonstra ca $d \perp c$. Evident, daca $c \parallel a$ sau $c \parallel b$ problema e rezolvata. Presupunem ca c nu e paralela nici cu a nici cu b .

Fie $\{O\} = d \cap \alpha$. Putem presupune ca $O \in a \cap b \cap c$. In caz contrar, prin O ducem paralelele la a, b si c si le folosim pe acestea in rationamentul nostru.

Fie $P \in d$ si P' simetricul lui P fata de O . Consideram o dreapta in α care taie respectiv dreptele a, b, c in A, B, C .

Observam ca a si b sunt mediatore ale segmentului $[PP']$, incluse respectiv in planele (a, d) si (b, d) . Deoarece $A \in a$ si $B \in b$ rezulta ca $AP = AP'$ si $BP = BP'$. Deci $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$ (LLL), de unde deducem $\widehat{PAC} \equiv \widehat{P'AC}$. Folosind si $[PA] \equiv [P'A]$ si $[AC]$ latura comuna, rezulta ca $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$ (LUL), deci $[PC] \equiv [P'C]$. Deci, in planul (c, a) , C este egal departat de P si P' , deci P apartine mediatoarei lui $[PP']$ din acest plan. Deducem ca $CO \perp d \Leftrightarrow c \perp d$.

☐

Teorema ne indica o metoda prin care putem construi un plan perpendicular pe o dreapta data, care sa treaca printr-un punct al acelei drepte.

Theorem 15. *Fie dreapta d si punctul A . Atunci exista un unic plan ce trece prin A si este perpendicular pe d . El coincide cu multimea tuturor dreptelor ce trec prin punctul A si sunt perpendiculare pe dreapta d .*

Proof. a) Presupunem mai intai ca $A \in d$.

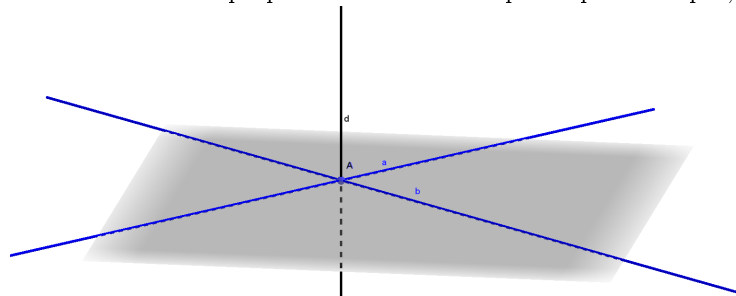
Existența: considerăm două plane ce conțin dreapta d . În fiecare dintre ele construim unica perpendiculară în A pe d . Notăm aceste două perpendiculare cu a și b . Fie $\alpha = (a, b)$ planul determinat de cele două perpendiculare. Din teorema anterioară rezultă că $d \perp \alpha$. Evident $A \in \alpha$.

Unicitate: vom demonstra ca $\alpha = \mathcal{D}$, unde $\mathcal{D}$ este multimea punctelor tuturor dreptelor ce trec prin A si sunt perpendiculare pe d . Cum aceasta multime determina un obiect geometric unic, rezulta ca planul ce trece prin A si e perpendicular pe d este unic.

Să demonstrăm mai întâi că $\alpha = (a, b) \subset \mathcal{D}$. Fie $P \in \alpha \Rightarrow AP \subset \alpha$. Din $d \perp \alpha$ rezultă că $d \perp AP$. Deci AP e o dreaptă prin A , perpendiculară pe d , de unde deducem că $P \in \mathcal{D}$.

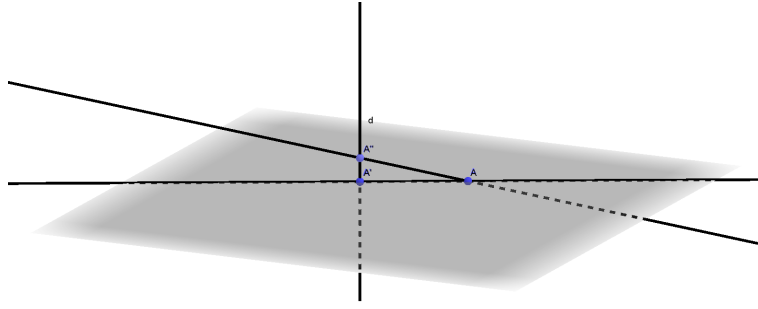
Acum aratam ca $\mathcal{D} \subset \alpha$. Fie $Q \in \mathcal{D} \Rightarrow AQ \perp d$. Notam $AQ := c$. Observam ca planele (a, b) si (d, c) au punctul comun A , $d \subset (d, c)$ dar d nu e inclusa in (a, b) . Deci cele doua plane sunt diferite. Rezulta ca intersectia lor este o dreapta, pe care o notam cu l : $\alpha \cap (c, d) = l$.

