Curs 10 - Forma canonică Jordan. Polinoame de matrice

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Forma canonicaă Jordan

În cursul anterior am demonstrat că un endomorfism de spații liniare $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă toate rădăcinile caracteristice sunt în K și dimensiunea oricărui subspațiu propriu $V(\lambda_i)$ coincide cu multiplicitatea lui λ_i, $i \in \overline{1,n}$, unde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sunt rădăcinile caracteristice ale lui T.

Dar dacă am slăbi puțin ipotezele teoremei, de exemplu dacă am presupune doar că toate rădăcinile caracteristice sunt în K? Acest lucru este întotdeauna valabil când K este corpul comutativ al numerelor complexe. Vom vedea că în acest caz vom putea găsi o bază în raport cu care matricea endomorfismului sa fie relativ simplă, chiar dacă nu este una diagonală.

Definiţia 1 *O celulă Jordan de ordin arbitrar $p \in \overline{1,n}$ asociată numărului complex sau real λ , este o matrice de ordinul p de tipul*

$$J_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

O matrice Jordan este o matrice care are de-a lungul diagonalei principale celule Jordan de diferite ordine și în rest zerouri.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, cu V_n un K spațiu liniar ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Spunem că T poate fi adus la forma canonică Jordan dacă există o bază B a lui V_n în raport cu care matricea lui Teste o matrice Jordan. Baza B se numește bază Jordan.

Teorema 2 *(Jordan) Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, cu V_n un K spațiu liniar ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Presupunem că T are toate rădăcinile caracteristice λ_i, $i \in \overline{1,k}$, în câmpul K. Atunci T poate fi adus la forma canonică Jordan.*

Nu vom da demonstrația integrală a acestei teoreme, o găsiți, de exemplu, la pag 68 a cărții N. Papaghiuc, C. Călin, Algebră liniară și geometrie.

Să înțelegem pornind de la un exemplu, ce proprietăți ar trebui să aibă vectorii unei baze Jordan.

Presupunem că în raport cu baza Jordan $B = \left\{\overrightarrow{f}_1, \cdots \overrightarrow{f}_6\right\}$, matricea lui $T \in \mathcal{L}(V_6)$ este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dacă toate rădăcinile caracteristice sunt din corpul K, rezultă că ele sunt toate valori proprii. Deducem că T are două valori proprii, λ_1 de multiplicitate 4 și λ_2 de multiplicitate 2.

Observăm că lui λ_1 îi corespund două celule Jordan, una de ordinul 1, (λ_1) și una de ordinul 3, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, iar lui λ_2 îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 2, $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Privind coloanele lui J deducem $T(\overrightarrow{f}_1) = \lambda_1 \overrightarrow{f}_1$, $T(\overrightarrow{f}_2) = \lambda_1 \overrightarrow{f}_2$, deci $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$ sunt vectori proprii (liniar independenți) ai lui T, corespunzători valorii proprii λ_1.

Dar $T(\overrightarrow{f}_3) = \overrightarrow{f}_2 + \lambda_1 \overrightarrow{f}_3$, $T(\overrightarrow{f}_4) = \overrightarrow{f}_3 + \lambda_1 \overrightarrow{f}_4$. Deci $\overrightarrow{f}_3$, $\overrightarrow{f}_4$ nu sunt vectori proprii ai lui T. Vom spune că $\overrightarrow{f}_3$, $\overrightarrow{f}_4$ sunt vectori principali asociați vectorului propriu $\overrightarrow{f}_2$.

Deci $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2 \in V(\lambda_1) = Ker\,(T - \lambda_1 Id)$ iar $\overrightarrow{f}_3 \in Ker\,(T - \lambda_1 Id)^2$, $\overrightarrow{f}_4 \in Ker\,(T - \lambda_1 Id)^3$.

Mai mult, se verifică ușor că $Ker\,(T - \lambda_1 Id) \subset Ker\,(T - \lambda_1 Id)^2 \subset Ker\,(T - \lambda_1 Id)^3$, deci $\left\{\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3, \overrightarrow{f}_4\right\}$ e o bază în $Ker\,(T - \lambda_1 Id)^3$.

