

CURS 4: PLANE PERPENDICULARE, PROIECTIA ORTOGONALA A UNEI DREPTE PE UN PLAN, PERPENDICULARA COMUNA A DOUA DREPTE IN $\mathcal{E}^3$

In cursul acesta vom defini notiunea de plane perpendiculare, vom studia apoi unele probleme in care folosim planele perpendiculare. O astfel de aplicatie este proiectia unei drepte pe un plan. Vom preda la nivelul clasei a VIIa.

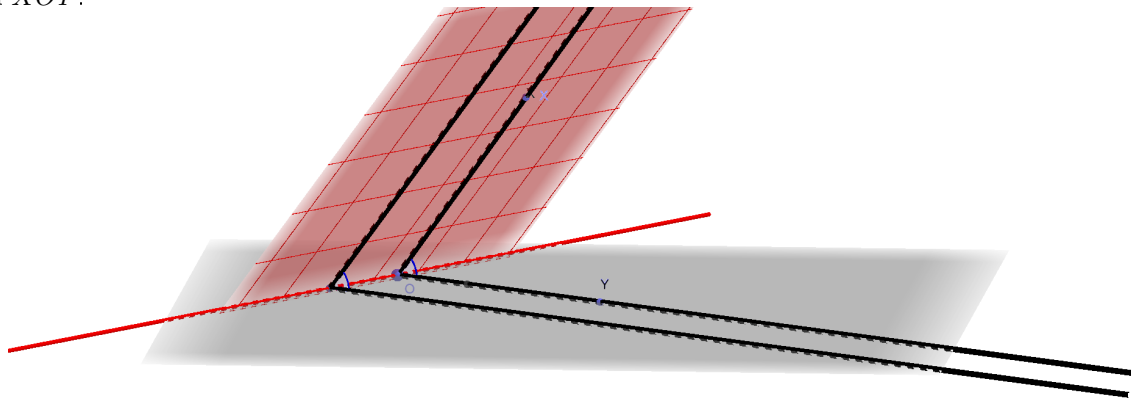
1. PLANE PERPENDICULARE

Definition 1. a) Reuniunea a doua semiplane inchise, marginite de aceeaasi dreapta d , se numeste **unghi diedru** (de muchie d). Daca semiplanele se noteaza cu α, β , unghiul diedru se noteaza cu $\widehat{\alpha, \beta}$.

Daca cele doua semiplane coincid, obtinem un unghi diedru nul, iar daca semiplanele sunt opuse, obtinem un unghi diedru plat. Orice alt tip de unghi diedru se numeste propriu.

b) Fie α' si β' planele ce contin cele doua semiplane α, β . Consideram $A \in \alpha \setminus d$ si $B \in \beta \setminus d$. Atunci interiorul unghiului diedru $\widehat{\alpha, \beta}$ este intersectia dintre semispatiul marginit de α' , care il contine pe B si semispatiul marginit de β' , care il contine pe A .

c) Fie unghiul diedru $\widehat{\alpha, \beta}$ de muchie d . Consideram $O \in d$, ($OX \subset \alpha$, ($OY \subset \beta$, cu $OX \perp d$ si $OY \perp d$. Unghiul $\widehat{XOY}$ se numeste **unghiul plan al unghiului diedru** $\widehat{\alpha, \beta}$. Masura acestuia nu depinde de alegerea lui O pe d , deoarece daca repetam constructia anterioara in alt punct al lui d , vom obtine un unghi cu laturile paralele cu $\widehat{XOY}$.



d) Spunem ca un unghi diedru este drept daca unghiul plan al unghiului diedru este drept.

In acest moment putem introduce notiunea de plane perpendiculare.

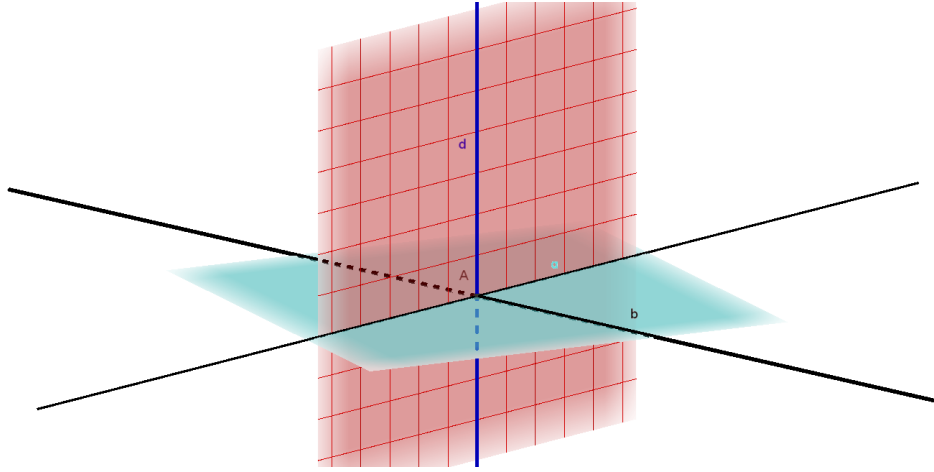
Definition 2. Fie planele α si β cu $\alpha \cap \beta = d$. Planele α, β sunt perpendiculare daca ele formeaza un unghi diedru drept.

