

CURS5: UNGHIURI SI DISTANTE IN $\mathcal{E}^3$

In acest curs vom discuta despre unghiul, respectiv distanta dintre doua subspatii afin euclidiene ale lui $\mathcal{E}^3$.

1. UNGHIUL A DOUA SUBSPATII AFINE EUCLIDIENE

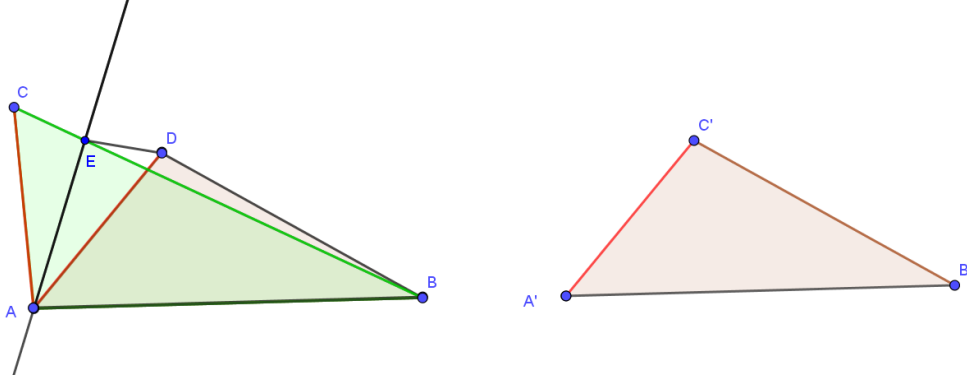
1.1. **Abordare elementara.** In cursurile anterioare am introdus deja notiunile de:

- unghi neorientat dintre doua drepte, pentru toate pozitiile relative ale celor doua drepte;
- unghiul plan al unui unghi diedru, unghiul a doua plane.

Ne mai ramane sa introducem notiunea de **unghi dintre o dreapta si un plan**.

Vom folosi o serie de teoreme din geometria plana care dau anumite inegalitati geometrice intre laturile/unghiurile triunghiurilor.

Proposition 1. *Se dau triunghiurile ABC si $A'B'C'$ astfel incat $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$ si $\hat{A} > \hat{A}'$. Atunci $BC > B'C'$.*



Proof.

Fie (AD) in semiplanul marginit de AB , care contine pe C , astfel incat $\widehat{DAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$ si $(AD) \equiv (A'C')$. Rezulta, din cazul de congruenta LLL ca $\triangle DAB \equiv \triangle C'A'B'$. Deducem ca $(BD) \equiv (B'C')$ si $(AC) \equiv (AD)$. Din ipoteza $\widehat{CAB} > \widehat{C'A'B'}$, deci $(AD \subset \text{Int}\widehat{CAB})$, rezulta ca si bisectoarea unghiului $\widehat{CAD}$ va fi inclusa in $\text{Int}\widehat{CAB}$, deci va intersecta (BC) intr-un punct E . Din LUL rezulta ca $\triangle CAE \equiv \triangle DAE$, deci $(CE) \equiv (ED)$. In $\triangle DEB$ aplicam inegalitatea intre lungimile laturilor acestuia: $BC = BE + EC = BE + ED > BD = B'C'$. □

Si reciproca acestei teoreme este adevarata

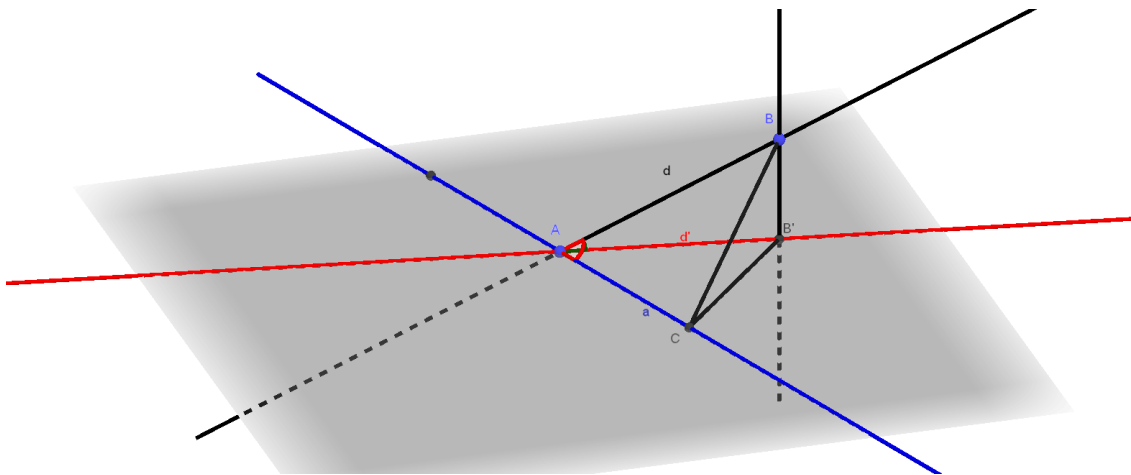
Proposition 2. *Se dau triunghiurile ABC si $A'B'C'$ astfel incat $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$ si $BC > B'C'$. Atunci $\hat{A} > \hat{A}'$.*

Proof. Presupunem prin reducere la absurd ca $\hat{A} \leq \hat{A}'$. Daca $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, deducem ca cele doua triunghiuri sunt congruente (LUL) deci $BC = B'C'$, contradictie cu ipoteza. Daca $\hat{A} < \hat{A}'$, din teorema anterioara rezulta ca $BC < B'C'$, din nou contrazicem ipoteza. Deci presupunerea facuta este falsa. □

Data o dreapta d si un plan α , cum am putea sa definim unghiul dintre d si α ? O idee ar fi sa folosim unghiurile dintre d si dreptele din planul α . Mai exact vom alege cel mai mic unghi format de d cu o dreapta din α .

Sa demonstram in teorema urmatoare ca multimea $\{m(\widehat{d, a}) \mid a \subset \alpha\}$ admite un minim si acesta este atins pentru $a = Pr_\alpha(d)$.

Theorem 3. *Fie dreapta d si planul α astfel incat $d \cap \alpha = \{A\}$. Fie d' proiectia ortogonala a dreptei d pe α si a o dreapta oarecare din α . Atunci unghiul dintre d si d' este mai mic sau egal cu unghiul dintre d si a .*



Proof.

Fie $B \in d \setminus \{A\}$ si $B' = Pr_{\alpha}(B) \Rightarrow d' = AB'$. Putem presupune, fara a restrange generalitatea, ca dreapta a trece prin A (altfel ducem paralela a' prin A la a si $\angle(d, a) = \angle(d, a')$).

