Seminar 1 - Recapitularea proprietatilor legilor de compozitie, semigrupuri, monoizi, grupuri

1. Dintre multimile de numere studiate in liceu, care au structura de monoid, respectiv grup in raport cu adunarea, respectiv inmultirea?

2. Pe multimea $\mathbb{N}$ definim urmatoarele legi de compozitie interne: $a * b = (a, b)$, $a \triangle b = [a, b]$, unde (a, b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a, b si $[a, b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a, b. Verificati ca $(\mathbb{N}, *)$ si $(\mathbb{N}, \triangle)$ sunt monoizi comutativi si cele doua legi sunt distributive una fata de cealalta.

3. Studiati proprietatile legii de compozitie $* : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $a * b = a^b$.

4. Fie legea de compozitie $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x * y = x + y - xy - ax - ay + a$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde a e un parametru real fixat. Studiati proprietatile acestei legi de compozitie in functie de a.

5. Consideram urmatoarele multimi de matrice:

   (a) $Gl(n, \mathbb{C}) = \{A \in | \det A \neq 0\}$ multimea matricelor nesingulare cu elemente numere complexe

   (b) $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A\,{}^tA = {}^tAA = I_n\} = \{A \in Gl(n, \mathbb{C}) \mid {}^tA = A^{-1}\}$ multimea matricelor ortogonale

   (c) $Sl(n, \mathbb{C}) = \{A \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$

   (d) $\mathcal{U}(n, \mathbb{C}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{C}) \mid \bar{A} = A^*\}$ multimea matricelor unitare, unde $A^* =^t A^{-1}$ si $\bar{A}$ este conjugata matricei A. Observam ca $A \in \mathcal{U}(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ si $A^{-1} =^t \bar{A}$.

   (e) $S_p(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^tAJA = J\}$, unde $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Demonstrati ca aceste multimi au structura de grup in raport cu operatia de inmultire a matricelor. Mai exact $O(n, \mathbb{C})$, $\mathcal{U}(n, \mathbb{C})$ sunt subgrupuri ale grupului $Gl(n, \mathbb{C})$, $Sl(n, \mathbb{C})$ este subgrup al grupului $O(n, \mathbb{C})$, $S_p(n, \mathbb{C})$ este subgrup al lui $Gl(2n, \mathbb{C})$. Ele se numesc:

- $Gl(n, \mathbb{C})$- grupul liniar general complex de ordinul n
- $O(n, \mathbb{C})$- grupul ortogonal complex de ordinul n
- $Sl(n, \mathbb{C})$- grupul ortogonal complex special
- $\mathcal{U}(n, \mathbb{C})$- grupul unitar de ordin n
- $S_p(n, \mathbb{C})$- grupul simplectic complex de ordin n

Obs: Evident putem defini $Gl(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ si $S_p(n, \mathbb{R})$ si acestea sunt subgrupuri ale grupurilor corespunzatoare de matrice cu elemente numere complexe.