Remark 3. Evident, doua plane ce se taie dupa o dreapta formeaza patru unghiuri diedre. Daca unul dintre ele este drept, atunci si celelalte trei sunt drepte.

Relatia de perpendicularitate pe multimea planelor este simetrica.

Principala teorema folosita in demonstrarea perpendicularitatii a doua plane este urmatoarea.

Theorem 4. Fie planele α si β . Presupunem ca planul β contine o dreapta d perpendiculara pe planul α . Atunci $\beta \perp \alpha$.



Proof. Fie $\{A\} = d \cap \alpha$. Daca $\alpha \cap \beta = a$, rezulta ca $A \in a$. Deoarece $d \perp \alpha$ si $a \subset \alpha$, rezulta ca $d \perp a$.

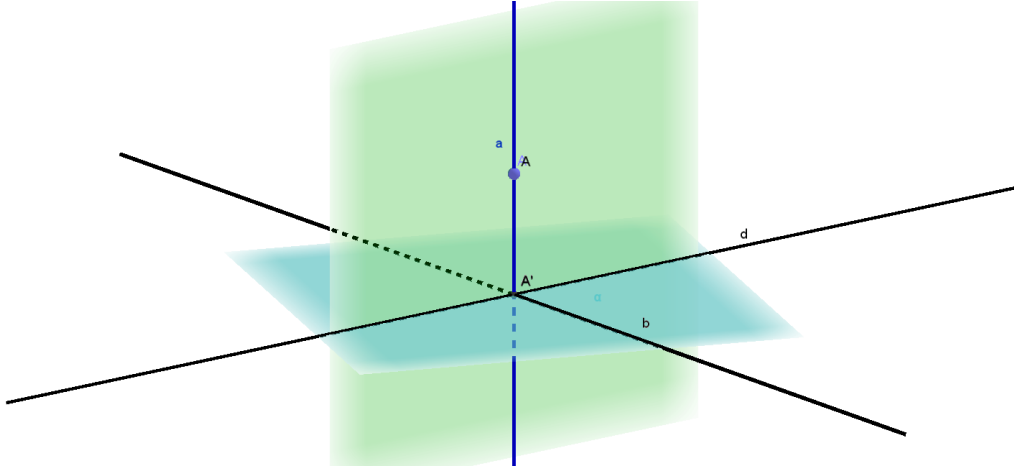
Fie $b \subset \alpha$ perpendiculara in A pe a . Rezulta ca unghiul determinat de semidreptele cu originea in A , incluse in d , respectiv b formeaza unghiul plan al unuiu dintre unghiurile diedre determinate de α si β . Dar $d \perp \alpha$, $b \subset \alpha$, deci $d \perp b$, deci acest unghi plan al unghiului diedru este drept. Rezulta ca $\alpha \perp \beta$.

□

Remark 5. Teorema ne da o metoda de a construi doua plane perpendiculare. Alegem un plan α oarecare. Intr-un punct arbitrar al sau ridicam perpendiculara d pe plan. Orice plan care contine pe d este perpendicular pe α . De abea acum putem deduce ca fetele laterale ale unei prisme drepte sunt situate in plane perpendiculare pe planele bazelor, in particular oricare doua fete ale unui paralelipiped dreptunghic sunt situate in plane perpendiculare.

Proposition 6. Fie planele perpendiculare α si β , intersectia lor fiind dreapta d . Fie A un punct al lui α si a perpendiculara din (in) A pe d . Atunci $a \perp \beta$.

Proof. Demonstratia este aceeaasi pentru cazurile $A \in d$ si $A \notin d$. Fie $\{A'\} = a \cap d$ (posibil $A' = A$). Fie $b \subset \beta$ perpendiculara in A' pe d . Atunci $\angle(a, b)$ e unghiul plan al unui unghi diedru determinat de α si β . Din $\alpha \perp \beta$ rezulta ca $\angle(a, b)$ e unghi drept, deci $a \perp b$. Cum $a \perp d$ si b, d sunt doua drepte concurente din β , rezulta ca $a \perp \beta$.

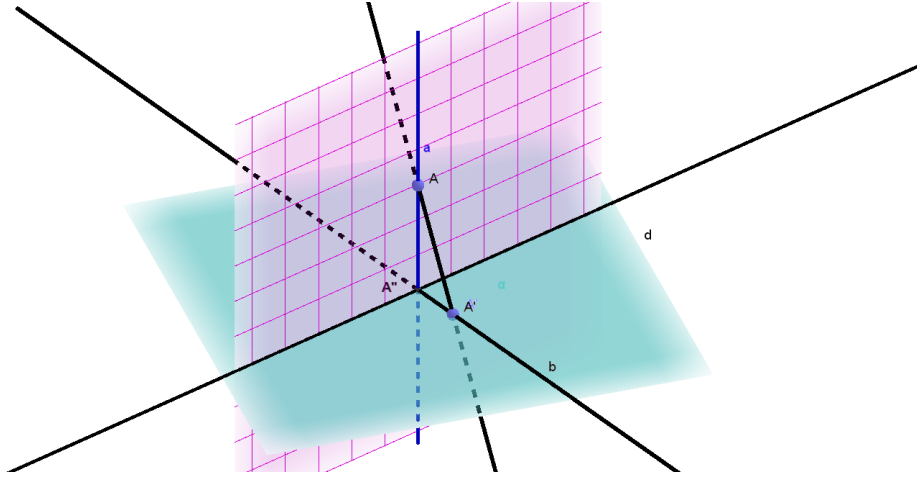


□

Deci date doua plane perpendiculare, daca vrem sa ducem dintr-un punct al unui plan perpendiculara pe celalalt plan, e suficient sa ducem perpendiculara din punct pe dreapta de intersectie a celor doua plane.