Analog, $T(\overrightarrow{f}_5) = \lambda_2 \overrightarrow{f}_5$, $T(\overrightarrow{f}_6) = \overrightarrow{f}_5 + \lambda_2 \overrightarrow{f}_6$, deci $\overrightarrow{f}_5 \in V(\lambda_2) = Ker\,(T - \lambda_2 Id)$, $\overrightarrow{f}_6 \in Ker\,(T - \lambda_2 Id)^2 \supset Ker\,(T - \lambda_2 Id)$, deci $\left\{\overrightarrow{f}_5, \overrightarrow{f}_6\right\}$ e o bază în $Ker\,(T - \lambda_2 Id)^2$, cu $\overrightarrow{f}_5$ vector propriu corespunzător valorii proprii λ_2 și $\overrightarrow{f}_6$ vector principal asociat lui $\overrightarrow{f}_5$.

Observăm că
$$Ker\,(T - \lambda_1 Id)^3 \oplus Ker\,(T - \lambda_2 Id)^2 = V_6,$$
suma ordinelor celulelor Jordan corespunzătoare unei valori proprii este egală cu multiplicitatea acelei valori proprii (ca rădăcină caracteristică) iar dimensiunea fiecărui spațiu propriu $V(\lambda)$ ne dă numărul de celule Jordan asociat fiecărei valori proprii, deoarece fiecare celulă Jordan corespunde unui vector propriu al bazei lui $V(\lambda)$.
Vom explica în mare ideea demonstrației teoremei lui $Jordan$.
Avem nevoie de câteva noțiuni noi.

Un endomorfism $\varphi \in \mathcal{L}(V_n)$ se numește nilpotent de indice $p \geq 2$ dacă $\varphi^p = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{p} = 0$ și p este cel mai mic număr natural ≥ 2 cu această proprietate, unde am notat cu 0 endomorfismul nul pe V_n.

Propoziţia 3 *Fie* $\varphi \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism nilpotent de indice $h \geq 2$ și $\overrightarrow{u}_0$ un vector nenul a.i. $\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) \neq \overrightarrow{0}$. Atunci
$$\{\overrightarrow{u}_0, \varphi(\overrightarrow{u}_0), \varphi^2(\overrightarrow{u}_0), \cdots, \varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0)\}$$
e sistem de vectori liniar independent.

Fie $\alpha_i \in K$ a.i. $\alpha_1 \overrightarrow{u}_0 + \alpha_2\varphi(\overrightarrow{u}_0) + \alpha_3\varphi^2(\overrightarrow{u}_0) + \cdots + \alpha_h\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) = \overrightarrow{0}$. Aplicăm acestei relații endomorfismul φ^{h-1}. Folosind $\varphi^h = 0$, avem $\alpha_1\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) = \overrightarrow{0}$. Deoarece $\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) \neq \overrightarrow{0}$, deducem $\alpha_1 = 0$. Înlocuim în relația inițială și avem $\alpha_2\varphi(\overrightarrow{u}_0) + \alpha_3\varphi^2(\overrightarrow{u}_0) + \cdots + \alpha_h\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) = \overrightarrow{0}$.

Aplicăm din nou φ^{h-2}și obținem $\alpha_2\varphi^{h-1}(\overrightarrow{u}_0) = \overrightarrow{0}$, deci $\alpha_2 = 0$. Repetăm raționamentul până când arătăm că toți scalarii α_i sunt nuli.

Ideea de bază a demonstrației teoremei lui Jordan este următoarea. Fie $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in K$ rădăcinile caracteristice ale lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$, de multiplicități $m_1, \cdots, m_p$. Atunci spațiul liniar V_n se poate descompune în sume directe de subspații liniare de următorul tip.

$$V_n = Ker\,(T - \lambda_1 Id)^{h_1} \oplus Ker\,(T - \lambda_2 Id)^{h_2} \oplus \cdots \oplus Ker\,(T - \lambda_p Id)^{h_p}\,, h_i \geq 1,$$

cu $dimKer\,(T - \lambda_i Id)^{h_i} = m_i,\ \forall i \in \overrightarrow{1,p}$ și restricțiile endomorfismelor $T - \lambda_i Id$ la $Ker\,(T - \lambda_i Id)^{h_i}$, $i \in \overrightarrow{1,p}$, sunt fie endomorfisme nule (pentru $h_i = 1$), fie endomorfisme nilpotente de indice $h_i \geq$2. Observăm că toate subspațiile $Ker\,(T - \lambda_i Id)^{h_i}$ sunt invariante prin T.

