

FUNCȚII BIJECTIVE

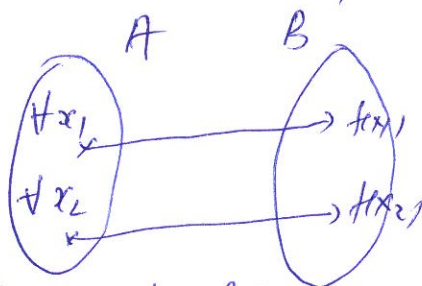
- 1 -

IOREA GHEORGHE

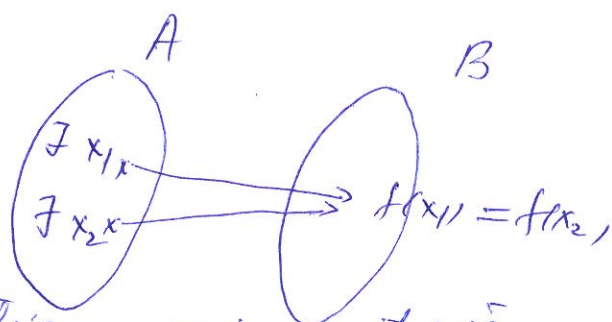
FUNCȚII INJECTIVE.

def. Fie A, B două mulțimi. Funcția $f: A \rightarrow B$ se numește injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$.

observație. Funcția $f: A \rightarrow B$ nu este injectivă dacă există $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$.



funcție injectivă



funcție neinjectivă.

Exemple 1. funcția definită prin

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	1	4	2

este injectivă.

2. funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$ este injectivă. ($\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow -3x_1 + 1 \neq -3x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).

3. funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ definită prin

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	2	1

nu este injectivă. ($2 \neq 4$ și $f(2) = f(4)$).

Propoziție. Fie $f: A \rightarrow B$, atunci f este injectivă dacă:

- pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă că $x_1 = x_2$.

b) fiecare ecuație $f(x) = y$, $y \in B$ are cel mult o soluție $x \in A$.

c) orice parabolă la axa Ox , dusă prin codomeniul funcției (orice dreaptă de ecuație $y = n$, $n \in B$) intersectează graficul funcției f în cel mult un punct.

Exemplu 1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 3n - 1$ este injectivă.

Sol. $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

2. $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ este injectivă.

Sol. $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2 \Rightarrow$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0, \text{ deci } x_1 = x_2 \text{ sau } x_1 + x_2 - 2 = 0$$

dar $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ și $x_1 + x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$. Prin urmare

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, deci f este injectivă.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ nu este injectivă. Spre exemplu $0 \neq 2$ și $f(0) = f(2)$.

4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 2 \\ x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$

Sol. Considerăm ecuațiile $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$

$x < 2 \Rightarrow 2x - 1 = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ soluție doar $x < 2$, deci $y < 3$

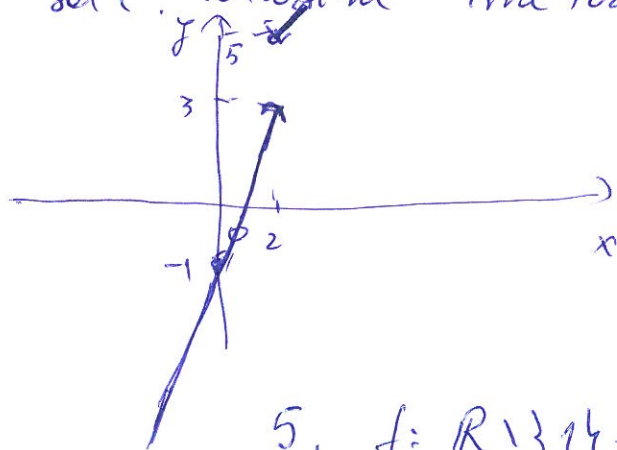
$x \geq 2 \Rightarrow x + 3 = y \Rightarrow x = y - 3$ soluție doar $x \geq 2$, deci $y \geq 5$.

Așfel $x = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & y < 3 \\ y - 3, & y \geq 5 \end{cases}$



Prin urmare fiecare ecuație $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$ are cel mult o soluție $x \in \mathbb{R}$, deci f este injectivă.

Sol 2. Folosim metoda grafică.