Proposition 7. Fie planele perpendiculare α si β , intersectia lor fiind dreapta d si $A \in \alpha$. Fie a perpendiculara din (in) A pe β . Atunci $a \subset \alpha$ (piciorul acestei perpendiculare apartine lui d).

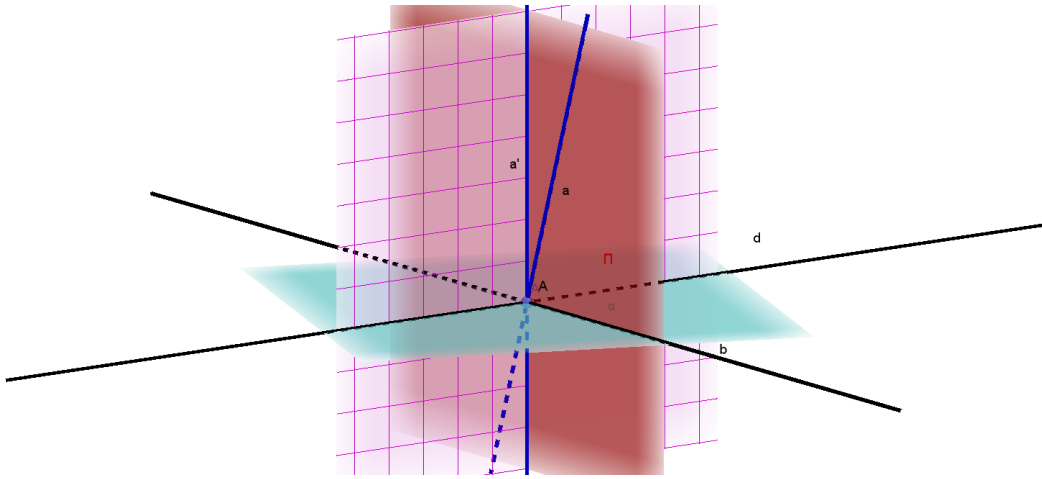
Proof. a) Presupunem $A \notin d$. Fie $a \cap \beta = \{A'\}$. Vom demonstra ca $A' \in d$, deci $a = AA' \subset \alpha$.



Presupunem prin reducere la absurd ca $A' \notin d$. Fie $A'A'' \perp d$, $A'' \in d$.

Deci $AA' \perp \beta$, $A'A'' \perp d$, $d \subset \beta$. Din teorema celor trei perpendiculare rezulta $AA'' \perp d$. Aplicand teorema anterioara obtinem ca $AA'' \perp \beta$. Dar $AA' \perp \beta$. Din unicitatea perpendicularei duse dintr-un punct pe un plan rezulta ca $A' = A''$. Deci $A' \in d$.

b) Daca $A \in d$, presupunem prin RA ca a nu e inclusa in α .



Fie π planul unic prin A , perpendicular pe d . Stim ca π e reuniunea tuturor dreptelor ce trec prin A si sunt perpendiculare pe d , deci $a \subset \pi$.

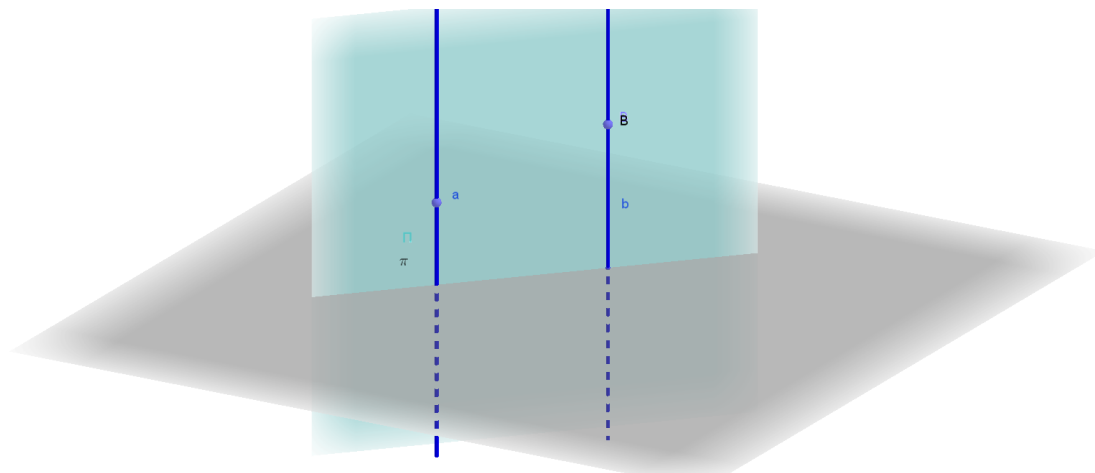
$A \in \pi \cap \alpha \Rightarrow \pi \cap \alpha = a'$ cu $A \in a'$. Din $d \perp \pi$ si $a' \subset \pi$ deducem ca $d \perp a'$.