Din $d \perp \alpha$ si $l \subset \alpha$ rezulta $d \perp l$. Dar $d \perp c$, deci in planul (d, c) avem in A doua perpendiculare pe d , si anume c si l . Din unicitatea perpendicularei intr-un punct pe o dreapta, intr-un plan dat, rezulta ca $c = l$, deci $c \subset \alpha$.



b) Presupunem acum ca $A \notin d$. In planul (d, A) exista o unica perpendiculara din A pe d . Presupunem ca aceasta intersecteaza dreapta d in A' . Din a) stim ca exista un unic plan α ce trece prin A' si e perpendicular pe d si acesta coincide cu multimea punctelor tuturor perpendicularelor in A' pe d . Dar $A'A$ este o astfel de perpendiculara, deci $A \in \alpha$. Astfel am gasit un plan ce trece prin A si e perpendicular pe d .

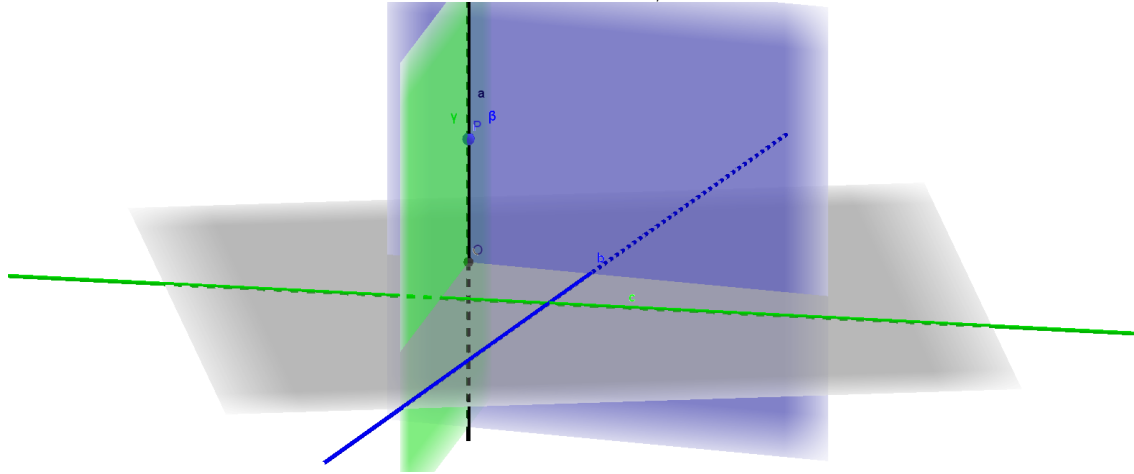
Pentru unicitatea folosim reducerea la absurd. Presupunem ca mai exista un plan $\beta \neq \alpha$ ce trece prin A si e perpendicular pe d . Fie $\{A''\} = \beta \cap d$. $\beta \neq \alpha \Rightarrow A' \neq A''$. Rezulta ca $AA'' \subset \beta$. Dar $\beta \perp d$, deci $AA'' \perp d$. Avem deci in planul $(AA'A'')$ doua perpendiculare duse din A pe d , imposibil, deci presupunerea facuta este falsa.



□

Theorem 16. Fie planul α si punctul P . Atunci exista o singura dreapta ce trece prin P si e perpendiculara pe α .

Proof. Demonstratia e aceeaasi pentru cazurile $P \in \alpha$ si $P \notin \alpha$.



Fie b, c doua drepte concurente incluse in α , β unicul plan prin P , perpendicular pe b si γ unicul plan prin P perpendicular pe c . Planele β si γ sunt distincte. Daca presupunem prin RA ca $\beta = \gamma$ si notam cu $B = b \cap \beta$, $\{C\} = c \cap \beta$, $\{O\} = b \cap c$, atunci in planul (OBC) exista doua perpendiculare OB si OC pe BC , contradictie).

Dar $P \in \beta \cap \gamma$, deci planele β si γ se intersecteaza dupa o dreapta a ce trece prin P . Din $b \perp \beta$ si $a \subset \beta$ rezulta ca $b \perp a$. Analog $c \perp a$. Deci a e perpendiculara pe dreptele concurente b si c din planul α , rezulta ca $a \perp \alpha$.

