

Seminar 2: Grupuri, inele, corpuri

1. Pe \mathbb{Z} definim legea de compozitie interna

$$x * y = axy + b(x + y) + c, \forall x, y, \in \mathbb{Z},$$

unde a, b, c sunt trei numere intregi fixate, $b \neq 0$. Demonstrati ca:

- (a) $(\mathbb{Z}, *)$ e semigrup daca si numai daca $b = b^2 - ac$.
(b) $(\mathbb{Z}, *)$ e monoid daca si numai daca $b = b^2 - ac$ si $b \mid c$.

2. Care e numarul legilor de compozitie care se pot defini pe o multime cu n elemente? Cate dintre ele sunt comutative? Cate admit element neutru?

3. Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legea de compozitie interna

$$(x, y) * (z, w) = (xz, yz + w), \forall x, y, z, w \in \mathbb{Z}.$$

Aratati ca $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ e monoid si determinati $\mathcal{U}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$.

4. Fie $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo n , $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrati ca $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp daca si numai daca n este numar prim.

5. Determinati A^{-1} pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$.

6. Determinati rangul urmatoarelor matrice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha - 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in$

\mathbb{R} .