Deci $\alpha \perp \beta$, $a' \subset \alpha$, $a' \perp d = \alpha \cap \beta$. Din prima propozitie rezulta ca $a' \perp \beta$. Deci exista doua perpendiculare, a si a' , duse in A pe β , contradictie. Rezulta $a \subset \alpha$.

□

Proposition 8. Doua drepte perpendiculare pe un acelasi plan sunt paralele.

Proof. Fie dreptele distincte a, b , ambele perpendiculare pe planul α .



Vom demonstra mai intai ca cele doua drepte sunt coplanare. Deoarece $a \neq b$, rezulta ca exista $B \in b \setminus a$. Fie π planul determinat de dreapta a si punctul B .

Deoarece $a \perp \alpha$ si $a \subset \pi$, rezulta ca $\pi \perp \alpha$.

Deci b e perpendiculara dusa din B pe α si $\pi \perp \alpha$, rezulta din propozitia a doua ca $b \subset \pi$. Dar $a \subset \pi$, deci a, b sunt coplanare.

Demonstram acum ca dreptele a si b sunt disjuncte. Presupunem prin RA ca $\exists P \in a \cap b$. Deci exista doua perpendiculare duse din P pe α , contradictie. Rezulta $a \cap b = \emptyset$.

□

2. PROIECTIA ORTOGONALA A UNUI SUBSPATIU AFIN AL LUI $\mathcal{E}^3$ PE UN ALT SUBSPATIU AFIN AL LUI $\mathcal{E}^3$

Daca X este un subspatiu afin euclidian in $\mathcal{E}^3$, in cazul nostru o dreapta sau un plan, proiectia ortogonală pe X este morfismul afin care duce orice punct P al lui E in P' , proiectia ortogonală a lui P pe X . Pentru a obtine pe P' se duce subspatiul normal prin P la X si se intersecteaza cu X .

Proiectia unui subspatiu afin Y pe X e formata din multimea proiectiilor tuturor punctelor lui Y pe X . Notam

$$Pr_X(Y) = \{Pr_X(P) \mid P \in Y\}.$$

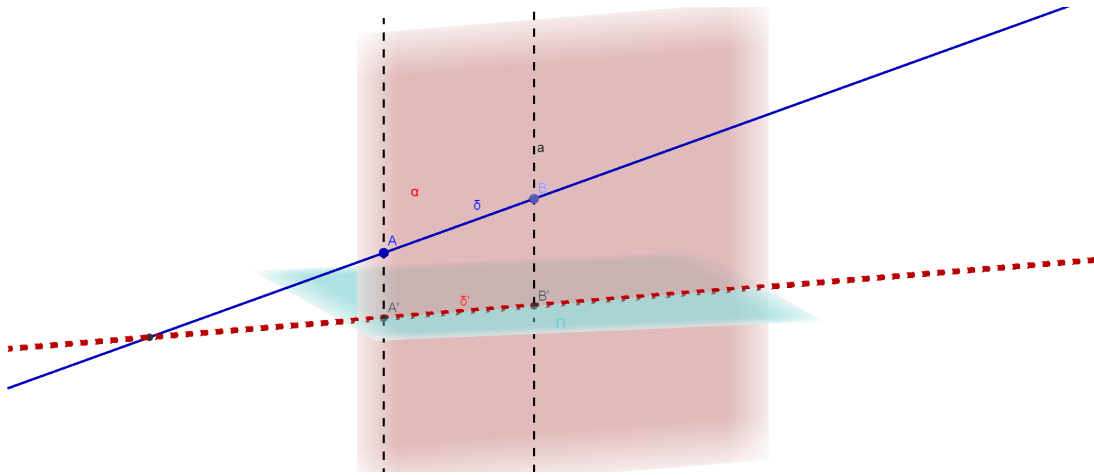
Stim din anul I ca proiectia este un morfism afin, deci duce subspatii affine in subspatii affine. Dar, nefiind o izometrie, proiectia lui Y pe X poate avea o dimensiune diferita de cea a lui Y .

a) Presupunem ca X este un plan π .

Sa vedem ce obtinem cand **proiectam o dreapta δ pe planul π** . Pentru a proiecta un punct al dreptei δ pe planul π , ducem prin punct normala la π si intersectia acesteia cu π este proiectia cautata. Evident, daca dreapta e inclusa in plan, proiectia ei pe plan este dreapta insasi.

Daca $\delta \perp \pi$ si $\delta \cap \pi = \{P\}$, atunci toate punctele lui δ se proiecteaza pe π in P , deci proiectia lui δ pe π este $\{P\}$.

Presupunem ca δ **nu este perpendiculara pe π** . Vom demonstra ca proiectia lui δ pe plan este o dreapta.