Fie $C \in a$ astfel incat $\angle(BAC)$ sa fie ascutit sau drept si $(AC) \equiv (AB')$.

Deoarece $BB' \perp \alpha$ si $CB' \subset \alpha \Rightarrow \angle(BB'C)$ este unghi drept, deci in $\triangle BCB'$ (BC) este ipotenuza, deci are lungimea cea mai mare, adica $BC > BB'$.

In triunghiurile BAC si BAB' avem deci laturile congruente $(AB) \equiv (AB)$, $(AC) \equiv (AB')$ si $BC > BB'$. Aplicand teorema anterioara rezulta ca $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{BAB'})$. Deci $m(\widehat{d, a}) > m(\widehat{d, d'})$.

1

Datorita acestei teoreme putem introduce urmatoarea definitie.

Definition 4. Fie dreapta d si planul α . Unghiul neorientat dintre d si α este unghiul dintre d si proiectia sa ortogonală pe α .

Remark 5. Dacă $d \parallel \alpha \Rightarrow Pr_\alpha(d) = d' \parallel d$, deci spunem că $\angle(d, \alpha)$ este nul. Dacă $d \subset \alpha$ rezultă $Pr_\alpha(d) = d$ deci și în acest caz $\angle(d, \alpha)$ este nul.

1.2. Abordare analitica. Fie $\mathcal{E}^3 = \left(E, (\vec{E}, \langle, \rangle), \Phi\right)$ un spatiu afin euclidian trei dimensional, $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ un reper ortonormat pozitiv, o dreapta afina d si un subspatiu afin euclidian $Y \subset E$ de dimensiune $1 \leq p \leq 2$ (deci Y e o dreapta sau un plan). Presupunem ca atat dreapta afina d cat si subspatiul afin Y sunt neorientate.

Definition 6. Unghiul dintre dreapta d și subspațiul afin euclidian Y este unghiul neorientat dintre un vector director arbitrar al dreptei d și subspațiul liniar euclidian $\vec{Y}$. Reamintim că dacă $\bar{a} \in \vec{d}$, atunci unghiul dintre $\bar{a}$ și $\vec{Y}$ este unghiul dintre $\bar{a}$ și proiecția ortogonală a lui $\bar{a}$ pe $\vec{Y}$. Fie $\theta \in [0, \pi]$ acest unghi. Rezultă că

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{a}, Pr_{\vec{Y}} \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\| \|Pr_{\vec{Y}} \bar{a}\|} = \frac{\langle \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{a}_1\|} = \frac{\|\bar{a}_1\|}{\|\bar{a}\|} \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Am notat cu $Pr_{\vec{Y}}\vec{a} = \vec{a}_1$ proiectia ortogonală a vectorului $\vec{a}$ pe subspatiul liniar $\vec{Y}$ si cu $\vec{a}_2$ proiectia ortogonală a lui $\vec{a}$ pe suplementul ortogonal al lui $\vec{Y}$ si am folosit ca $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0$.

Am obtinut ca unghiul dintre o dreapta de vector director $\bar{a} \neq \bar{0}$ si un subspatiu a. e. Y se calculeaza folosind formula

$$(1.1) \quad \cos \theta = \frac{\|Pr_{\vec{Y}} \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}.$$

Definitia anterioara este corecta deoarece ea nu depinde de alegerea vectorului director al lui d . $Pr_{\vec{Y}} : \vec{E} \rightarrow \vec{Y}$ este o aplicatie liniara si $\|\cdot\| : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicatie pozitiv omogena, deci pentru orice alt $\bar{b} \in \vec{d}$, $\bar{b} = \lambda \bar{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ se obtine $\frac{\|Pr_{\vec{Y}} \bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{\|Pr_{\vec{Y}} (\lambda \bar{a})\|}{\|\lambda \bar{a}\|} = \frac{|\lambda| \|Pr_{\vec{Y}} \bar{a}\|}{|\lambda| \|\bar{a}\|} = \frac{\|Pr_{\vec{Y}} \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}$.

Proposition 7. *Unghiul dintre $\bar{a} \neq \bar{0}$ si subspatiul linear euclidian $\vec{Y}$ este minimul multimii*

$$\Omega := \left\{ \widehat{(\bar{a}, \bar{b})} \mid \bar{b} \in \vec{Y}, \bar{b} \neq \bar{0} \right\}.$$

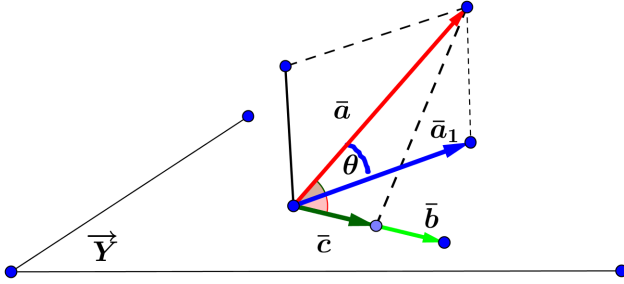
Proof. Fie $\bar{b} \in \vec{Y}$ nenul arbitrar. Notam cu $\theta = \angle(\bar{a}, \vec{Y}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si $\theta_b = \angle(\bar{a}, \bar{b}) \in [0, \pi]$, adica numarul unic determinat de conditia $\cos \theta_b = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|}$. Daca $\theta_b \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, evident $\theta \leq \theta_b$. Presupunem in continuare ca $\theta_b \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vom demonstra ca $\cos \theta \geq \cos \theta_b$ (functia cos este strict descrescatoare pe $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Fie $\bar{a}_1 = Pr_{\vec{Y}} \bar{a} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\|\bar{a}_1\|}{\|\bar{a}\|}$. Notam cu $\bar{a}_2 = \bar{a} - \bar{a}_1 \in (\vec{Y})^\perp$. Fie $\bar{c} = Pr_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|^2} \bar{b} \Rightarrow \cos \theta_b = \frac{\|\bar{c}\|}{\|\bar{a}\|}$. Ramane sa demonstram ca $\|\bar{a}_1\| \geq \|\bar{c}\|$.

Observam ca $\bar{a} - \bar{c} \in [\bar{b}]^\perp \Rightarrow \bar{a} - \bar{c} \perp \bar{b}$. Mai mult, $\bar{a}_1 - \bar{c} \perp \bar{c}$. Intr-adevar $\langle \bar{a}_1 - \bar{c}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a} - \bar{a}_2 - \bar{c}, \bar{c} \rangle = \underbrace{\langle \bar{a} - \bar{c}, \bar{c} \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \bar{a}_2, \bar{c} \rangle}_{=0} = 0$. Am folosit $\bar{a} - \bar{c} \in [\bar{b}]^\perp$, $\bar{c} \in [\bar{b}]$, $\bar{a}_2 \in (\vec{Y})^\perp$ si $\bar{c} \in \vec{Y}$.

