Recapitularea unor noțiuni de algebră din materia de liceu

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

Acest material este o adaptare și completare a notelor de curs ale domnului Conf. Dr. Lucian Maticiuc. Se recapitulează o serie de noțiuni de algebră necesare înțelegerii materiei noi, legată de spațiile liniare.

1 Matrice şi determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

Cei interesați să aprofundeze această materie, pot folosi ca material bibliografic - **Mircea Ganga, Matematică, Manual pentru clasa a XIa, trunchi comun și curriculum diferențiat (4 ore), editura Mathpress, Ploiești, 2006**

1.1 Matrice şi determinanţi

Definiţia 1 *Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte **matrice reală cu m linii şi n coloane** (şi se va numi matrice de tip (m,n)), o aplicaţie de la $\{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$ la $\mathbb{R}$, care asociază fiecărei perechi (i, j) cu $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$ un unic număr real notat a_{ij}. Se foloseşte notaţia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{sau} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ j\in\overline{1,n}}} .$$

Notăm mulţimea tuturor matricelor reale de tipul (m,n) cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numerele a_{ij} cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **elementele matricei**.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $m = n$, atunci matricea A se numeşte **matrice pătratică** iar $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se va nota prin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $m = 1$, atunci matricea A se numeşte **matrice linie,**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

iar dacă $n = 1$, atunci matricea A se numeşte **matrice coloană**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bineînțeles, dacă elementele matricei sunt numere complexe, o numim matrice complexă și mulțimea tuturor matricelor complexe de tipul (m,n) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Corpurile numerelor reale, respectiv complexe, pot fi înlocuite cu un corp arbitrar. Dar noi ne limităm la cazurile matricelor reale și complexe în acest curs.

Spunem că A este **matricea nulă** dacă are toate elementele 0. O notăm $O_{m,n}$ sau O_n.

Matricea pătratică

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea unitate de ordinul** n.

Definiţia 2 *Prin **suma a două matrice** $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ înţelegem o nouă matrice $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice. Astfel, dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ și $B = (b_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $C = A + B$ este definită de $C = (c_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ cu*

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},\ i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\ .$$

Teorema 3 *Mulțimea matricelor reale (complexe), împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup comutativ. Adică au loc următoarele proprietăți.*

$$\begin{aligned} &(a) A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\ &(b) (A + B) + C = A + (B + C),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\ &(c) A + O_{m,n} = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\\ &(d)\ \forall A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}},\ \exists (-A) = (-a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}\ a.i.\ A + (-A) = O_{m,n}. \end{aligned}$$

Definiţia 4 *Prin **produsul matricei** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **cu scalarul** $\alpha \in \mathbb{R}$ se înţelege o nouă matrice, de același tip, obţinută prin înmulţirea tuturor elementelor lui A cu scalarul α. Astfel dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$ este un scalar oarecare, atunci αA este definită de*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

Teorema 5 *Înmulțirea matricelor cu scalari are următoarele proprietăți.*

$$\begin{aligned} &(a) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R};\\ &(b) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\\ &(c) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\\ &(d) 1A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Remarca 6 *Din proprietățile enunțate în ultimele două teoreme deducem că mulțimea matricelor reale, înzestrată cu adunarea matricelor și înmulțirea matricelor cu scalari reali are o structură de spațiu liniar (vectorial) real.*

Definiţia 7 *Prin **produsul matricelor** $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B = (b_{j,k})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ k\in\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ se înţelege o nouă matrice $C = (c_{i,k})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}} := AB$, ale cărei elemente sunt date prin:*

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},\ i \in \overline{1,n},\ k \in \overline{1,p}\ .$$

Exercițiul 8 *Fie* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ *și* $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *Atunci* $AB = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ax + by + cz)$ *este o matrice de tipul (1,1) și*

$$BA = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{pmatrix}$$

este o matrice de tipul (3,3).

Exercițiul 9 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *și* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Calculați* AB *și* BA. *Calculați și* AI_2 *și* I_2B.

Remarca 10 *Înmulțirea matricelor nu este comutativă. Astfel, dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *atunci se pot efectua produsele* AB *și* BA, *dar există exemple, așa cum am văzut, pentru care* $AB \neq BA$.