Oncă paralele la Ox ($y = n, n \in \mathbb{R}$) intersectează graficul funcției în cel mult un punct, deci f este injectivă.

5. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ este injectivă.

Sol 1. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și $f(x_1) = f(x_2)$, atunci

$$\frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ deci } f \text{ este injectivă.}$$

Sol 2. Considerăm ecuațiile $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$, deci

$\frac{x}{x-1} = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}, y \neq 1$. Cum $x \neq 1$, rezultă $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Astfel fiecare ecuație $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$ are cel mult o soluție (ecuațiile $f(x) = y, y \neq 1$ au soluție unică, ecuația $f(x) = y, y = 1$ nu are soluție), deci f este injectivă.

6. Câte funcții injective $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, respectând condiția $f(1) = 4$.
Sol. $f(1)$ poate fi aleasă într-un singur mod
 $f(2)$ poate fi aleasă în 5 moduri, $f(3)$ în 4 moduri și $f(4)$ în 3 moduri. Rezultă $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ funcții.

FUNCTII SURJECTIVE

def. Funcția $f: A \rightarrow B$ se numește surjectivă dacă $\forall y \in B$, există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

observație: funcția $f: A \rightarrow B$ nu este surjectivă dacă există $y \in B$ astfel încât $\nexists x \in A$ cu $f(x) = y$.

Exemple: 1. funcția $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, dată prin tabelul

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	1	2	3

este surjectivă.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ nu este surjectivă. Spun exemplu $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (f nu ia valori negative).

3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$ este surjectivă deoarece pentru orice $y \in \mathbb{R}$, există $x = \frac{y+1}{4} \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.

Propoziție: Fie $f: A \rightarrow B$, atunci f este surjectivă dacă și numai dacă pentru fiecare ecuație $f(x) = y, y \in B$, are cel puțin o soluție $x \in A$.

a) Orice paralelă la Ox, dusă prin codomeniul funcției f (conec dreaptă $y = n, n \in B$) intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

ob. condiția de ea a1 exprimă faptul

că $f(A) = \text{Im } f = \{ y \in B / \exists x \in A \text{ cu } f(x) = y \} = B$.

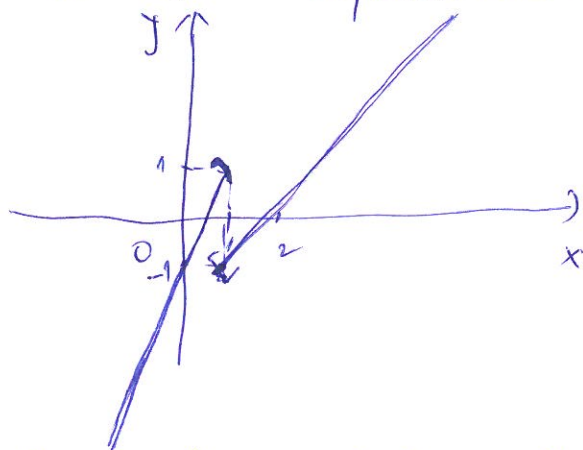
Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x-2|$ nu este surjectivă, deoarece ecuația $f(x) = -2$ nu are soluție.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases}$

este surjectivă?

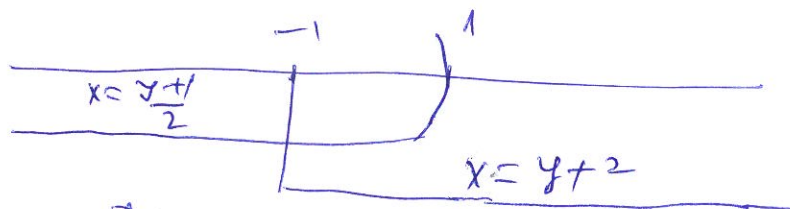
Sol 1. Reprezentăm grafic funcția f



Oare paralelă la Ox
tăie graficul funcției din
cel puțin un punct, deci
 f este surjectivă.

Sol 2. Considerăm ecuațiile $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$, deducem

$$\text{că } x = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & y < 1 \\ y+2, & y \geq -1 \end{cases}$$



Pentru un număr fixăm ecuațiile $f(x) = y$ au cel puțin o soluție. Rezultă că f este surjectivă.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nu este surjectivă.

