

Didactica matematicii

Model orientativ examen scris, 16 aprilie 2025*

Subiectul 1

Următoarea secvență este extrasă dintr-un manual de matematică pentru clasa a X-a, profil real, specializarea matematică-informatică.

Exercițiul 1. Tabelul de mai jos conține soluțiile unei inecuații exponențiale simple. Din acest tabel lipsesc câteva informații pe care va trebuie să completați folosind teoria prezentată în secțiunea despre ecuații exponențiale.

Inecuația	Domeniul parametrilor	Soluțiile inecuației
$a^x > c$ $a > 0, a \neq 1$	$c \leq 0$	
	$c > 0$ $0 < a < 1$	
	$a > 1$	
$a^x < c$ $a > 0, a \neq 1$	$c \leq 0$	
	$c > 0$ $0 < a < 1$	
	$a > 1$	

Remarca 1. Fie a un număr real pozitiv și diferit de 1. Dacă $a > 1$, atunci inecuația exponențială

$$a^{f(x)} > a^{g(x)},$$

este echivalentă cu inecuația $f(x) > g(x)$. Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația exponențială

$$a^{f(x)} > a^{g(x)},$$

este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$. Astfel de inecuații se numesc compuse.

- Completați tabelul de mai sus cu răspunsurile corecte. Proiectați o activitate euristică prin care elevii să descopere rezultatele din tabel folosind un soft matematic precum Geogebra sau Desmos. Se va formula un obiectiv operațional, apoi se vor enumera sarcinile pe care le au de îndeplinit elevii, modul de organizare al acestora și scenariul didactic al activității.
- Elaborați și rezolvați complet un item subiectiv prin care elevii să aplice tabelul de mai sus. Se vor alege 2 exemple de inecuații exponențiale, una simplă și una compusă.
- Dați un exemplu de inecuație exponențială care nu poate fi rezolvată doar folosind tabelul de mai sus. Justificați alegerea făcută.

*Timpul de lucru este de 180 minute. Se acordă un punct din oficiu. Nota finală se obține făcând media aritmetică a celor trei note obținute.

d) Elaborați un item de tip alegere multiplă și un item de tip alegere duală pentru evaluarea cunoștințelor legate de rezolvarea inecuațiilor exponențiale. Pentru fiecare item se va preciza numele, se va scrie rezolvarea completă și baremul de evaluare. [10p]

Subiectul 2

Un panou publicitar se află la înălțimea $h_1 > 0$ față de nivelul străzii și are înălțimea $h > 0$. Notăm cu α unghiul de vizibilitate al panoului, raportat la observatorul uman. Se poate deduce ușor că

$$\gamma := \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a+b}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{x},$$

unde $a = h - h_1$, $b = h_1 - h_2$, x este distanța observatorului față de panou, iar γ și β sunt unghiuri cunoscute.

a) Realizați o figură plană a configurației reprezentate în imaginea alăturată. Indicați unghiurile γ și β pe baza formulei de mai sus. Cum se pot măsura aceste unghiuri?

b) Fie $a = 2$, $b = 3$. Aflați x astfel încât $\alpha = 45^\circ$.

c) Se poate afla x astfel încât unghiul de vizibilitate să fie maxim? Justificați.

d) Evidențiați legătura dintre matematică și construcții prezentând o secvență de captare a atenției pe care ați utiliza-o la începutul unei ore de matematică în cadrul căreia urmează să predați o lecție de trigonometrie, la clasa a IX-a. [10p]

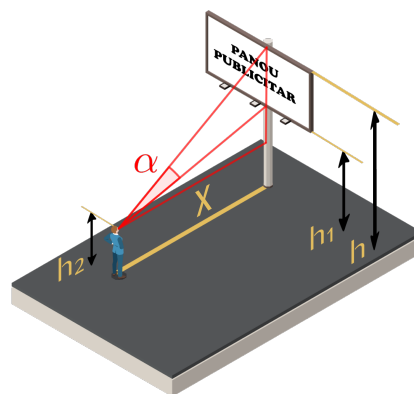


Figura 1: Matematica și construcțiile.

Subiectul 3

Logică matematică Enunțați principiul inducției matematice. Aplicați principiul pentru a demonstra că

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 2^{\min\{k,l\}} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot n - 5.$$

În lipsa membrului drept din egalitatea de mai sus, principiul inducției nu mai poate fi aplicat. Propuneți o abordare pentru calculul sumei.