Fie planul α ce contine dreapta δ si este perpendicular pe π . Cum construim acest plan? Alegem $A \in \delta$ oarecare, $A \notin \pi$ il proiectam pe π in A' . Fie α planul determinat de dreapta δ si punctul exterior ei A' . Deoarece $AA' \perp \pi$ si $AA' \subset \alpha$ rezulta $\alpha \perp \pi$. Planele α si π sunt distincte, au punctul A' comun, deci ele se intersecteaza dupa o dreapta. Notam $\alpha \cap \pi = \delta'$.

Vom demonstra, prin dubla incluziune, ca $\delta' = Pr_{\pi}(\delta)$, unde $Pr_{\pi}(\delta) = \{M' \in \pi \mid \exists M \in \delta \text{ a.i. } M' = Pr_{\pi}(M)\}$ este proiectia ortogonala a lui δ pe π .

Sa motivam $\delta' \subset Pr_{\pi}(\delta)$.

Fie $B' \in \delta' = \alpha \cap \pi$ oarecare. In planul α ridicam perpendiculara a in B' pe δ' . Deoarece $\alpha \perp \pi$ rezulta ca $a \perp \pi$. Demonstram acum ca $a \cap \delta \neq \emptyset$. Daca presupunem prin reducere la absurd ca $a \cap \delta = \emptyset$, deoarece cele doua drepte sunt coplanare rezulta ca $a \parallel \delta$. Dar $a \perp \pi$, deci $\delta \perp \pi$, contradictie cu ipoteza. Fie $\{B\} = a \cap \delta \Rightarrow Pr_{\pi}(B) = B'$ si cum $B \in \delta$ deducem ca $B' \in Pr_{\pi}(\delta)$. Deoarece B' a fost ales arbitrar pe δ' , rezulta $\delta' \subset Pr_{\pi}(\delta)$.

Sa demonstram acum ca $Pr_{\pi}(\delta) \subset \delta'$. Fie $C' \in Pr_{\pi}(\delta) \Rightarrow \exists C \in \delta$ astfel incat $Pr_{\pi}(C) = C'$. Deci $CC' \perp \pi$, $C \in \alpha$, $\alpha \perp \pi$, $\alpha \cap \pi = \delta'$, deci $C' \in \delta'$.

Dar daca dorim sa proiectam un plan γ pe un plan π , $\pi \neq \gamma$?

Demonstrati ca daca $\gamma \perp \pi$, atunci proiectia ortogonala a lui γ pe π este dreapta de intersectia a celor doua plane, iar daca planele nu sunt perpendiculare, atunci proiectia ortogonala a lui γ pe π este intreg planul π .

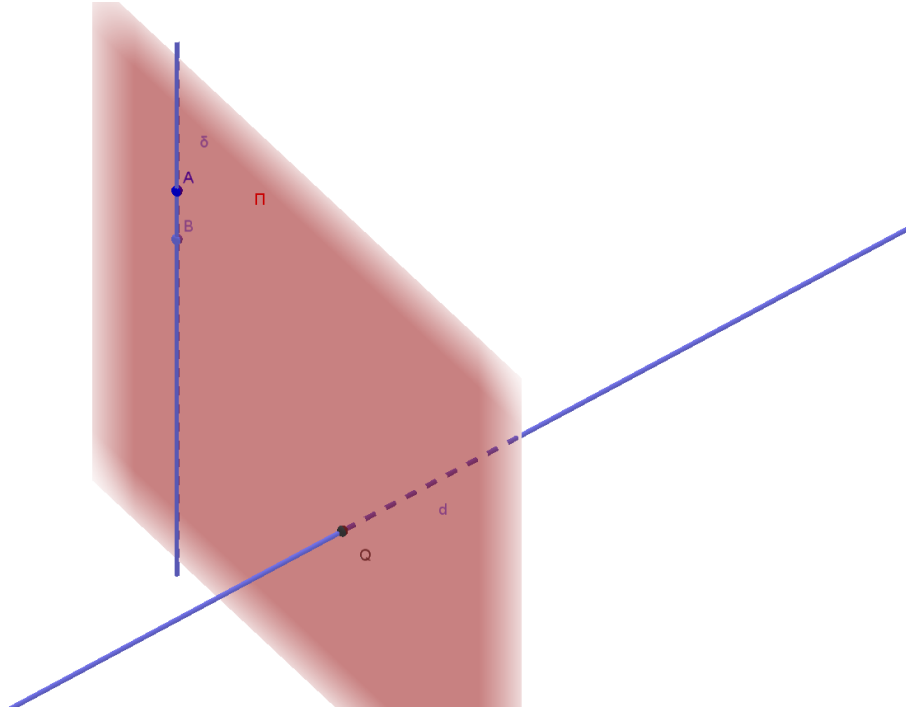
b) Sa presupunem ca X este o dreapta, pe care o renotam cu d . Sa vedem ce putem obtine cand proiectam o alta dreapta sau un plan pe d , in functie de pozitiile relative ale acestora.

Fie dreptele d, δ . Vrem sa proiectam δ pe d .

Daca **cele doua drepte sunt coplanare**, distingem doua situatii.