In final, rezulta $\|\bar{a}_1\|^2 = \|\bar{a}_1 - \bar{c} + \bar{c}\|^2 = \|\bar{a}_1 - \bar{c}\|^2 + \|\bar{c}\|^2 + 2 \underbrace{\langle \bar{a}_1 - \bar{c}, \bar{c} \rangle}_{=0} \geq \|\bar{c}\|^2$.



□

Unghiul a doua drepte afine. Aplicam rezultatele anterioare pentru cazul particular in care Y este tot o dreapta afina in $\mathcal{E}^3$.

Fie d_1 si d_2 doua drepte afine neorientate in $\mathcal{E}^n$. Unghiul dreptelor neorientate d_1 si d_2 este numarul $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unic determinat de formula

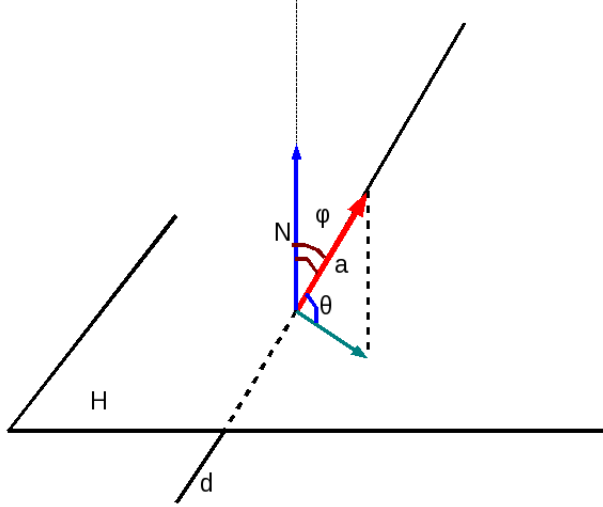
$$(1.2) \quad \cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \|\bar{a}_2\|},$$

unde $\bar{a}_1 \in \vec{d}_1$, $\bar{a}_2 \in \vec{d}_2$ sunt doi vectori directori nenuli arbitrari ai celor doua drepte.

Intr-adevar, inlocuind $Pr_{\bar{a}_2}(\bar{a}_1) = \frac{\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle}{\|\bar{a}_2\|^2} \bar{a}_2$ in formula (1.1), rezulta formula (1.2).

Daca dreptele sunt paralele sau coincid, unghiul lor este nul.

Unghiul unei drepte cu un (hiper)plan. Fie dreapta $d = A + [\bar{a}]$, $\bar{a} \neq 0$ si planul $H = B + \vec{H}$ de directie normala $(\vec{H})^\perp = [\bar{N}]$, ambele neorientate.



Observam ca unghiul θ dintre dreapta d si planul H poate fi exprimat in functie de unghiul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dintre d si normala la plan in orice punct al sau: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Putem calcula acest unghi folosind formula

$$\sin \theta = \frac{|\langle \bar{a}, \bar{N} \rangle|}{\|\bar{a}\| \|\bar{N}\|}$$

si astfel nu mai determinam proiectia lui $\bar{a}$ pe $\vec{H}$.

daca dreapta este paralela cu planul sau inclusa in plan, obtinem un unghi nul.

Unghiul a doua plane.

Definition 8. Unghiul a doua plane este unghiul dintre normalele la cele doua hiperplane.

Deci daca H_1 e planul de directie normala $[\bar{N}_1]$ si H_2 e planul de directie normala $[\bar{N}_2]$, atunci unghiul dintre H_1 si H_2 este unghiul dintre normalele la cele doua plane, duse dintr-un punct arbitrar. Deci este numarul $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definit de

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{N}_1, \bar{N}_2 \rangle|}{\|\bar{N}_1\| \|\bar{N}_2\|}.$$

Daca planele sunt paralele sau coincid, unghiul lor este nul.

Exemple. Fie dreptele $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$, $d_2 : \begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = t + 2, \\ z = 7, \end{cases}$ si planele $\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0$, $\pi_2 : \alpha x + y - z = 0$.

$\alpha x + y - z = 0$.

- (1) Calculati unghiurile neorientate dintre d_1 si d_2 , dintre d_1 si π_1 .
- (2) Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat unghiul dintre d_2 si π_2 sa aiba masura de 45° .
- (3) Determinati $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel incat unghiul dintre π_1 si π_2 sa aiba masura de 30° .

1. Fie $\bar{a}_1 = (2, 1, 3) \in \vec{d}_1$, $\bar{a}_2 = (-2, 1, 0) \in \vec{d}_2$, $\bar{N}_1 = (2, 1, -1) \perp \vec{\pi}_1$, $\bar{N}_2 = (\alpha, 1, -1) \perp \vec{\pi}_2$.
Notam cu θ unghiul dintre d_1 si d_2 si cu φ unghiul dintre d_1 si π_1 .

Atunci $\cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \|\bar{a}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot 5}$ si $\sin \varphi = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{N}_1 \rangle|}{\|\bar{a}_1\| \|\bar{N}_1\|} = \frac{2}{\sqrt{14} \cdot 6}$.

2. Impunem $\sin 45^\circ = \frac{|\langle \bar{a}_2, \bar{N}_2 \rangle|}{\|\bar{a}_2\| \|\bar{N}_2\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1-2\alpha|}{\sqrt{5(2+\alpha^2)}}$. Obtinem $\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{130}}{11}$.
3. Din $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|2-2\alpha|}{\sqrt{6(2+\alpha^2)}}$ rezulta $\alpha = -4 \pm \sqrt{6}$.

2. DISTANTA DINTRE DOUA SUBSPATII AFINE EUCLIDIENE

2.1. Abordare elementara. Unele sisteme axiomatice introduc functia distanta ca notiune primara. Este vorba despre o functie $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, ($\mathcal{S}$ fiind spatiul, privit ca o multime de puncte), ale carei proprietati sunt date de axiomele:

(D1) $d(A, B) \geq 0 \forall A, B \in \mathcal{S}; d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(D2) $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in \mathcal{S}$.

Folosind alte rezultate legate de axiomele de ordine cat si cele de congruenta, se mai poate demonstra ca functia distanta satisface si inegalitatea triunghiulara:

(IT) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in \mathcal{S}; d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Leftrightarrow A - C - B$ (C se afla intre A si B).

Pornind de la distanta intre doua puncte oarecare, se defineste distanta dintre anumite subspatii affine euclidiene, si anume distanta de la un punct la o dreapta, respectiv un plan, distanta dintre doua drepte, distanta de la o dreapta la un plan.