Sol. Considerăm ecuațiile $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$

$x^2 - 2x - 3 - y = 0$, $\Delta = 4y + 16$, cum pentru $y < -4$, $\Delta < 0$
ecuația $f(x) = y$, $y < -4$ nu are soluții, rezultă
că f nu este surjectivă.

FUNCȚII BIJECTIVE

Def. Funcția $f: A \rightarrow B$ se numește bijectivă
dacă este injectivă și surjectivă.

Obținem cu ușurință că, $f: A \rightarrow B$ este bijectivă

dacă a) Oare paralelă la Ox, dușă prin

- 5 -

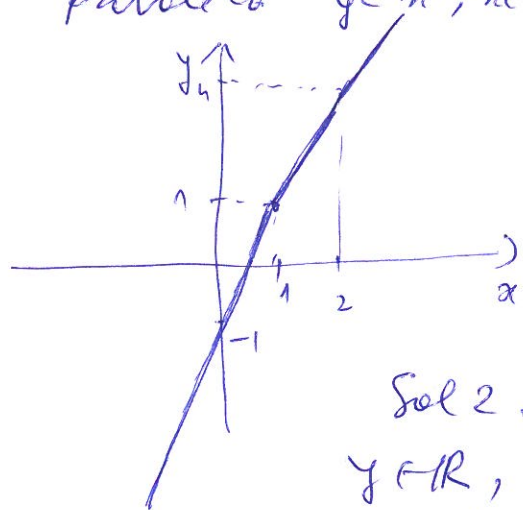
codomenului funcției f intersectează graficul funcției într-un singur punct.

b) Fie care ecuație $fx = y, y \in B$ are o singură soluție $x \in A$.

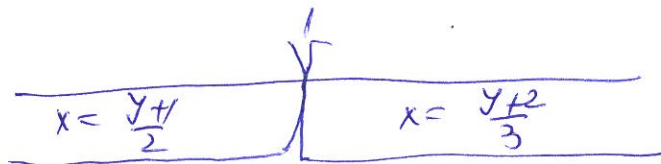
Exemple:

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ 3x-2, & x \geq 1 \end{cases}$ este bijectivă.

Sol. 1. Folosind graficul funcției f , orice paralelă $y = n, n \in \mathbb{R}$ la Ox , intersectează graficul funcției în exact un punct, deci f este bijectivă.



Sol 2. Considerăm ecuațiile $fx = y, y \in \mathbb{R}$, fiecărui ecuație are soluție unică

$$x = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & y < 1 \\ \frac{y+2}{3}, & y \geq 1 \end{cases}$$


deci f este bijectivă.

2. Funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 3n+1$ este bijectivă.

Sol. Considerăm ecuațiile $f(n) = y, y \in \mathbb{N}$.

Fiecare ecuație are cel mult o soluție

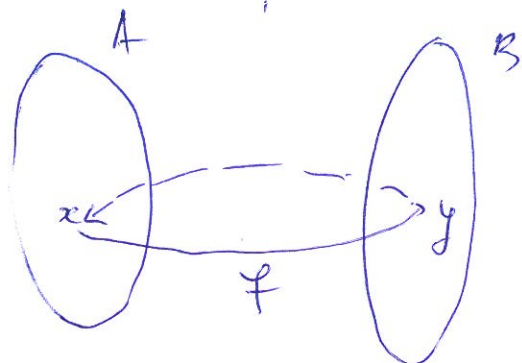
$n = \frac{y-1}{3}$ (deoarece $\frac{y-1}{3}$ nu este natural pentru toți $y \in \mathbb{N}$), deci f este injectivă. f nu este surjectivă (spre exemplu ecuația $fx = 0$, nu are soluție).

INVERSA UNEI FUNCȚII BIJECTIVE

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție bijectivă. Pentru un mare oricărui element $x \in A$ îi corespunde un singur $y \in B$ și reciproc, oricărui element $y \in B$ îi

corespondând unui singur element $x \in A$.

Putem defini funcția, notată f^{-1} , de la B la A prin $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.
 f^{-1} se numește inversa funcției f .



$$f^{-1}: B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Propoziție: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, $\forall x \in A$ și
 $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, $\forall y \in B$

$$(f^{-1} \circ f = 1_A; f \circ f^{-1} = 1_B)$$

Exemplu. 1. Determinați inversele funcțiilor următoare

a) $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	5	4	6	3

$f^{-1}: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$

y	3	4	5	6
$f^{-1}(y)$	3	1	0	2

b) $f: [-1, 2] \rightarrow [-2, 7]$, $f(x) = -3x + 4$.