- Daca $\delta \perp d$, atunci $\delta \cap d = \{Q\}$ si toate punctele dreptei δ se proiecteaza pe d in Q , deci proiectia ortogonala a lui δ pe d este $\{Q\}$.
- Daca δ **nu este perpendiculara pe d** , evident proiectia lui δ pe d este d .

- Presupunem acum ca **dreptele d, δ sunt necoplanare**.
- Daca $\delta \perp d$, vom demonstra ca proiectia lui δ pe d este un punct.



Fie $A \in \delta$, π planul prin A , normal la d si $\pi \cap d = \{Q\}$ este proiectia lui A pe d . Fie $B \in \delta$, $B \neq A$. Fie π' planul prin B , normal la d . Acesta contine toate dreptele ce trec prin B si sunt perpendiculare pe d , deci $\delta \subset \pi' \Rightarrow A \in \pi'$. Deci π, π' sunt plane prin A , normale dreptei d . Dar exista un singur plan ce trece printr-un punct dat si e normal unei drepte date, deci $\pi = \pi'$. Deducem ca $\pi' \cap d = \pi \cap d = \{Q\}$, deci si B se proiecteaza pe d tot in Q . Analog orice punct al dreptei δ se proiecteaza in Q , deci $Pr_d \delta = \{Q\}$.

- Daca δ si d **nu sunt perpendiculare**, proiectia lui δ pe d este d .

Demonstrati ca daca un plan α este normal dreptei d , atunci proiectia ortogonală a lui α pe d este punctul de intersectie dintre α si d , iar daca α nu este normal dreptei d , atunci proiectia lui α pe d este dreapta d .

In sectiunea urmatoare vom folosi proiectia unei drepte pe un plan.

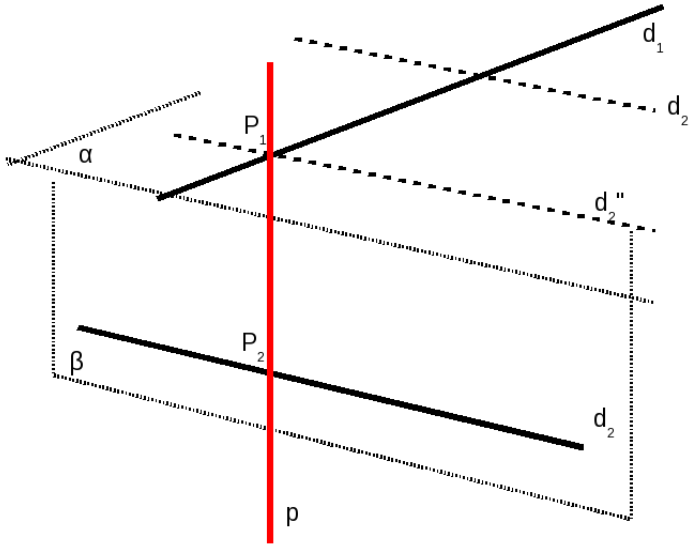
3. PERPENDICULARA COMUNA A DOUA DREPTE

Definition 9. Date doua drepte in $\mathcal{E}^3$, se numeste perpendiculara comuna acestor drepte orice dreapta care le intersecteaza pe amandoua si e perpendiculara pe ambele drepte.

Vom studia existenta perpendicularelor comune a doua drepte in functie de pozitia relativa a celor doua drepte. Incepem cu cazul dreptelor necoplanare.

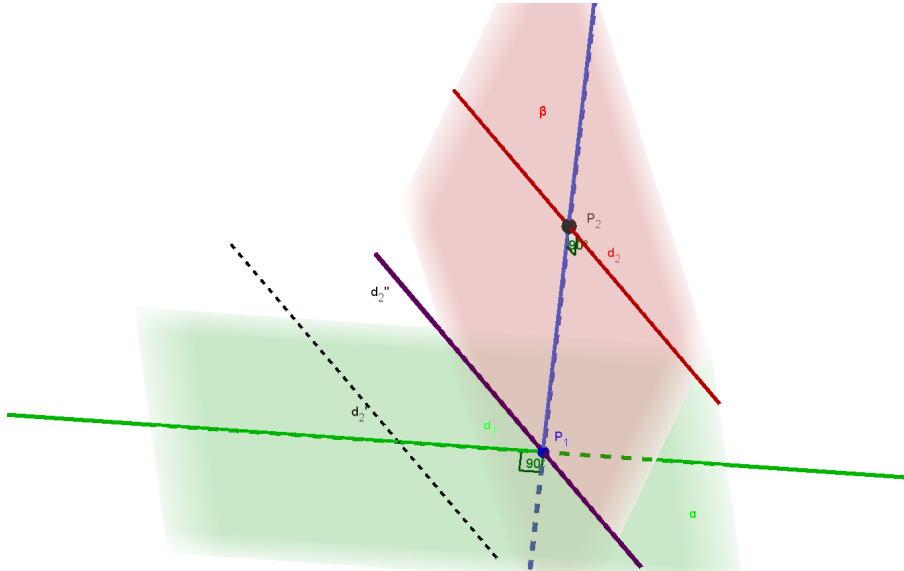
Theorem 10. Fie d_1 si d_2 doua drepte necoplanare din $\mathcal{E}^3$. Atunci exista o unica perpendiculara comuna celor doua drepte.