Daca notam generic cu E_1, E_2 doua subspatii a.e. din multimea celor enumerate anterior, prin definitie, avem

$$d(E_1, E_2) = \min \{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in E_1 \text{ si } P_2 \in E_2\}.$$

Se poate demonstra ca multimea $\Omega := \{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in E_1 \text{ si } P_2 \in E_2\}$ admite un minim, deci definitia anterioara este corecta.

Din aceasta definitie, deducem imediat ca in cazul in care cele doua subspatii au puncte comune, atunci distanta dintre ele este zero.

In cazul in care $E_1 = \{A\}$ si E_2 este o dreapta sau un plan, se poate demonstra, utilizand teorema care spune ca intr-un triunghi, unghiului de masura mai mare i se opune o latura de lungime mai mare, ori teorema lui Pitagora, ca acest minim este $d(A, A')$, unde A' este proiectia ortogonala a lui A pe E_2 .

Intr-adevar, daca $P \in E_2$ arbitrar, atunci $\triangle AA'P$ este dreptunghic in A' si deci $d(A, P) \geq d(A, A')$, egalitatea avand loc evident pentru $P = A'$.

Elevii sunt invatati ca, atunci cand doresc sa calculeze **distanta de la un punct la o dreapta δ , respectiv un plan α** , trebuie sa proiecteze punctul pe dreapta/plan, si $d(A, \delta) = d(A, A'), A' = Pr_\delta(A)$, respectiv $d(A, \alpha) = d(A, A''), A'' = Pr_\alpha(A)$.

Insistam asupra faptului ca aceste distante sunt numere pozitive, si ele difera de perpendiculara dusa din punct pe dreapta/plan.

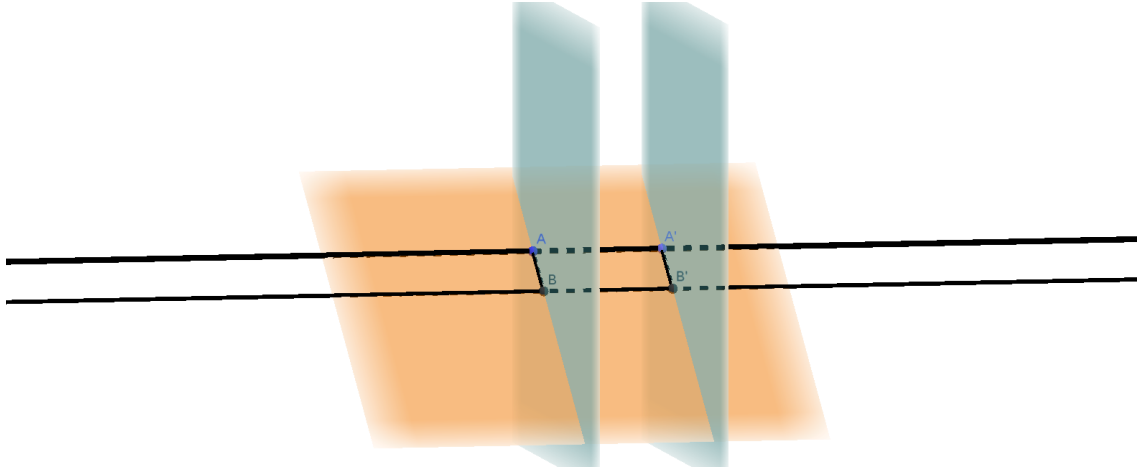
Distanta intre doua drepte concurente este zero, deci ne intereseaza doar cazul dreptelor paralele sau necoplanare.

Fie **dreptele δ_1 si δ_2 paralele**.

Folosind un rationament similar celui precedent, se demonstreaza ca minimul multimii $\{d(A, B) \mid A \in \delta_1, B \in \delta_2\}$ e atins pentru $A \in \delta_1$ fixat arbitrar si $B = Pr_{\delta_2}(A)$.

Deci pentru a afla distanta intre doua drepte paralele, se alege un punct oarecare pe una dintre drepte si se determina distanta de la acest punct la cealalta dreapta:

$$\delta_1 \parallel \delta_2 \Rightarrow d(\delta_1, \delta_2) = d(A, \delta_2), A \in \delta_1.$$



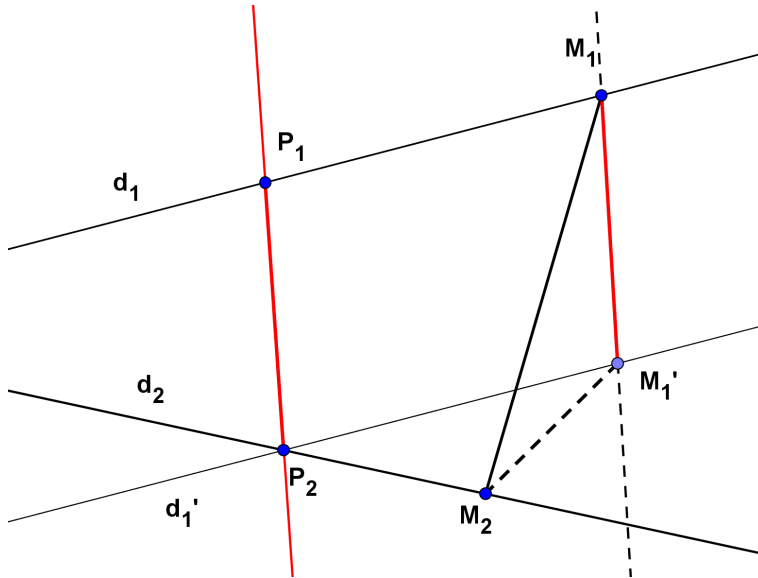
De ce obținem același rezultat indiferent de alegerea lui A pe una din drepte?

Fie $A, A' \in \delta_1$. Pentru a le proiecta pe δ_2 , considerăm planele π_A și $\pi_{A'}$ care trec prin A , respectiv A' și sunt perpendiculare pe δ_2 . Intersecțiile acestor plane cu δ_2 , notate prin B , respectiv B' , sunt proiecțiile lui A, A' pe δ_2 .

Planele $\pi_A, \pi_{A'}$ sunt perpendiculare pe δ_2 , deci sunt paralele. Atunci ele taie planul determinat de δ_1 și δ_2 după două drepte paralele: $AB \parallel A'B' \Leftrightarrow ABB'A'$ este paralelogram, deci $(AB) \equiv (A'B') \Leftrightarrow d(A, \delta_2) = d(A', \delta_2)$.