Pentru fiecare valoare proprie λ determinăm subspațiul propriu $V(\lambda)$ și alegem o bază în acesta. Dacă $dimV(\lambda) = m_\lambda$ (multiplicitatea lui λ) evident lui λ îi asociem m_λ celule Jordan de ordinul 1. Dacă acest lucru se întâmplă pentru toate valorile proprii ale lui T, atunci Te diagonalizabil.

Dacă $dimV(\lambda) = k < m_\lambda$, atunci lui λ îi corespund k celule Jordan, suma ordinelor acestora fiind egală cu m_λ. Adăugăm unora dintre vectorii proprii ai unei baze a lui $V(\lambda)$ vectori principali asociați din fiecare subspațiu al șirului de incluziuni $V(\lambda) = Ker\,(T - \lambda Id) \subset Ker\,(T - \lambda Id)^2 \subset \cdots \subset Ker\,(T - \lambda Id)^h$ până ajungem la o bază în $Ker\,(T - \lambda Id)^h$ formată din m_λ vectori proprii ai lui T și vectori principali asociați acestora.

Cum determinăm acești vectori?

Dacă $\overrightarrow{u}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii λ, considerăm X matricea coloană a coordonatelor sale în baza inițială în raport cu care avem matricea A a endomorfismului T.

Atunci determinarea vectorilor $\overrightarrow{u}$ cu proprietatea $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ este echivalentă cu a rezolva sistemul scris matriceal $(A - \lambda I_n)\,X = O_{n,1}$.

Pentru a determina vectorii principali asociați unui vector propriu $\overrightarrow{u}$, ar trebuie să găsim vectorii $\overrightarrow{w}$ a.i. $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{w} \Leftrightarrow (T - \lambda Id)\,(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\,Y = X$, unde X e matricea coloană a coordonatelor vectorului propriu $\overrightarrow{u}$ iar Y e matricea coloană a coordonatelor vectorului principal $\overrightarrow{w}$ asociat lui $\overrightarrow{u}$.

Dacă dimensiunea lui $V(\lambda)$ este minim doi, nu știm căror vectori proprii din baza aleasă în $V(\lambda)$ îi putem asocia vectori principali, vom determina acest lucru impunând ca sistemul $(A - \lambda I_n)\,Y = X$ să fie compatibil.

Dacă lucrăm direct cu matrice, teorema lui Jordan poate fi reformulată evident astfel.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n\,(K)$ are toate rădăcinile caracteristice în K, unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, atunci A este asemenea cu o matrice Jordan.

Exemplificăm algoritmul de determinarea a matricei Jordan și a bazei Jordan pe câteva exemple.

Exemplul 1

$$T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right), \ T\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = \left(2x^1, x^1 + 3x^2 + x^3 + x^4, x^3 - x^4, -x^1 - x^2 + 2x^4\right).$$

Deci matricea lui T în raport cu baza canonică B a lui $\mathbb{R}^4$ este

$$A = M_B\left(T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al lui T este

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda - 2\right)^4.$$

Deci $\lambda = 2$ este rădăcină caracteristică de multiplicitate 4. Ea este reală, deci e și valoare proprie pentru T. Din teorema lui Jordan rezultă că există o bază Jordan B' în raport cu care matricea lui T este o matrice Jordan.

Determinăm $V\left(2\right)$.

$dim\left(V\left(2\right)\right) = 4 - rang\left(A - 2I_4\right) = 4 - 2 = 2$, deci vom căuta doi vectori proprii liniar independenți corespunzători valorii proprii $\lambda = 2$ și acestei valori proprii îi corespund două celule Jordan, suma ordinelor acestora fiind 4.