Exercițiul 11 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculați* A^n, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$ *(matricea* A^n *este, prin definiție,* $A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$ *).*

Exercițiul 12 *Să se efectueze diverse operații cu următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 13 *Fie trei matrice* A, B *și* C *arbitrare astfel încât tipurile lor permit efectuarea operațiilor indicate mai jos și* $\alpha \in \mathbb{R}$ *arbitrar. Atunci au loc următoarele afirmații:*

$$\begin{array}{llll} (a) & A(BC) = (AB)C; & (b) & A(B+C) = AB + AC; \\ (c) & (B+C)A = BA + CA; & (d) & \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B); \\ (e) & I_m A = A I_n = A & & \end{array}$$

(amconsiderat la (e) că A *e matrice de tipul* (m, n)*).*

Remarca 14 *Deoarece mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul* n, *împreună cu adunarea matricelor, are structură de grup abelian, înmulțirea matricelor pătratice este asociativă, admite element neutru (matricea unitate) și este distributivă față de adunarea matricelor, spunem că* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *este un inel unitar necomutativ.*

Teorema 15 *(Reguli de calcul pentru matrice care comută) Fie* $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *două matrice cu proprietatea că* $AB = BA$. *Atunci au loc următoarele afirmații:*

$(a) A^m B^n = B^n A^m, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*;$

$(b) A^k - B^k = (A - B)\left(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1}\right), \ \forall k \in \mathbb{N}^*;$

$(c)\, (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k, \, \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq 2.$

Definiţia 16 *Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeşte* ***transpusa matricei*** *A (şi o vom nota prin A^t) matricea obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor lui A, adică*

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Exerciţiul 17 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Scrieţi A^t.*

Teorema 18 *Fie două matrice A, B arbitrare astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operaţiilor indicate mai jos şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

$$(a) \quad (A^t)^t = A; \qquad (b) \quad (\alpha A)^t = \alpha A^t;$$
$$(c) \quad (A+B)^t = A^t + B^t; \qquad (d) \quad (AB)^t = B^t A^t.$$

Definiţia 19 *O matrice pătratică A care are proprietatea că $A = A^t$ (respectiv $-A = A^t$) se numeşte matrice simetrică (antisimetrică).*

Definiţia 20 *Fie o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se numeşte* ***determinant****ul matricei A, şi se notează cu $\det A$ sau cu $|A|$, numărul real definit recurent în modul următor:*
(a) dacă $n = 2$, atunci

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

(b) dacă $n > 2$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} D_{1i} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n} \ ,$$

unde D_{1i} este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obţinută prin eliminarea primei linii si a coloanei i din matricea A, pentru $i = \overline{1, n}$.

Remarca 21 *Prin definiţia de mai sus, calcularea unui determinant de ordin n se reduce la calcularea a n determinanţi de ordin $n-1$.*

Remarca 22 *În cazul particular $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ obţinem:*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru $n = 3$ se obţine regula lui Sarrus (copiind primele două linii sub matricea A):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Remarca 23 *În definiţia de mai sus de calcul a unui determinant s-a considerat dezvoltarea după prima linie, dar se poate considera (în mod echivalent) şi dezvoltarea după orice altă linie sau coloană.*

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ *se numeşte* ***complementul algebric corespunzător liniei*** i ***şi coloanei*** j, *pentru* $i, j = \overline{1, n}$. *Mai precis, în matricea* A, *suprimăm linia* i *şi coloana* j *şi obţinem o matrice de ordin* $(n-1)$ *al cărei determinant este* D_{ij}.

Folosind complemenţii algebrici corespunzători unei linii sau unei coloane, putem calcula determinantul unei matrice printr-o formulă asemănătoare celei din definiţie, dezvoltând după o linie sau coloană oarecare a matricei.

Teorema 24 *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Atunci pentru* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *fixaţi avem:*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \ , \end{aligned}$$

unde A_{ik} *este complementul algebric corespunzător liniei* i *şi coloanei* k.

Exerciţiul 25 *Calculaţi* $\det A$, *unde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Este avantajos să considerăm dezvoltarea după a treia coloană deoarece conţine două zerouri. Astfel

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left((-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left((-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -\left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = -4 - 8 = -12.$$

Teorema 26 *Pentru orice matrice* $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$, *determinantul ei se poate calcula astfel:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

unde $\mathcal{S}_n$ *reprezină mulțimea permutărilor de ordinul* n *și* $\epsilon(\sigma)$ *este signatura permutării* σ.

Observăm că în fiecare termen al sumei de mai sus intră un singur element de pe fiecare linie și fiecare coloană a matricei al cărei determinant îl calculăm.