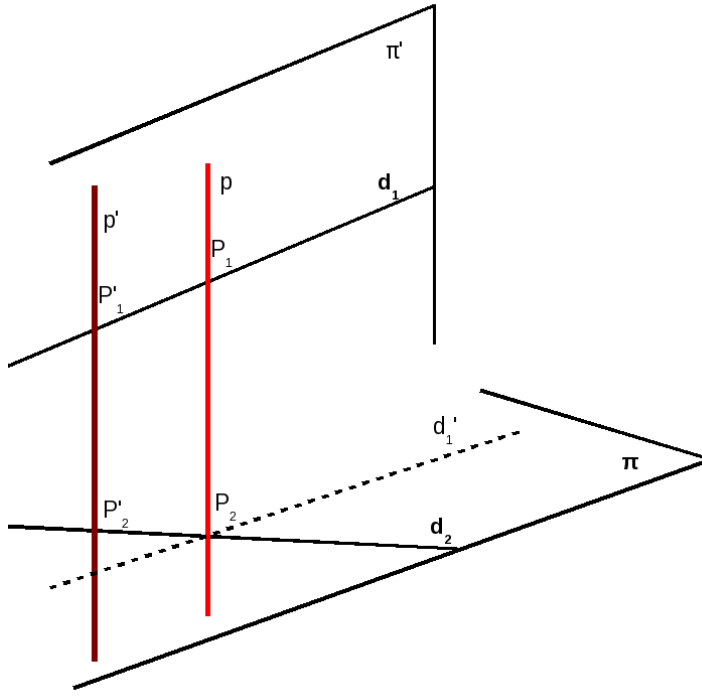
Proof. (1) **Existenta**



Construim planul α ce contine dreapta d_1 si e paralel cu dreapta d_2 . Putem face acest lucru ducand printr-un punct oarecare al dreptei d_1 paralela d_2' la d_2 si $\alpha = (d_1, d_2')$. Proiectam acum dreapta d_2 pe planul α . Fie β planul ce contine dreapta d_2 si e perpendicular pe α si $d_2'' = \alpha \cap \beta$. Deoarece $d_2' \parallel d_2$ si $d_2' \subset \alpha$ rezulta ca $d_2 \parallel \alpha \Rightarrow d_2'' \parallel d_2$. Fie $\{P_1\} = d_1 \cap d_2''$. Acest punct exista deoarece, daca $d_2'' \parallel d_1 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$, contradictie cu ipoteza ca dreptele sunt necoplanare.

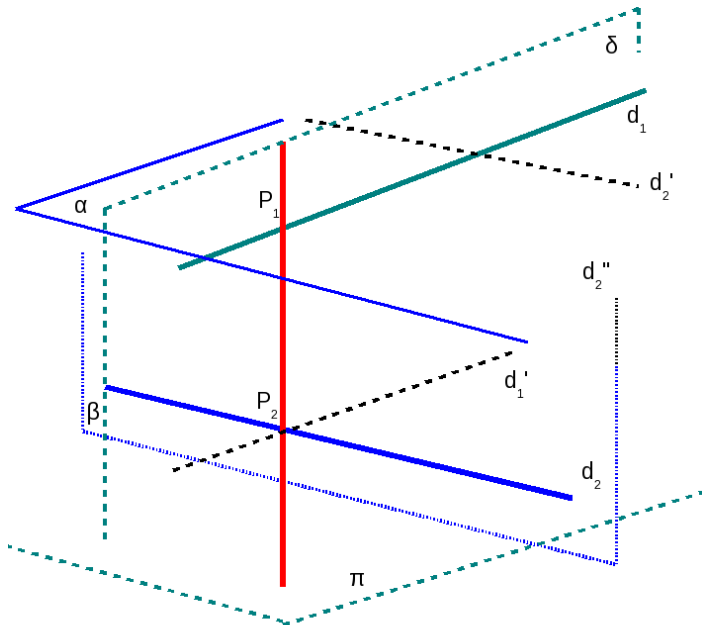
Fie p perpendiculara dusa pe planul α prin P_1 . Deoarece $\alpha \perp \beta$ si $P_1 \in \alpha \cap \beta$ rezulta ca $p \subset \beta$. Mai mult, $p \perp d_1$ si cum $p \perp d_2''$, deducem $p \perp d_2$. Deoarece p si d_2 sunt incluse in β , ele sunt coplanare. Deci $\exists \{P_2\} = p \cap d_2$.



(2) **Unicitatea**

Presupunem prin reducere la absurd ca exista doua perpendiculare p, p' comune dreptelor d_1 si d_2 . Fie $d_1 \cap p = \{P_1\}$, $d_1 \cap p' = \{P'_1\}$, $d_2 \cap p = \{P_2\}$, $d_2 \cap p' = \{P'_2\}$. Fie d'_1 paralela prin P_2 la d_1 si planul π determinat de d_2 si d'_1 (concurrente). Deoarece $p \perp d_1$, $p' \perp d_1 \Rightarrow p \perp d'_1$, $p' \perp d'_1$. Dar $p \perp d_2$, $p' \perp d_2$, deci p si p' sunt perpendiculare pe π . Rezulta $p \parallel p'$. Fie π' planul determinat de $p, p' \Rightarrow P_1, P'_1, P_2, P'_2 \in \pi'$, deci $d_1, d_2 \subset \pi'$, contradictie cu ipoteza ca dreptele d_1, d_2 sunt necoplanare.

