Seminar 12

1. Fie $\| \cdot \|: V \to [0, \infty)$ norma indusa de un produs scalar $g : V \times V \to \mathbb{R}$ pe spatiul liniar real V. Demonstrati :

2. (inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz) $| g(u, v) | \leq \| u \| \| v \|$, $\forall u, v \in V$. Egalitatea are loc daca si numai daca $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel incat $u = \lambda v$;

   (a) (inegalitatea Minkowski) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$, $\forall u, v \in V$. Egalitatea are loc daca si numai daca $\exists \lambda \in [0, \infty)$ astfel incat $u = \lambda v$;

   (b) (egalitatea paralelogramului) $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \left(\| u \|^2 + \| v \|^2 \right)$;

   (c) (Pitagora) $u \perp v \Leftrightarrow \| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$;

   (d) Daca $S = \{u_1, \cdots, u_k\}$ este un sistem ortogonal de vectori din V, atunci
   $$\| \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \| = \sum_{i=1}^{k} \| u_i \|^2;$$

   (e) $u \perp v \Leftrightarrow \| u + v \| = \| u - v \|$;

   (f) $\| u \| = \| v \| \Leftrightarrow (u + v) \perp (u - v)$.

3. Verificati ca urmatoarele aplicatii sunt norme pe $\mathbb{R}^2$ care nu provin din produse scalare:

   (a) $\| (x_1, x_2) \|_T = | x_1 | + | x_2 |$;

   (b) $\| (x_1, x_2) \|_{max} = max \{| x_1 |, | x_2 |\}$;

   (c) Determinati functiile distanta induse de aceste norme pe $\mathbb{R}^2$. Reprezentati grafic cercurile unitate (cu centrul in $(0, 0)$) in raport cu cele doua distante.

   (d) Dati exemplu de o functie distanta care nu provine dintr-o norma.

4. Construiti suplementul ortogonal al subspatiului liniar $U = L(a_1, a_2, a_3)$ in $\mathbb{R}^4$, inzestrat cu produsul scalar canonic. Determinati apoi proiectia ortogonala a vectorului x pe U, respectiv pe $U^\perp$.

   (a) $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (3, 7, -1, 2)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$, $x = (1, 2, 3, 4)$;

   (b) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$, $x = (2, 1, -1, 3)$.

5. Determinati o baza ortonormata in raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^4$ in subspatiul liniar U al solutiilor sistemului
   $$\begin{cases} x - 2y + z + t &= 0, \\ 2x + y - 2z - t &= 0. \end{cases}$$
   Determinati apoi suplementul ortogonal al lui U in $\mathbb{R}^4$.

6. Fie $\mathbb{R}^4$ inzestrat cu structura euclidiana reala canonica si subspatiile liniare

$$\begin{aligned}
E' &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid\ x_1+x_3=0 \ si\ x_2+x_4=0\right\},\\
E'' &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid\ x_1-x_3=0 \ si\ x_2-x_4=0\right\},\\
E''' &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \ si\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=0\right\}.
\end{aligned}$$

Sa se arate ca $E' \perp E''$. Sa se determine o baza ortonormata in suplementul ortogonal al subspatiului E'''.

7. Fie $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ o baza in $\mathbb{R}^3$ si $g:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o forma biliniara a carei matrice in raport cu B este

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 6 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

(a) Verificati ca g defineste pe $\mathbb{R}^3$ o structura de spatiu liniar euclidian real.

(b) Fara a calcula lungimile vectorilor $w_1=e_1+e_2+e_3$, $w_2=-2e_1+e_3$, $w_3=-e_1+e_2+2e_3$, aratati ca $\| w_3 \| < \| w_1 \| + \| w_2 \|$, unde $\|\cdot\|$ este norma indusa de produsul scalar g.

(c) Determinati o baza ortonormata a subspatiului $U=Lin(w_1,w_2)\subset\mathbb{R}^3$ si sa se determine suplementul sau ortogonal in $\mathbb{R}^3$.

8. Demonstrati ca vectorii $e_1=(1,1,-1)$, $e_2=(1,-1,0)$, $e_3=(-1,0,1)$ formeaza o baza B in $\mathbb{R}^3$.

(a) Fie $g(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3$. Demonstrati ca $\left(\mathbb{R}^3,g\right)$ este spatiu liniar real euclidian.

(b) Determinati o baza $\tilde{B}$ ortonormata in raport cu g, pornind de la baza B.

(c) Fie $U=L(e_1,e_2)$. Descrieti $U^\perp$.

9. Verificati ca $S=\{v_1=(1,1,1),\ v_2=(-1,1,0),\ v_3=(1,1,-2)\}$ este un sistem ortogonal de vectori in raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^3$. Exprimati vectorul $v=(1,-1,1)$ ca o combinatie liniara a vectorilor lui S. Determinati proiectia ortogonala a vectorului $u=(1,3,-1)$ pe spatiul liniar $W=L(w_1,w_2)$, cu $w_1=(1,-2,1),\ w_2=(2,1,0)$.

10. Fie $\mathbb{C}$ spatiul liniar real al numerelor complexe si $g:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ forma biliniara a carei matrice in raport cu baza canonica $\{1,i\}$ este data de $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

(a) Demonstrati ca $(\mathbb{C},g)$ este un spatiu liniar euclidian real.

(b) In raport cu structura euclidiana determinata de g, sa se arate ca vectorul $2-i$ este unitar si sa se precizeze subspatiul vectorial al lui $\mathbb{C}$ ortogonal pe vectorul $2-i$.