Fie X matricea coloană a coordonatelor unui vector propriu al lui T, corespunzător valorii proprii 2, în baza canonică. Rezultă

$$\left(A - 2I_4\right)X = O_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 & = 0 \\ -x^3 - x^4 & = 0 \\ -x^1 - x^2 & = 0. \end{cases}$$

Dacă alegem necunoscutele secundare $x^1 = \alpha,\ x^3 = \beta$, rangul matricei $A - 2I_4$ fiind 2, obținem

$$V(2) = \left\{(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \ | \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Căutăm doi vectori principali asociați vectorilor proprii ai lui T. Neștiind care din vectorii proprii admit vectori principali asociați, nu fixăm momentan o bază în $V(2)$.

Fie Y matricea coloană a coordonatelor unui vector principal al lui T, în baza canonică. Rezultă

$$\left(A - 2I_4\right)Y = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = \alpha \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 & = -\alpha \\ -x^3 - x^4 & = \beta \\ -x^1 - x^2 & = -\beta. \end{cases}$$

Deci o condiție necesară pentru ca acest sistem să fie compatibil este $\alpha = 0$. Pentru $\alpha = 0$, sistemul

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 & = 0 \\ -x^3 - x^4 & = \beta \\ -x^1 - x^2 & = -\beta \end{cases} \tag{1}$$

are minorul caracteristic nul, pentru orice β real, deci este compatibil oricare ar fi β.

Fie $\bar{f}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\bar{f}_2 = (0, 0, 1, -1) \in V(2)$. Doar $\bar{f}_2$ are vectori principali asociați. Rezolvăm sistemul (1) pentru $\beta = 1$. Alegem de exemplu necunoscutele secundare $y^2 = \gamma$, $y^4 = \delta$, deducem că mulțimea soluțiilor sistemului (1) pentru $\beta = 1$ este

$$\mathcal{S}_1 = \left\{(1-\gamma, \gamma, -\delta - 1, \delta) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Continuăm cu determinarea vectorilor principali asociați lui $\bar{f}_2$. Fie Z matricea coordonatelor acestora. Rezultă că

$$(A - 2I_4)\, Z = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma \\ \gamma \\ -\delta - 1 \\ \delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = 1 - \gamma \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 & = \gamma \\ -x^3 - x^4 & = -\delta - 1 \\ -x^1 - x^2 & = \delta \end{cases}$$

Pentru $\gamma = 1$ se verifică imediat că sistemul

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 & = 1 \\ -x^3 - x^4 & = -\delta - 1 \\ -x^1 - x^2 & = \delta \end{cases} \tag{2}$$

este compatibil pentru orice δ real.

Alegem din $\mathcal{S}_1$ vectorul principal corespunzător lui $\gamma = 1$, $\delta = 0$, fie acesta $\bar{f}_3 = (0, 1, -1, 0)$. Rezolvăm sistemul (2) pentru $\delta = 0$ și obținem mulțimea soluțiilor

$$\mathcal{S}_2 = \left\{(-\epsilon, \epsilon, 1 - \lambda, \lambda) \mid \epsilon, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Alegem $\bar{f}_4 = (0, 0, 1, 0) \in \mathcal{S}_2$.

Ne oprim aici deoarece multiplicitatea valorii proprii 2 este 4 și avem deja o bază formată din 2 vectori proprii și 2 vectori principali asociați.

Deci baza Jordan este $B' = \left\{\bar{f}_1 = (1, -1, 0, 0),\ \bar{f}_2 = (0, 0, 1, -1),\ \bar{f}_3 = (0, 1, -1, 0),\ \bar{f}_4 = (0, 0, 1, 0)\right\}$, cu $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in V(2) = Ker\,(T - 2Id)$, $\bar{f}_3 \in Ker\,(T - 2Id)^2$, $\bar{f}_4 \in Ker\,(T - 2Id)^3$.