□

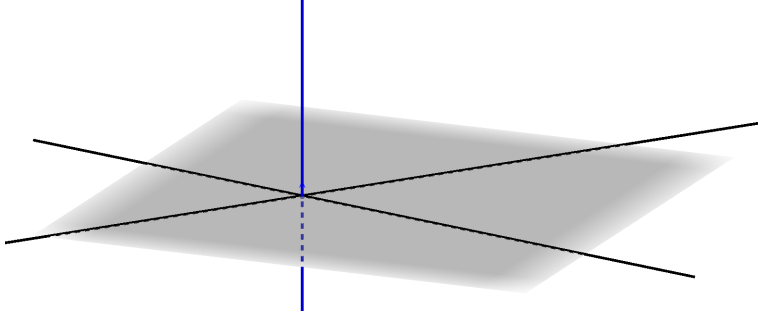


Remark 11. Reamintim ca am construit planul α ce contine dreapta d_1 si e paralel cu dreapta d_2 si planul β ce contine dreapta d_2 si e perpendicular pe α . De asemenea, am considerat planul π ce contine dreapta d_2 si e paralel cu dreapta d_1 . Fie planul δ determinat de perpendiculara comuna p si de dreapta d_1 . Evident acest plan e perpendicular pe π . Deci δ e planul ce contine dreapta d_1 si e perpendicular pe planul π .

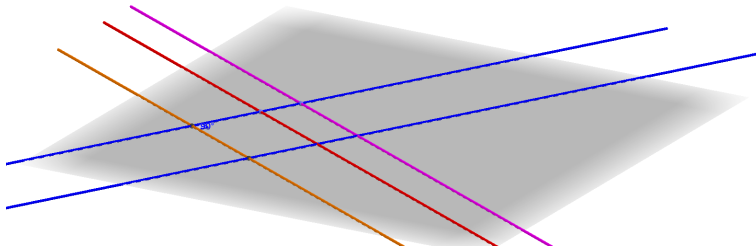
Perpendiculara comuna p este deci intersectia planelor β si δ .

In cazul in care dreptele sunt coplanare dar distincte, putem avea urmatoarele situatii.

Daca cele doua drepte sunt concurente, exista o singura perpendiculara comuna lor, si anume dreapta ce trece prin punctul lor de intersectie si e perpendiculara pe planul celor doua drepte.



Daca cele doua drepte sunt paralele, atunci orice dreapta inclusa in planul celor doua drepte, perpendiculara pe una dintre ele va fi perpendiculara si pe a doua si evident le va intersecta pe amandoua. Deci in acest caz avem o infinitate de perpendiculare comune, toate paralele intre ele.



4. APLICATII

- (1) Fie planul α si punctul exterior lui A .
 - (a) Daca α este perpendicular pe doua plane care se intersecteaza dupa dreapta d , aratati ca $d \perp \alpha$.
 - (b) Determinati intersectia tuturor planelor care trec prin A si sunt perpendiculate pe d .
- (2) Fie $VABCD$ o piramida patrulatera regulata cu varful V . Demonstrati ca $(VAC) \perp (ABC)$ si $(VAC) \perp (VBD)$. Ce puteti spune despre dreapta BD si planul (VAC) ?
- (3) Se considera piramida triunghiulara regulata $MATE$ cu varful M , astfel incat $MA \perp MT$ si $MT \perp ME$. Fie S mijlocul lui $[ET]$. Demonstrati ca $(MAS) \perp (TAE)$ si $(MTE) \perp (MAE)$.
- (4) Demonstrati ca proiectiile unui punct arbitrar din spatiu pe dreptele suport ale muchiilor laterale ale unei prisme sunt coplanare.
- (5) Aratati ca proiectia unui paralelogram pe un plan este un paralelogram sau un segment.
- (6) Am vazut ca proiectia ortogonala pe un plan duce puncte coliniare in puncte coliniare. Fie dreapta AB si planul α astfel incat AB nu e nici perpendiculara pe α , nici inclusa in α . Demonstrati ca:
 - (a) daca C e un punct a.i. $A - B - C$ si $A' = Pr_{\alpha}(A)$, $B' = Pr_{\alpha}(B)$, $C' = Pr_{\alpha}(C)$, atunci $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$;
 - (b) proiectia mijlocului lui $[AB]$ este mijlocul lui $[A'B']$.

- (7) Fie $\triangle A'B'C'$ proiectia triunghiului ABC pe planul α . Aratati ca centrul de greutate al triunghiului ABC se proiecteaza in centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Este valabil un rezultat analog pentru ortocentru?
- (8) Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determinati o perpendiculara comuna a perechilor de drepte:
- (a) AB, AA' ;
 - (b) $A'D', BB'$;
 - (c) $A'D', BC$;
 - (d) $A'C', BD$.