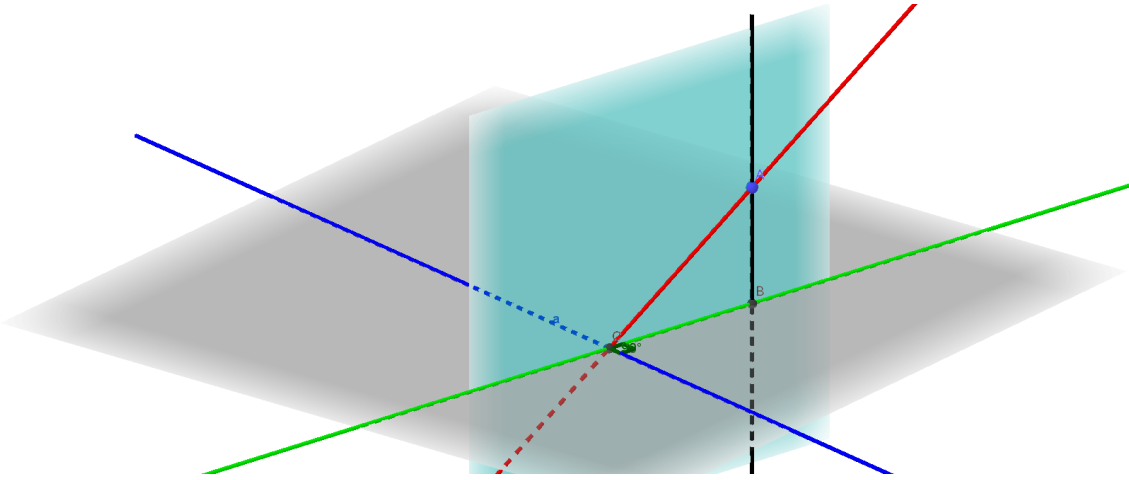
Sa demonstram acum unicitatea acestei perpendiculare din P pe α . Presupunem ca a' e o dreapta prin P , perpendiculara pe α . Rezulta ca $a' \perp b$ si $a' \perp c$. Deoarece β coincide cu reuniunea tuturor perpendicularelor duse din P pe b si γ coincide cu multimea tuturor perpendicularelor duse din P pe c , deducem ca $a' \subset \beta$ si $a' \subset \gamma$, deci $a' \subset \beta \cap \gamma = a$.

□

In continuare prezentam teorema celor trei perpendiculare si cele doua reciproce ale sale.

Theorem 17. (teorema celor trei perpendiculare) Fie planul α , punctul A exterior lui α , dreapta $a \subset \alpha$. Daca $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ si $BC \perp a$, $C \in a$, atunci $AC \perp a$.

Teorema ne ajuta sa detectam rapid perpendiculara dintr-un punct exterior unui plan pe o dreapta inclusa in plan, atunci cand avem deja perpendiculara din punct pe plan.



Proof.

Deoarece $AB \perp \alpha$ si $a \subset \alpha$, rezulta ca $AB \perp a$. Dar $a \perp BC$. Cum BC si AB sunt evident concurente, deducem ca a e perpendiculara pe planul (ABC) determinat de ele, deci a e perpendiculara si pe dreapta $AC \subset (ABC)$.

Va invitam sa demonstrati singuri cele doua reciproce ale teoremei.

Theorem 18. (prima reciproca) Fie planul α , punctul $A \notin \alpha$, dreapta $a \subset \alpha$. Daca $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ si $AC \perp a$, $C \in a$, atunci $BC \perp a$.

A doua reciproca este mai interesanta. Ne invata cum sa ducem perpendiculara dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan, folosindu-ne de perpendiculara dintr-un punct pe o dreapta, intr-un plan dat. Mai exact, vreau sa duc perpendiculara din A pe planul α , $A \notin \alpha$. Identific in α o dreapta a . In planul determinat de a si A cobor unica perpendiculara din A pe a . Fie C piciorul acesteia. In planul α , ridic unica perpendiculara b pe a in C . In planul (b, A) cobor unica perpendiculara din A pe b . Fie B piciorul acesteia. Atunci se demonstreaza ca $AB \perp \alpha$.

Theorem 19. (a doua reciproca) Fie planul α , dreapta $a \subset \alpha$ si $AC \perp a$, $C \in a$. Fie $b \subset \alpha$ astfel incat $C \in b$ si $b \perp a$. Fie $AB \perp b$, $B \in b$. Atunci $AB \perp \alpha$.