Deoarece $T\left(\bar{f}_1\right) = 2\bar{f}_1$, $T\left(\bar{f}_2\right) = 2\bar{f}_2$, $T\left(\bar{f}_3\right) = \bar{f}_2 + 2\bar{f}_3$, $T\left(\bar{f}_4\right) = \bar{f}_3 + 2\bar{f}_4$, avem matricea Jordan

$$A' = M_{B'}\,(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Legătura între cele două matrice este $A' = S^{-1} A S$, unde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Am ajuns la matricea Jordan determinând mai întâi baza Jordan. Dar există un algoritm ce ne ajută la determinarea directă a matricei Jordan, algoritm ce poatre fi înțeles doar dacă citiți demonstrația integrală a teoremei lui Jordan.

Fie $I = \{\lambda \, valoare \, proprie \, a \, lui \, T \mid dimV(\lambda) \neq m(\lambda)\} \neq \emptyset$. Pentru fiecare $\lambda \in I$ determinăm

$s_i = n - rang\,(A - \lambda I_n)^i = dim\left(Ker\,(T - \lambda Id)^i\right),\ i \in \overline{1,k},\ s_{k+1} = s_k.$

$t_1 = s_1,\ t_i = s_i - s_{i-1},\ i \in \overline{2,k},\ t_{k+1} = 0.$

$t_i - t_{i+1}$ ne dă numărul celulelor Jordan de ordinul i asociate lui λ.

Pentru exemplul anterior, $s_1 = dimV(2) = 2$, deci vom avea două celule Jordan asociate valorii proprii $\lambda = 2$, $s_2 = 4 - rang\,(A - \lambda I_4)^2 = 4 - 1 = 3$, $s_3 = s_2$, $t_1 = s_1 = 2$, $t_2 = s_2 - s_1 = 1$, deci $t_1 - t_2 = 1$, vom avea o celulă Jordan de ordinul 1. Cum suma ordinelor celulelor Jordan este 4, multiplicitatea valorii proprii, rezultă că a doua celulă Jordan va fi de ordinul 3. Putem obține astfel direct că

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2

Fie $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ care are, în raport cu baza canonică B a lui $\mathbb{R}^4$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$, deci rădăcinile caracteristice sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, ambele reale. Deducem că A este asemenea cu o matrice Jordan, sau că T poate fi adus la forma canonică Jordan. Ambele rădăcini caracteristice au ordinul de multiplicitate 2.

Pentru $\lambda_1 = 1$ determinăm vectorii proprii, rezolvând sistemul scris matriceal

$$(A - I_4)\,X = O_{4,1} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^1 + 2x^2 - x^4 & = 0 \\ x^1 - x^2 & = 0 \\ x^2 - x^3 & = 0 \\ x^3 - x^4 & = 0. \end{cases} Avem$$

$$V(1) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ dimV(1) = 1.$$

Deci valorii proprii $\lambda_1 = 1$ îi asociem o celulă Jordan de ordinul 2, deci orice vector propriu va avea un vector principal asociat. Alegem de exemplu $\bar{f}_1 = (1, 1, 1, 1) \in V(1)$.

Fie Y matricea coloană a coordonatelor unui vector principal al lui T, asociat lui $\bar{f}_1$. Avem

$$(A - I_4)\,Y = X \Leftrightarrow \begin{cases} -y^1 + 2y^2 - y^4 & = 1 \\ y^1 - y^2 & = 1 \\ y^2 - y^3 & = 1 \\ y^3 - y^4 & = 1. \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor acestui sistem este $\mathcal{S}_1 = \{(3 + \beta, 2 + \beta, 1 + \beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Alegem $\bar{f}_2 = (3, 2, 1, 0) \in Ker\,(T - Id)^2$ vector principal asociat vectorului propriu $\bar{f}_1$.

Procedăm similar pentru valoarea proprie $\lambda_2 = -1$. Rezolvând sistemul $(A + I_4)\, X = O_{4,1}$, obținem

$$V(-1) = \{(\gamma, -\gamma, \gamma, -\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}\,,\, dimV(-1) = 1,$$

deci valorii proprii $\lambda_2 = -1$ îi asociem o celulă Jordan de ordinul 2, deci orice vector propriu va avea un vector principal asociat. Alegem de exemplu $\bar{f}_3 = (1, -1, 1, -1) \in V(-1)$.