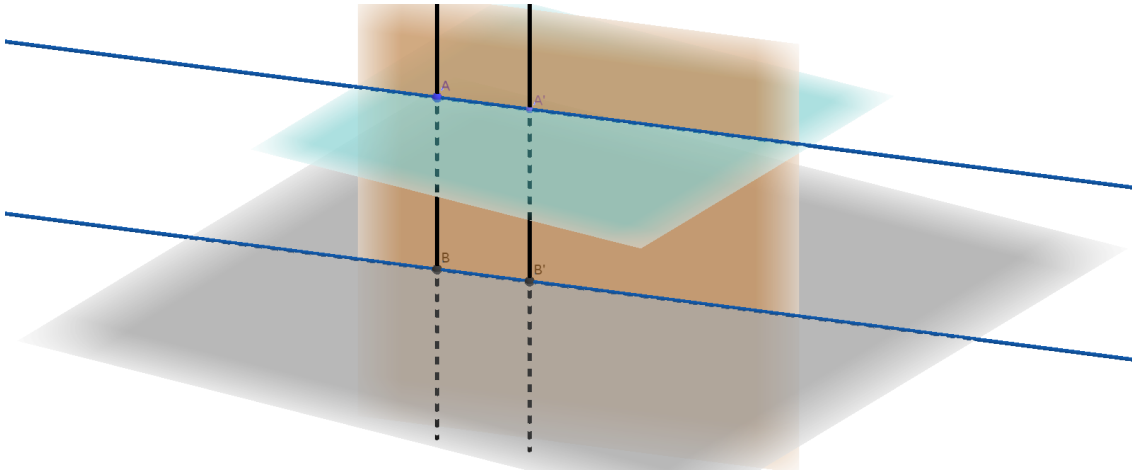
Dacă δ_1 și δ_2 sunt **drepte necoplanare**, atunci $d(\delta_1, \delta_2) = d(P_1, P_2)$, unde P_1P_2 este perpendiculara comună celor două drepte, $P_1 \in \delta_1, P_2 \in \delta_2$.

Este suficient să demonstrăm că $d(M_1, M_2) \geq d(P_1, P_2), \forall M_1 \in d_1, \forall M_2 \in d_2$.



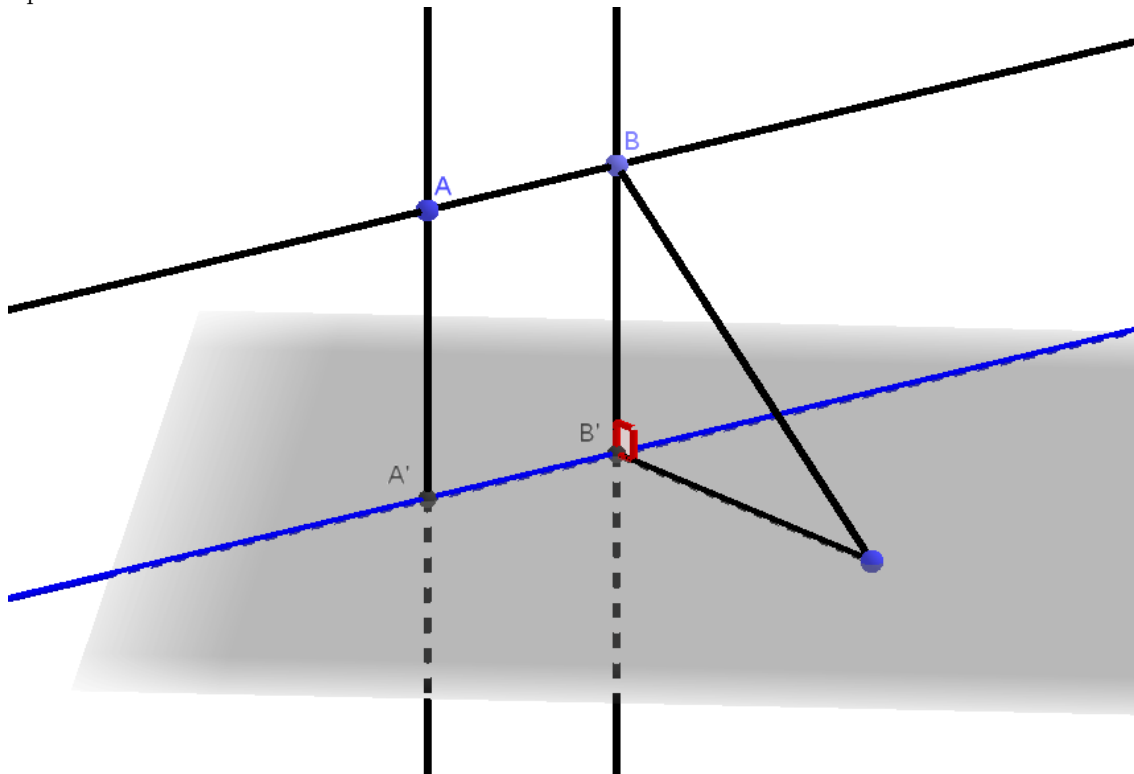
Fie $d'_1 = P_2 + [\vec{a}_1]$ paralela prin P_2 la d_1 , $\alpha = (d_2, d'_1)$. Rezultă că $P_1P_2 \perp \alpha$. În planul (d_1, d'_1) considerăm M'_1 piciorul normalei din M_1 pe d'_1 . Observăm că figura $P_1P_2M'_1M_1$ este un dreptunghi. Rezultă că $M_1M'_1 \perp \alpha$. Deci $\triangle M_1M'_1M_2$ este dreptunghic în M'_1 , deci $d(M_1, M_2) \geq d(M_1, M'_1) = d(P_1, P_2)$.

Distanța dintre două plane paralele coincide cu distanța de la un punct oarecare al unuia dintre plane la celălalt plan. Motivati de ce!



Ne mai ramane sa determinam **distanța de la o dreaptă la un plan**. Dacă dreapta taie planul într-un punct sau este inclusă în plan, atunci această distanță este zero.

Să presupunem că $\delta \parallel \alpha$. Atunci minimul distanțelor de la punctele dreptei la punctele planului este $d(A, A')$, unde $A \in \delta$ e ales arbitrar și A' este proiecția lui A pe α . Motivati de ce rezultatul nu depinde de alegerea lui A pe dreapta δ !



Incheiem aceasta secțiune cu observația că proiecția ortogonală pe un plan nu este izometrie, ea nu păstrează nici distanța dintre puncte, nici aria unei suprafețe.

Theorem 9. Fie planul α și punctele A, B, C necoliniare, astfel încât (ABC) nu e perpendicular pe α . Notăm cu A', B', C' proiecțiile lor pe α .