Algebră Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

a) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe de pe pagina următoare.

b) Determinați intervalele de monotonie, atât grafic cât și folosind definiția funcțiilor (strict) monotone.

c) Rezolvați ecuația $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, discutând după valorile lui $m \in \mathbb{R}$.

d) Fie ecuația

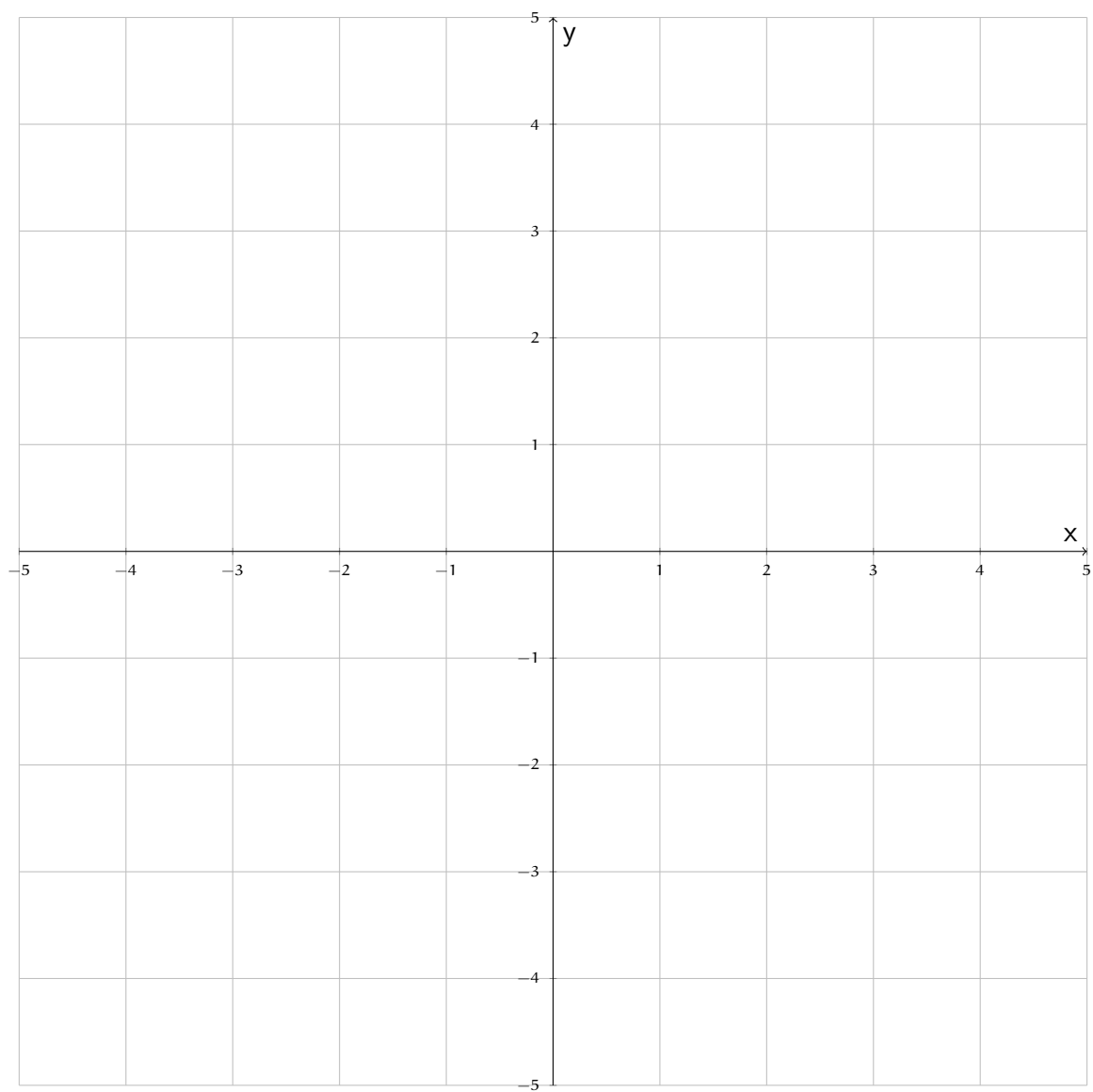
$$x^2 + (n-3)x + n = 0, n \in \mathbb{R}. \quad (E)$$

Determinați n astfel încât ecuația (E) să aibă două soluții reale distincte, ambele negative.

Geometrie Fie A, B, C trei puncte coliniare astfel încât $B \in (AC)$ și punctul $O \notin AC$. Folosind teorema lui Pitagora generalizată, arătați că are loc relația lui **Stewart**:

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC$$

Considerăm cunoscute lungimile laturilor triunghiului AOC . Ce relație metrică se pot obține din formula lui Stewart dacă B este mijlocul segmentului AC ? Dar dacă B este piciorul bisectoarei unghiului O a triunghiului AOC ? Justificați.



Reprezentare geometrică a graficului funcției