Rezolvând sistemul $(A - I_4)\, Y = X$, pentru $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, deducem mulțimea soluțiilor sale $\mathcal{S}_2 = \{(-3-\delta, 2+\delta, -1-\delta, \delta) \mid \delta \in \mathbb{R}\}$. Alegem $\bar{f}_4 = (-3, 2, -1, 0) \in Ker\,(T + Id)^2$.

În raport cu baza Jordan $B' = \{\bar{f}_1 = (1,1,1,1)\,,\ \bar{f}_2 = (3,2,1,0)\,,\ \bar{f}_3 = (1,-1,1,-1)\,,\ \bar{f}_4 = (-3,2,-1,0)\}$, matricea lui T este

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A' = S^{-1}AS,\ S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, care are, în raport cu baza canonică B a lui $\mathbb{R}^3$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ p(\lambda) = -\lambda\,(\lambda - 2)^2.$$

Deci T are două rădăcini caracteristice, una simplă, $\lambda_1 = 0$ și una dublă, $\lambda_2 = 2$, ambele reale.

Deoarece $dimV(0) = 3 - rangA = 1$, deducem că lui $\lambda_1 = 0$ îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 1, adică (0).

Analog, $dimV(2) = 3 - rang\,(A - 2I_3) = 1$, deci și lui $\lambda_2 = 2$ îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 2. Deci matricea Jordan asemenea cu A este

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Baza Jordan va fi $B' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, cu $\bar{f}_1 \in V(0)$, $\bar{f}_2 \in V(2)$, $\bar{f}_3 \in Ker\,(T - 2Id)^2$, vector principal asociat lui $\bar{f}_2$.

Obținem

$$V(0) = \{(-a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}\,,\ \ V(2) = \{(b, b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Alegem $\bar{f}_1 = (-1, 1, 1)\,,\ \bar{f}_2 = (1, 1, 1)$. Pentru a determina pe $\bar{f}_3$ rezolvăm sistemul

$$(A - 2I_3)\, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

și alegem una dintre soluțiile sale, de exemplu $\bar{f}_3 = (0, 3, 4)$.

Exemplul 4

Fie Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$, care are, în raport cu baza canonică B a lui $\mathbb{R}^5$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $p(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$, deci rădăcinile caracteristice sunt $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$, ambele reale, λ_1 de multiplicitate 3, iar λ_2 de multiplicitate 2.

$dimV(1) = 5 - rang\,(A - I_5) = 5 - 4 = 1$, deci lui λ_1 îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 3, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$dimV(-1) = 5 - rang\,(A + I_5) = 5 - 4 = 1$, deci și lui λ_2 îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 2, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Deci matricea Jordan este

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Baza Jordan este deci de tipul $B' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4, \bar{f}_5\}$, cu $\bar{f}_1 \in V(1)$, $\bar{f}_2, \bar{f}_3$ vectori principali asociați lui $\bar{f}_1$, mai exact $\bar{f}_2 \in Ker\,(T - Id)^2$, $\bar{f}_3 \in Ker\,(T - Id)^3$, $\bar{f}_4 \in V(-1)$, $\bar{f}_5 \in Ker\,(T + Id)^2$ vector principal asociat lui $\bar{f}_4$.

Determinăm

$$V(1) = \{(a, a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Pentru a determina pe $\bar{f}_2$, rezolvăm sistemul $(A - I_5)\,Y = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}$. Observăm că acest sistem este compatibil pentru orice a real. Alegem $a = 1$. Mulțimea soluțiilor sistemului este $\mathcal{S}_1 = \{(b-4, b-3, b-2, b-1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Alegem de exemplu $b = 0$, deci $\bar{f}_2 = (-4, -3, -2, -1, 0)$.

Pentru a determina pe $\bar{f}_3$ rezolvăm sistemul $(A - I_5)\,Z = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mulțimea soluțiilor sale este $\mathcal{S}_2 = \{(c+10, c+6, c+3, c+1, c)\,,\ c \in \mathbb{R}\}$. Alegem $c = 0$, deci $\bar{f}_3 = (10, 6, 3, 1, 0)$.