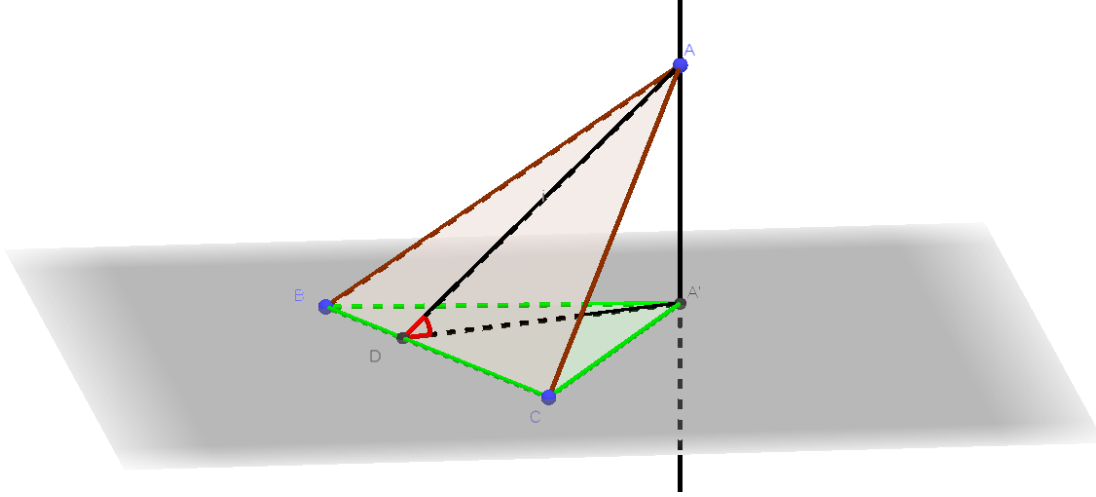
a) $d(A', B') = d(A, B) \cos \varphi$, unde φ e măsura unghiului dintre AB și α .

b) $A_{[A'B'C']} = A_{[ABC]} \cos \phi$, unde ϕ este măsura unghiului dintre planele (ABC) și α .

Proof. Vom demonstra doar b). Aici am notat cu $A_{[ABC]}$ aria suprafeței triunghiulare ABC . Distingem mai multe cazuri.

Caz I Dacă $(ABC) \parallel \alpha$ sau $(ABC) = \alpha$, atunci $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$, deci au aceeași arie. Cum unghiul celor două plane este nul, rezultă că relația e satisfăcută.

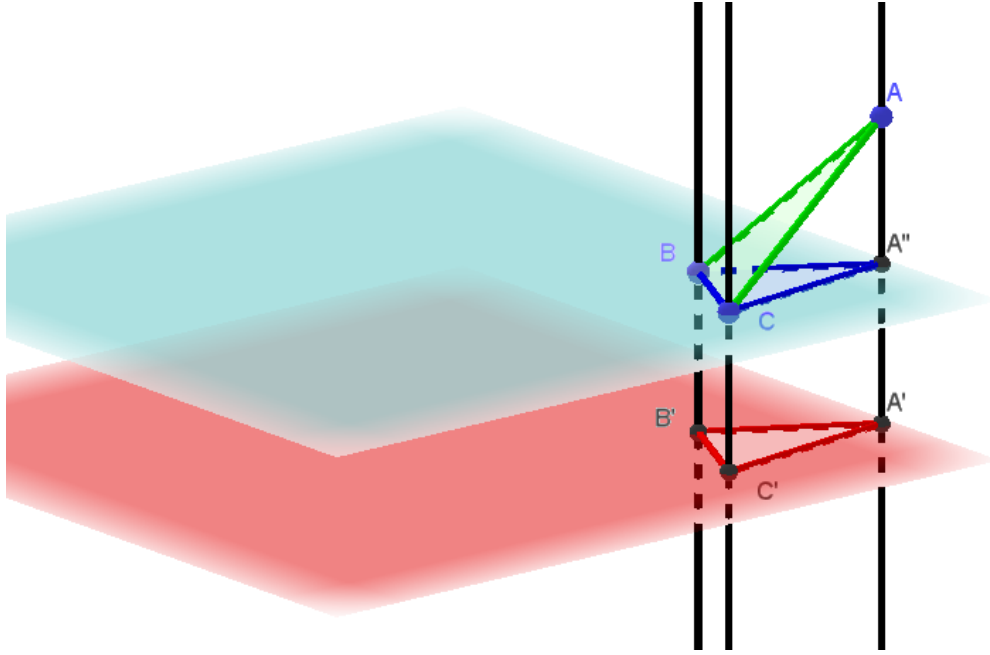
Caz II Presupunem ca una din laturile triunghiului (ABC) este inclusa in α , de exemplu $BC \subset \alpha$ si $A \notin \alpha$.



Fie $A'D \perp BC$, $D \in BC$. Deoarece $AA' \perp \alpha$, $BC \subset \alpha$, $A'D \perp BC$, aplicand teorema celor trei perpendiculare, rezulta ca $AD \perp BC$, deci $m(\angle ADA') = \phi$.

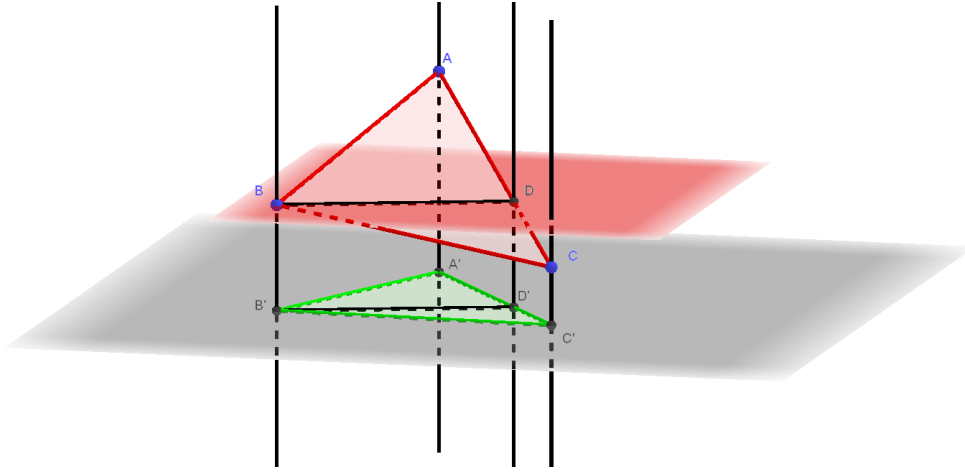
$\triangle ADA'$ este dreptunghic in $A' \Rightarrow \cos \phi = \frac{A'D}{AD} \Rightarrow A'D = AD \cos \phi$. Scriind aria celor doua suprafete triunghiulare, folosind baza (BC) obtinem relatia $A_{[A'BC]} = A_{[ABC]} \cos \phi$.