Pentru orice $y \in [-2, 7]$, ecuația $f(x) = y$ are o singură soluție $x = \frac{4-y}{3} \in [-1, 2]$, prin urmare f este bijectivă, deci inversabilă.

$f^{-1}: [-2, 7] \rightarrow [-1, 2]$, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, deci

$f^{-1}: [-2, 7] \rightarrow [-1, 2]$, $f^{-1}(y) = \frac{4-y}{3}$

c) $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

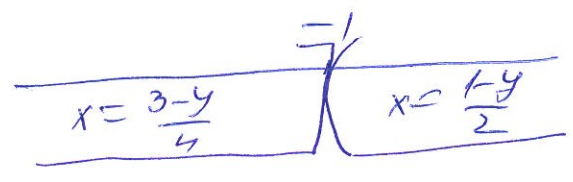
Pentru ecuație $f(x) = y$, $y \in (-1, 1)$ are soluție unică $x = \frac{1+y}{1-y} \in (0, \infty)$, deci f este inversabilă.

$f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = x = \frac{1+y}{1-y}$.

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x < 1 \\ 3-4x, & x \geq 1 \end{cases}$

Fiecare ecuație $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$ are soluție unică

$$x = \begin{cases} \frac{3-y}{4}, & y \leq -1 \\ \frac{1-y}{2}, & y > -1 \end{cases}$$



deci f este inversabilă și

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, deci

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{3-y}{4}, & y \leq -1 \\ \frac{1-y}{2}, & y > -1 \end{cases}$

2. Funcția

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2$ este

bijecție. Determinați $f^{-1}(2)$.

Sol. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 2 = y$

deci $f^{-1}(x^5 + 3x^3 - 2) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 1$ rezultă $f^{-1}(2) = 1$.

3. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{2}{x}$. Arătați că f este inversabilă. Determinați f^{-1} .

Sol. Considerăm ecuația $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$. Aici

$x - \frac{2}{x} = y$ rezultă că $x^2 - xy - 2 = 0$ și de aici

soluțiile $x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 8}}{2} < 0$ și $x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} > 0$

Priu urmare fiecare ecuație $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$ are o singură soluție $x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} \in (0, \infty)$, deci f este inversabilă și

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2}$

FUNCTII TRIGONOMETRICE INVERSE

a) funcția $\bar{f}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $\bar{f}(x) = \sin x$ este bijectivă, deci inversabilă, inversa se numește funcția arcsin.
Astfel $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \in [-1, 1]$$

Propoziție $\arcsin(-y) = -\arcsin y, \forall y \in [-1, 1]$

$$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin(\arcsin y) = y, \forall y \in [-1, 1]$$

b) funcția $\bar{f}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $\bar{f}(x) = \cos x$ este bijectivă, deci inversabilă, inversa se numește funcția arccos.
Astfel $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y, y \in [-1, 1], x \in [0, \pi]$$

Propoziție: $\arccos(-y) = \pi - \arccos y, y \in [-1, 1]$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]; \cos(\arccos y) = y, y \in [-1, 1]$$

c) funcția $\bar{f}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = \tan x$ este bijectivă. Inversa se numește funcția arctg.

$$\text{Astfel } \arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y \in \mathbb{R}$$

Propoziție: $\arctan(-y) = -\arctan y, y \in \mathbb{R}$

$$\arctan(\tan x) = x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \tan(\arctan y) = y, y \in \mathbb{R}$$

d) funcția $\bar{f}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = \cot x$ este bijectivă. Inversa se numește funcția arccotg

$$\text{Astfel } \operatorname{arccotg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$$\operatorname{arccotg} y = x \Leftrightarrow \cot x = y, y \in \mathbb{R}, x \in (0, \pi)$$

Propoziție: $\operatorname{arccotg}(-y) = \pi - \operatorname{arccotg} y, y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arccotg}(\cot x) = x, x \in (0, \pi); \cot(\operatorname{arccotg} y) = y, y \in \mathbb{R}$$

Exemplu 1. Folosind tabelul de valori al funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri din primul

radiani

- 9 -

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

, deducem

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}; \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}; \arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\arctg(-1) = \pi - \arctg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

