Seminar 11

1. Demonstrati ca urmatoarele functii $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ determina un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Calculati apoi $g(a, b) =:=< a, b >:= a \cdot b$ si unghiul dintre a si b .

    (a) $n = 5$, $g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_5y_5$, $a = (1, 2, 3, 4, 5)$, $b = (-1, 2, -3, 4, -5)$;
    (b) $n = 3$, $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$, $a = (1, -2, 0)$, $b = (2, -3, 1)$;
    (c) $n = 3$, $g(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$, $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 4)$;
    (d) $n = 4$, $g(x, y) = \alpha x_1y_1 + \beta x_2y_2 + \gamma x_3y_3 + 4\delta x_4y_4$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \infty)$, $a = (1, -1, 2, 3)$, $b = (0, 2, -1, 2)$, $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4$.

2. Fie $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$. Demonstrati ca g este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$ daca si numai daca $\begin{cases} a_{11} > 0, \\ a_{12} = a_{21}, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \end{cases}$ Exemplu: $g(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

3. Demonstrati ca urmatoarele aplicatii nu sunt produse scalare pe $\mathbb{R}^2$:

    (a) $g_1(x, y) = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$;

    (b) $g_2(x, y) = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 5x_2y_2 + 1$;

    (c) $g_3(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$.

4. In raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ ortonormati urmatoarele sisteme de vectori, folosind procedeul Gram-Schmidt:

    (a) $v_1 = (2, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, -2)$, $v_3 = (2, -2, 1)$;
    (b) $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (1, 1, -5)$, $v_3 = (3, 2, 8)$;
    (c) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (3, 4, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1)$;
    (d) $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (-4, 0, 5)$, $v_3 = (-8, 2, 0)$;
    (e) $v_1 = (1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (4, -2, 4, -2)$, $v_3 = (-2, 7, -4, 7)$, $v_4 = (2, 7, -2, 5)$.

5. Ortogonalizati sistemul de vectori dat (in raport cu produsul scalar canonic) apoi completati-l la o baza ortogonala in $\mathbb{R}^3$:

    (a) $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (4, -5, 3)$;
    (b) $a_1 = (2, 0, -1)$, $a_2 = (5, -1, 0)$;
    (c) $a_1 = (2, 1, -2)$, $a_2 = (4, 1, 0)$.

6. Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o forma biliniara

$$g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3.$$

   (a) Demonstrati ca g este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinati o baza ortonormata in raport cu acest produs scalar.
   (c) Determinati unghiul dintre vectorii $u = (1,-1,1),\ v = (0,-1,2)$.

7. Fie

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demonstrati ca G defineste un produs scalar g pe $\mathbb{R}^3$ astfel incat G sa fie matricea asociata acestuia in raport cu baza canonica a lui $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinati o baza a lui $\mathbb{R}^3$ ortonormata in raport cu g.

8. Pe spatiul liniar real al functiilor continue $\mathcal{C}_{[a,b]}$ se considera

$$g(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

   (a) Demonstrati ca g este un produs scalar pe $\mathcal{C}_{[a,b]}$ si scrieti inegalitatile lui Cauchy si Minkowski.
   (b) Determinati normele si unghiul dintre $f(x) = x$ si $g(x) = mx^2,\ x \in [a,b],\ m \in \mathbb{R}^*$.
   (c) Ortonormati sistemul de functii $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x$ in $\mathcal{C}_{[0,\pi]}$.

9. Demonstrati ca aplicatia $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita prin $g(A,B) = Tr\left(AB^T\right)$ este un produs scalar pe spatiul liniar real $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstrati ca sistemul de vectori

$$B = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

   constituie o baza in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Precizati daca aceasta baza este ortogonala in raport cu produsul scalar uzual pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. In caz contrar sa se ortonormeze aceasta baza folosind procedeul Gram-Schmidt.

10. Pe spatiul liniar real $\mathbb{R}_2[X]$ al polinoamelor de grad cel mult 2, cu coeficienti reali, in nedeterminata X, se considera produsul scalar definit prin $g(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Cercetati daca $B = \{1,\ X,\ X^2\}$ este baza ortogonala in $\mathbb{R}_2[X]$ in raport cu acest produs scalar. In caz contrar determinati o baza ortogonala in $\mathbb{R}_2[X]$ folosind procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.