Caz III Presupunem $BC \parallel \alpha$.



Fie β planul ce contine pe BC si e paralel cu α si $AA' \cap \beta = \{A''\}$. Observam ca unghiul dintre (ABC) si α coincide cu unghiul dintre (ABC) si β . Aplicand I avem $A_{[BCA'']} = A_{[B'C'A']}$, iar din II avem $A_{[BCA'']} = A_{[ABC]} \cos \phi$. Deci $A_{[A'B'C']} = A_{[ABC]} \cos \phi$.

Caz IV Niciuna dintre laturile triunghiului nu este paralela cu α . Presupunem $CC' < BB' < AA'$. Fie β planul prin B , paralel cu α si $\beta \cap BC = \{D\}$.



Atunci triunghiurile BCD si BDA se incadreaza in cazul precedent, deoarece $AD \parallel \alpha$, fiind inclusa in β si $\beta \parallel \alpha$. Fie $D' = Pr_{\alpha}(D)$. deoarece $A - D - C$ rezulta $A' - D' - C'$. $A_{[A'B'C']} = A_{[A'B'D']} + A_{[C'B'D']} = A_{[ABD]} \cos \phi + A_{[CBD]} \cos \phi = A_{[ABC]} \cos \phi$.

□

2.2. Abordare analitica. In aceasta sectiune vom da modul de calcul al distantelor precizate anterior, folosind calculul vectorial si ecuatiile subspatiilor afine euclidiene. Demonstratiile le gasiti in cursul de anul I, pentru subspatii a.e. de dimensiune arbitrara, aici reluam o mica parte dintre ele, doar pentru cazul particular $\mathcal{E}^3$.

Definition 10. Fie $\mathcal{E} = (E, \vec{E}, \Phi)$ un spatiu afin euclidian. Definim aplicatia

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, d(A, B) = \|\vec{AB}\|, \forall A, B \in E$$

si o numim **functia distanta** pe E .

Putem demonstra ca d verifica proprietatile obisnuite ale unei metrici:

Proposition 11. (E, d) este un **spatiu metric**, adica

- (1) $d(A, B) \geq 0 \forall A, B \in E; d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B;$
- (2) $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in E;$
- (3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in E;$ egalitatea are loc daca si numai daca $\exists \alpha \in [0, 1]$ astfel incat $C = \alpha A + (1 - \alpha)B$.

Daca $C = \alpha A + (1 - \alpha)B$ cu $\alpha \in (0, 1) \Leftrightarrow d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ si $C \neq A, C \neq B$, spunem ca punctul C este situat intre A si B si notam $A - C - B$.

Definition 12. Fie $\mathcal{E}^3 = (E, (\vec{E}, <, >), \Phi)$ un spatiu afin euclidian 3-dimensional si $\mathcal{E}_1 = (E_1, \vec{E}_1, \Phi_{|E_1 \times E_1})$, $\mathcal{E}_2 = (E_2, \vec{E}_2, \Phi_{|E_2 \times E_2})$ doua subspatii afine nevide ale sale. Distaanta dintre $\mathcal{E}_1$ si $\mathcal{E}_2$ este numarul real pozitiv definit prin

$$d(E_1, E_2) = \min \{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in E_1 \text{ si } P_2 \in E_2\}.$$

Am vazut ca in cazul in care $E_1 = \{A\}$ si E_2 este o dreapta sau un plan, acest minim este $d(A, A')$, unde A' este proiectia ortogonala a lui A pe E_2 .

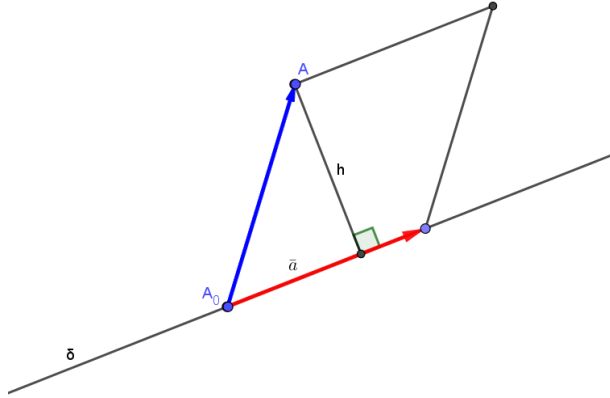
Folosind aceasta observatie, obtinem o formula usor de memorat pentru **distaanta de la un punct la un plan**.

Proposition 13. Fie A un punct de coordonate $A(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ si π un plan de ecuatie

$$H : a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 = 0, \sum_{i=1}^3 (a_i)^2 > 0. \text{ Atunci}$$

$$d(A, \pi) = \frac{|a_1 x_0^1 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

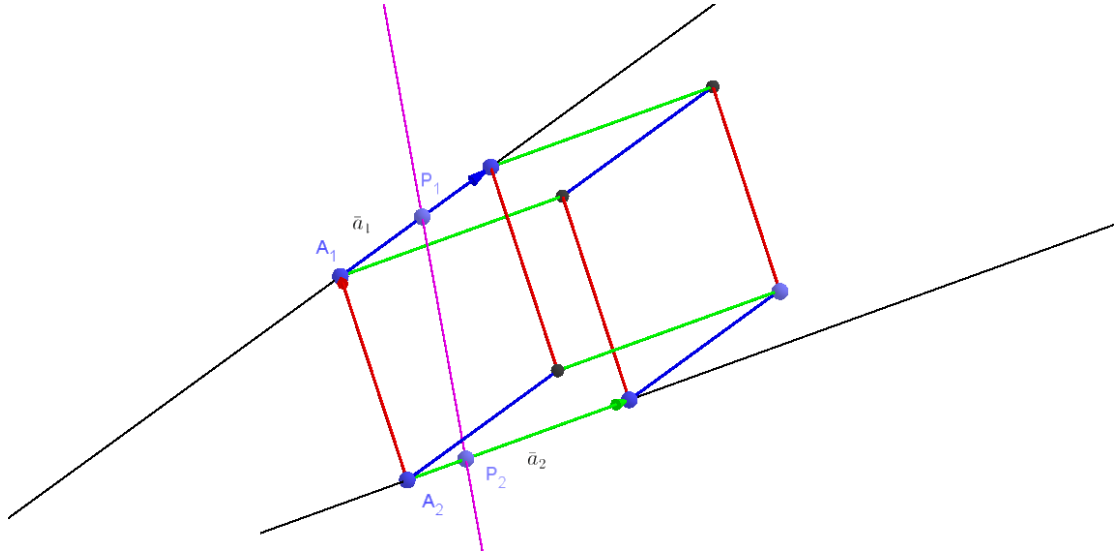
Pentru a calcula **distanța de la un punct A la o dreaptă $\delta = A_0 + [\bar{a}]$** , $\bar{a} \neq \bar{0}$, formăm paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{A_0A}$ și $\bar{a}$ aplicati în A_0 și exprimăm aria suprafeței paralelogramului în două moduri, o dată ca $\|\overrightarrow{AA_0} \times \bar{a}\|$ și alta dată ca lungimea înălțimii înmulțită cu lungimea bazei.