Procedăm analog pentru $\bar{f}_4, \bar{f}_5$, obținem $\bar{f}_4 = (1, -1, 1, -1, 1) \in V(-1),\ \ \bar{f}_5 = (-4, 3, -2, 1, 0) \in Ker\,(T + Id)^2$.

Exemplul 5 Aducerea unui endomorfism de spații liniare la forma canonică Jordan ajută, de exemplu, la determinarea lui T^n. Știm că $A' = S^{-1}AS$, deci $A^n = S\,(A')^n\,S^{-1}$, unde S e matricea de trecere de la B la B'. Este suficient să calculăm $(A')^n$. Pentru $n = 2, 3$ formula se deduce ușor, de la caz la caz, calculând câteva puteri consecutive ale lui A', intuind formula de calcul pentru n natural arbitrar și demonstrând-o prin inducție.

În cazul exemplului 3 avem

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 2.\cdot 2 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix},\ (A')^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 3\cdot 2^2 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix},\ (A')^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 4\cdot 2^3 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

Demonstăm prin inducție că

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Înlocuind $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ în $A^n = S\,(A')^n\,S^{-1}$, obținem A^n.

Pentru n din ce în ce mai mare, e util să reținem formula de calcul următoare, pentru ridicarea la putere a unei celule Jordan de ordin arbitrar k, formulă ce se demonstrează prin inducție matema_tică.

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow J_k^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{k-2}\lambda^{n-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Atunci, pentru $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-2)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, exact cum am obținut în exemplul anterior.

Am văzut că în ipotezele teoremei de diagonalizare sau ale teoremei Jordan avem o serie de subspații liniare invariante prin T. Dar dacă un endomorfism de spații liniare nu are nici o rădăcină caracteristică în K? Evident acest lucru este posibil doar pentru $K = \mathbb{R}$. Ce putem spune în acest caz despre subspațiile invariante prin T?

Propoziţia 4 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, cu V_n un spațiu liniar real. Presupunem că T nu are nici o rădăcină caracteristică reală. Atunci V_n conține cel puțin un subspațiu doi dimensional invariant prin T.*

Demonstrație

Fie $A = M_B(T)$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ o rădăcină caracteristică a lui T. Rezultă că ecuația matriceală $AZ = \lambda Z$ are și soluții nenule în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Fie $Z_0 = X_0 + iY_0$ o astfel de soluție nenulă, $X_0, Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Atunci

$$AZ_0 = \lambda Z_0 \Leftrightarrow A\,(X_0 + iY_0) = (\alpha + i\beta)\,(X_0 + iY_0) \Leftrightarrow \begin{cases} AX_0 & = \alpha X_0 - \beta Y_0, \\ AY_0 & = \beta X_0 + \alpha Y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Fie $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ vectorii ce au în baza B matricele coordonatelor X_0, respectiv V_0. Sistemul (3) este echivalent cu

$$\begin{cases} T(\bar{u}_0) & = \alpha\bar{u}_0 - \beta\bar{v}_0, \\ T(\bar{v}_0) & = \beta\bar{u}_0 + \alpha\bar{v}_0. \end{cases}$$

Deducem că $U = [\bar{u}_0, \bar{v}_0]$ este invariant prin T. Se poate demonstra prin reducere la absurd că $\bar{u}_0, \bar{v}_0$ sunt liniar independenți.

2 Poninoame de matrice. Teorema lui Hamilton Cayley

Fie V_n un K- spațiu vectorial n dimensional și un polinom $f \in K[X]$, $f = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Acestuia i se poate asocia un polinom de matrice, respectiv un polinom de endomorfisme:

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n,\ A \in \mathcal{M}_n(K),$$
$$f(\varphi) = a_k \varphi^k + a_{k-1} \varphi^{k-1} + \cdots + a_1 \varphi + a_0 Id,\ \varphi \in \mathcal{L}(V_n).$$

Am notat cu $\varphi^p = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{p\, ori}$, $I_n \in \mathcal{M}_n(K)$ matricea unitate de ordin n, $Id \in \mathcal{L}(V_n)$ endomorfismnul identitate pe V_n.