2. Calculăm: $E = \sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Sol: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ și

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}, \text{ deci } E = \sin \pi = 0$$

3. Calculăm: $E = \tg\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2}\right)$

Sol. Fie $\arctg \frac{1}{2} = a$, deci $\tg a = \frac{1}{2}$, $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Rezultă că $E = \tg\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \ctg a = \frac{1}{\tg a} = 2$

4. Calculăm: $E = \cos\left(2\arctg \frac{1}{2} - \arcsin \frac{4}{5}\right)$

Sol. Fie $\arctg \frac{1}{2} = a$, deci $\tg a = \frac{1}{2}$, $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și

$$\arcsin \frac{4}{5} = b, \text{ deci } \sin b = \frac{4}{5}, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Punem acum ambele probleme la următoarea problemă.

Dacă $\tg a = \frac{1}{2}$, $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin b = \frac{4}{5}$, $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

calculăm $E = \cos(2a - b)$

cum $E = \cos 2a \cos b + \sin 2a \sin b$ și

$$\cos 2a = \frac{1 - \tg^2 a}{1 + \tg^2 a} = \frac{3}{5}, \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \frac{3}{5}; \sin 2a = \frac{2 \tg a}{1 + \tg^2 a} = \frac{4}{5}$$

deducem $E = 1$.

5 Verificati că $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$.

Sol. Fie $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} = a$, $\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = b$, deci $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $b \in [0, \pi]$, Cum $\sin a > 0$, $\cos b > 0$

deducem $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $b \in (0, \frac{\pi}{2})$,

Calculăm $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b =$
 $= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deducem $\cos(a+b) = \cos \frac{\pi}{4}$

Si cum $a+b, \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$ si functia $\cos$ este
injectiva pe $[0, \pi] \Rightarrow a+b = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEME PROPUSE

Stabiliti care dintre functiile urmatoare sunt
injective, surjective, bijective. Determinati f^{-1} daca
este cazul.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2$
R. f nu este nici injectiva si nici surjectiva

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + |2-x|$
R. f nu este nici injectiva si nici surjectiva

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$
R. f este injectiva dar nu este surjectiva.

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$
R. f este surjectiva dar nu este injectiva.

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$
este inversabila si $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{3}, & y \leq 2 \\ y-1, & y > 2 \end{cases}$

6. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 5n+2$

R. f este injectivă dar nu este surjectivă

7. $f: [2, 3] \rightarrow [5, 8]$, $f(x) = 3x - 1$

R. f este bijectivă și $f^{-1}: [5, 8] \rightarrow [2, 3]$, $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.

8. $f: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$

R. f este bijectivă, $f^{-1}: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}$

9. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = -x + 3$

R. f este bijectivă și $f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f^{-1}(y) = -y + 3$

10. $f: [1, \infty) \rightarrow [3, \infty)$, $f(x) = 1 + \sqrt{x+3}$

f este bijectivă, $f^{-1}: [3, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f^{-1}(y) = (y-1)^2 - 3$

11. $f: [1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$,

f este bijectivă și $f^{-1}: [2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-2}$.

12. $f: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \lg(x-1)$

f este bijectivă $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$, $f^{-1}(y) = 10^y + 1$

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow (-3, \infty)$, $f(x) = 2^x - 3$

f este bijectivă $f^{-1}: (-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \log_2(y+3)$

14. $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

f este bijectivă, $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{y-1}$

15. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ este bijectivă.

Calculați $f^{-1}(6)$. R: $f^{-1}(6) = 1$

16. Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \lg x$ este bijectivă.

Calculați $f^{-1}(11)$ R: $f^{-1}(11) = 10$

17. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$

Determinați $a \in \mathbb{R}$ dacă f este a) injectivă b) surjectivă

c) bijectivă.

R. a) $a \geq 1$ b) $a \leq 1$ c) $a = 1$.

18. Calculați:

a) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

b) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{3}{5}\right)$

c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos(-1)\right)$

d) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin\frac{12}{13}\right)$

19. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(\cos x)$. Calculați.

$$S = f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(2016\pi).$$

20. Arătați că $\sin(4 \operatorname{arctg}\frac{1}{3}) = \cos(2 \operatorname{arctg}\frac{1}{7})$

21. Arătați că a) $\arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{13}{14} = \frac{\pi}{3}$.

b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}2 = \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$