Obținem

$$d(A, \delta) = \frac{\|\overrightarrow{A_0A} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}.$$

Fie dreptele necoplanare $\delta_1 = A_1 + [\bar{a}_1]$ și $\delta_2 = A_2 + [\bar{a}_2]$.



Pentru a calcula distanța dintre cele două drepte necoplanare, construim paralelipipedul pe vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ aplicati în același punct. Volumul acestuia este egal cu $|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right)|$ dar și cu lungimea înălțimii înmulțită cu aria bazei. Lungimea înălțimii coincide cu $d(P_1, P_2) = d(\delta_1, \delta_2)$, iar baza e paralelogramul construit pe $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$. Se obține

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \right) \right|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|}.$$

Calculul distanței între două drepte paralele se reduce la calculul distanței de la un punct la o dreaptă, iar cel al distanței între două plane paralele, ori între o dreaptă și un plan, dreapta fiind paralela cu planul, se reduce la cel al distanței de la un punct la un plan. Deci nu mai avem nevoie de formule suplimentare.

Exemple Fie dreptele $\delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$, $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$, $d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$, $\delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, $\delta_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, planele $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$, $\pi_1 : x + 2y - z + 1 = 0$, $\pi_2 : 2x + 4y - 2z + 3 = 0$, punctele $A(1, 2, 3)$ si $B(2, -1, 6)$.

Calculati

- a) $d(A, \delta)$ si $d(B, \pi)$;
- b) $d(d_1, d_2)$ si $d(\delta_1, \delta_2)$;
- c) $d(\pi_1, \pi_2)$.

a) Fie $A_0(1, 0, -1) \in \delta$, $\bar{a} = (2, 1, 3) \Rightarrow d(A, \delta) = d(A, \delta) = \frac{\|\overrightarrow{AA_0} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|} = \sqrt{\frac{52}{7}}$.

$d(B, \pi) = \frac{|4+1+18+1|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{24}{\sqrt{14}}$.

b) Verificam mai intai ca $d_1 \parallel d_2$. Alegem $O \in d_1$ si $d(d_1, d_2) = d(O, d_2) = \frac{\|\overrightarrow{OA} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}$, unde $\bar{a} = (1, -2, 4)$.

Dreptele δ_1, δ_2 sunt necoplanare. Fie $A_1(0, 1, 0) \in \delta_1$, $\bar{a}_1 = (1, 2, 1) \in \delta_1$, $A_2(-1, 0, 0) \in \delta_2$, $\bar{a}_2 = (-1, 2, 1) \in \delta_2$.

Atunci $d(d_1, d_2) = \frac{\|\overrightarrow{A_1A_2} \times \bar{a}_1, \bar{a}_2\|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Cele doua plane sunt paralele. Alegem $P(0, 0, 1) \in \pi_1$ si $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

3. APLICATII

- (1) Fie DE o dreapta perpendiculara pe planul patrutului $ABCD$. Stiind ca $d(B, E) = l$ si masura unghiului format de BE cu (ABC) este φ , sa se determine $d(A, E)$ si masura unghiului dintre AE si (ABC) .
- (2) Dreapta CD este perpendiculara pe planul triunghiului echilateral ABC de latura $a > 0$, iar dreptele AD si BD formeaza cu planul (ABC) unghiuri de masura φ . Determinati masura unghiului diedru $C(\overline{AB})D$ (unghiul dintre planele (ABC) si (ABD)).
- (3) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 4$, $CC' = 2\sqrt{6}$. Calculati masura unghiului dintre AC' si (ABC) , masura unghiului dintre planele (BDD') si $(AA'D)$, cat si masura unghiului planelor $(BC'D')$ si (ABC) .
- (4) Intr-un plan α se dau doua drepte perpendiculare d_1, d_2 concurente in O . Distantele unui punct M exterior planului la dreptele d_1 si d_2 sunt respectiv egale cu $3a$ si $4a$, $a > 0$, iar distanta de la O la M este $3a\sqrt{2}$. Sa se calculeze distanta pe la M la α .
- (5) Baza unei prisme este un triunghi echilateral de raza $a > 0$. Muchiile laterale formeaza cu planul oricarei baze unghiuri de masura 60° . Unul din varfurile unei baze se proiecteaza pe planul celeilalte baze in centrul cercului circumscris acesteia. Aflati distanta dintre planele bazelor prisme.
- (6) Baza unei prisme este un patrat de latura $a > 0$. Una dintre fetele laterale ale prisme este un patrat, alta este un romb cu un unghi de masura 60° . Determinati distanta dintre planele bazelor prisme.
- (7) In cubul $ABCD A' B' C' D'$ se considera M mijlocul lui $[A'D']$, N mijlocul lui $[A'B']$, O centrul fetei $ABCD$ si O' centrul fetei $A'B'C'D'$. Calculati $d(MN, (ABC))$, $d(MN, (BC))$, $d(A'D, (BC))$, $d(OO', (BC))$.
- (8) In cubul $ABCD A' B' C' D'$ de muchie $a > 0$ se considera N mijlocul lui (AB) , M mijlocul lui (AA') si P un punct pe (BC) .
 - (a) Determinati lungimea proiectiei ortogonale a segmentului (AA') pe planul $(A'BD)$.
 - (b) Determinati pozitia lui P pe (BC) stiind ca lungimea proiectiei ortogonale a segmentului $(A'P)$ pe (ABC) este $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
 - (c) Calculati aria proiectiei ortogonale a suprafetei patrulatere $MNCD'$ pe (ABC) .
- (9) Fie $\triangle ABC$ cu $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$, $CA = 17\text{ cm}$. Proiectia suprafetei triunghiulare ABC pe un plan α are aria 18 cm^2 . Determinati unghiul dintre planele (ABC) si α .
- (10) Triunghiul ABC , avand $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$, se proiecteaza pe un plan α paralel cu AC dupa triunghiul $A'B'C'$. Stiind ca $A'B' = 4$, calculati $B'C'$ si masura unghiului planelor (ABC) si α .