Teorema 5 *(Cayley-Hamilton) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și p este polinomul caracteristic al lui A, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, atunci $p(A) = O_n$.*

Pentru orice matrice pătratică de ordinul n știm că $XX^* = (detX)\, I_n$, unde X^* este matricea adjunctă a lui X. Luând $X = A - \lambda I_n$, obținem

$$(A - \lambda I_n)\,(A - \lambda I_n)^* = p(\lambda) I_n. \tag{4}$$

$(A - \lambda I_n)^*$ este o matrice de ordinul n ale cărei elemente depind de λ. Putem să scriem această matrice ca un polinom în λ, de grad $n-1$, cu coeficienții matrice de ordinul n. Presupunem că

$$(A - \lambda I_n)^* = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0,\ \ B_i \in \mathcal{M}_n(K),\ i \in \overline{0, n-1}. \tag{5}$$

Presupunem

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \delta_1 \lambda^{n-1} + \delta_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \delta_n\right). \tag{6}$$

Înlocuim (5) și (6) în (4) și identificăm coeficienții lui λ:

$$(A - \lambda I_n)\left(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0\right) = (-1)^n \left(\lambda^n - \delta_1 \lambda^{n-1} + \delta_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \delta_n\right) I_n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
AB_0 &= \delta_n I_n \quad |\cdot I_n \\
AB_1 - B_0 &= -\delta_{n-1} I_n \quad |\cdot A \\
AB_2 - B_1 &= \delta_{n-2} I_n \quad \left|\cdot A^2\right. \\
&\cdots\cdots \\
AB_{n-1} - B_{n-2} &= (-1)^{n-1} \delta_1 I + n \quad \left|\cdot A^{n-1}\right. \\
-B_{n-1} &= (-1)^n I_n \quad |\cdot A^n
\end{aligned}$$

Înmulțind convenabil relațiile de mai sus respectiv cu $I_n, A, A^2, \cdots, A^n$, adunând relațiile obținute, observăm că toți termenii din membrul stâng se reduc iar în membrul drept regăsim $p\,(A)$. În final avem

$$O_n = p(A).$$

Evident putem formula teorema în termeni de endomorfisme liniare.

Teorema 6 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, p polinomul său caracteristic și 0_V endomorfismul nul al lui V_n. Atunci $p(T) = 0_V$.*

Teorema se demonstrează folosind izomorfismul între spațiile liniare $\mathcal{L}(V_n)$ și $\mathcal{M}_n(K)$ și teorema lui Cayley - Hamilton.

Propoziţia 7 *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Atunci orice polinom de matrice de grad $\geq n$, $q(A)$, asociat lui A, poate fi exprimat printr-un polinom de matrice de grad cel mult $n-1$.*

Înlocuind (6) în $p(A) = O_n$, rezultă

$$A^n = \delta_1 A^{n-1} - \delta_2 A^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}\delta_n I_n. \tag{7}$$

Deci

$$A^{n+1} = \delta_1 A^n - \delta_2 A^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1}\delta_n A. \tag{8}$$

Înlocuind (7) în (8) exprimăm A^{n+1} ca un polinom de matrice de grad cel mult $n-1$.

Analog, în expresia lui A^{n+p}, $p \geq 2$, exprimăm A^n, $A^{n+1}, \cdots, A^{n+p-1}$ ca polinoame de matrice de grad cel mult $n-1$.

Aplicație

Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exprimați A^5 și A^{-1} ca polinoame de matricea A de grad maxim 2.

Determinăm polinomul caracteristic al lui A și folosim teorema Cayley - Hamilton.

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \Rightarrow A^3 = 2A^2 - 2A - 2I_3$. Atunci $A^4 = 2A^3 - 2A^2 - 2A = 2\left(2A^2 - 2A - 2I_3\right) - 2A^2 - 2A = 2A^2 - 6A - 4I_3$.

Analog $A^5 = 2\left(2A^2 - 2A - 2I_3\right) - 6A^2 - 4A = -2A^2 - 8A - 4I_3$.

Pentru determinarea inversei lui A rescriem $p(A) = 0$ ca
$-\frac{1}{2}A^3 + A^2 - A = I_3 \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{2}A^2 + A - I_3\right) = I_3$. Deci $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A - I_3$.