3. APLICATII

- (1) Fie $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$, M mijlocul segmentului $[BC]$ si N un punct exterior planului (ABC) astfel incat $NA \perp (ABC)$. Demonstrati ca $NM \perp BC$.
- (2) a) Fie triunghiul ABC si O centrul cercului circumscris acestuia. Pe perpendiculara in O pe planul triunghiului se ia un punct arbitrar P . Sa se arate ca $PA = PB = PC$. b) Daca P e un punct exterior planului triunghiului ABC si $PA = PB = PC$, atunci piciorul perpendicularei din P pe (ABC) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .
- (3) Fie paralelogramul $ABCD$ si P un punct exterior planului (ABC) astfel incat $PA \perp AB$ si $PC \perp CD$. Demonstrati ca $AC \perp AB$.
- (4) Fie planele α si β care se intersecteaza dupa dreapta d si un punct M exterior ambelor plane. Fie $MM_1 \perp \alpha$, $M_1 \in \alpha$ si $MM_2 \perp \beta$, $M_2 \in \beta$. Demonstrati ca $d \perp (MM_1M_2)$.
- (5) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Stiind ca $AB \perp CD$ si $AC \perp BD$, demonstrati ca $AD \perp BC$. Un tetraedru in care perechile de muchii opuse sunt respectiv perpendiculare se numeste ortocentric.
- (6) Dreapta AD este perpendiculara pe planul triunghiului isoscel ABC , $[CA] \equiv [CB]$. Fie E mijlocul lui $[AB]$ si F piciorul perpendicularei din E pe BD . Demonstrati ca $BD \perp (CEF)$.
- (7) Se dau planul α , dreapta d inclusa in α si punctul $A \notin \alpha$. Fie B proiectia ortogonala a lui A pe d . Prin B se duce dreapta $d' \perp d$, $d' \subset \alpha$ si se ia $C \in d'$ astfel incat $\widehat{ABC}$ sa fie ascutit si $[AB] \equiv [BC]$. Fie C' proiectia ortogonala a lui C pe AB si punctul $D \in [BC]$ astfel incat $[AC'] \equiv [CD]$. Sa se arate ca $AD \perp \alpha$.

- (8) Se considera tetraedrul $OABC$ tridreptunghic in O ($AO \perp BO \perp CO \perp AO$). Fie H proiectia ortogonală a lui O pe (ABC) . Aratati ca H este ortocentrul triunghiului ABC .
- (9) Fie $ABCD$ un paralelogram si O un punct exterior planului acestuia. Proiectiile lui O pe dreptele AB, BC, CD, AD se noteaza respectiv cu M, N, P, Q . Fie $\{S\} = MP \cap NQ$. Demonstrati ca $MS \perp (ABC)$.
- (10) Cadrul de lucru este un spatiu afin euclidian trei dimensional, raportat la un reper cartezian ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Scrieti ecuatiile subspatiilor afine euclidiene date prin urmatoarele conditii:
- (a) planul ce trece prin $P(1, 2, -1)$ si este normal dreptei $\delta : \frac{x^1+2}{4} = \frac{x^2-3}{5} = \frac{x^3-1}{-2}$;
 - (b) dreapta ce trece prin $Q(3, -2, 5)$ si e normală planului $\pi : 4x^1 + 3x^2 - x^3 + 5 = 0$;
 - (c) dreapta ce trece prin $A(3, 1, 2)$, este perpendiculară pe dreapta $d : \frac{x^1-1}{3} = \frac{x^2}{-2} = \frac{x^3+1}{4}$ si care taie dreapta d ;
 - (d) planul determinat de normalele coborate din punctul $B(-3, 2, 5)$ respectiv pe planele
 $\alpha : 4x^1 + x^2 - 3x^3 + 13 = 0, \beta : x^1 - 2x^2 + x^3 - 11 = 0$;
 - (e) perpendiculară comună dreptelor
 $d_1 : \frac{x^1-7}{1} = \frac{x^2-3}{2} = \frac{x^3-9}{-1}, \quad d_2 : \frac{x^1-3}{-7} = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^3-1}{3}$;
 - (f) proiectia dreptei $d : \frac{x^1-1}{2} = \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^3}{1}$ pe planul $\pi : x^1 + 2x^2 + x^3 + 3 = 0$.
- (11) Determinati:
- (a) simetricile punctului $A(-1, 2, 0)$, fata de planul $\pi : x^1 + 2x^2 - x^3 = 0$, respectiv fata de dreapta
 $d : \frac{x^1+2}{1} = \frac{x^2+1}{0} = \frac{x^3-1}{-1}$;
 - (b) simetrica dreptei $d : \frac{x^1-1}{2} = \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^3}{1}$ fata de planul $\pi : x^1 + 2x^2 + x^3 + 3 = 0$.