Teorema 27 *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *arbitrare. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(a) $\det A^t = \det A$;

(b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

(c) *dacă matricea B este obţinută prin înmulţirea unei linii a lui A cu un scalar $\alpha \in R$, atunci*

$$\det B = \alpha \det A.$$

(d) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

(e) *dacă matricea A are o linie (sau o coloană) formată numai din zerouri, atunci* $\det A = 0$;

(f) *dacă matricea A are două linii (sau două coloane) egale sau proporţionale, atunci* $\det A = 0$;

(g) *dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu un scalar, atunci*

$$\det B = \det A;$$

(h) *dacă matricea B este obţinută prin interschimbarea a două linii ale lui A, atunci*

$$\det B = -\det A;$$

(i) *dacă pentru o matrice A, elementele liniei $i$se scriu sub forma $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij},\ j \in \overline{1,n}$, notând cu A', A'' matricele obținute din A prin înlocuirea elementelor liniei i cu elementele a'_{ij}, respectiv a''_{ij}, avem* $\det A = \det A' + \det A''$.

Remarca 28 *Proprietăţile (g), (h) şi (i) enunţate mai sus rămân valabile dacă operaţiile precizate se efectuează asupra coloanelor matricei A.*

Definiţia 29 *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte **nesingulară** dacă are determinantul nenul, şi se numeşte **singulară** dacă are determinantul nul.*

Definiţia 30 *Spunem că o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este **inversabilă** dacă există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (numită **matricea inversă** a lui A) cu proprietatea că*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \ ,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n.

Teorema 31 *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă şi numai dacă este matrice nesingulară. În acest caz, inversa acesteia este dată de formula:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

*unde A^* se numeşte **matricea adjunctă** a lui A şi este definită de*

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

iar A_{ij} este complementul algebric corespunzător liniei i şi coloanei j.

Remarca 32 *Adjuncta A^* se obţine înlocuind fiecare element al lui A^t prin complementul său algebric; mai precis, în matricea A^t, suprimăm linia i şi coloana j şi obţinem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij}, iar $A_{i,j} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{i,j}$.*

Exerciţiul 33 *Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculaţi* $\det A$, *A^t, A^* şi A^{-1}.*

Vom obţine $\det A = -2$ şi $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 34 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculaţi* $\det A$, A^t, A^* *şi* A^{-1}.

Vom obţine $\det A = 1$ şi $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Definiţia 35 *Fie* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *şi* $p \le \min(m, n)$.
(a) *Se numeşte* ***minor de ordinul*** p ***al matricei*** A, *orice determinant de ordin* p *al unei matrice obţinute prin intersectarea a* p *linii şi* p *coloane din* A;
(b) *Se numeşte* ***rangul matricei*** A *(şi se notează cu* $rang\,(A)$*), ordinul maxim al minorilor nenuli ai lui* A.

Remarca 36 *Prin urmare,* $r \le \min(m, n)$ *este rangul matricei* A *dacă aceasta are un minor de ordin* r *nenul şi toţi minorii de ordin mai mare decât* r *(dacă există) sunt nuli.*

Remarca 37 *Operaţiile care păstrează rangul unei matrice se numesc transformări elementare şi sunt următoarele:*
- *înmulţirea unei linii (coloane) cu o constantă nenulă*
- *interschimbarea a două linii (coloane)*
- *adunarea unei linii (coloane) înmulţită cu o constantă la o altă linie (coloană).*

Remarca 38 ***Pentru calculul rangului unei matrice se foloseşte teorema lui Kronecker:***
dacă într-o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ***există un minor de ordin*** $r \le \min(m, n)$ ***nenul şi toţi minorii de ordin*** $(r + 1)$ ***ce se pot forma cu aceştia, prin bordarea cu elementele unei noi linii şi ale unei noi coloane sunt nuli, atunci*** $rang\,(A) = r$.

Exerciţiul 39 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculaţi* $rang\,(A)$.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ şi $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ şi $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $rang\,(A) = 2$.

1.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Definiţia 40 *Se numeşte* ***sistem de ecuaţii liniare*** *un sistem de forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Definiţia 41 *Matricele formate cu ajutorul coeficienţilor sistemului*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; \bar{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numesc ***matricea sistemului****, respectiv* ***matricea extinsă a sistemului****.*

Remarca 42 *Sistemul (1) este un sistem algebric liniar de m ecuaţii cu n necunoscute. Folosind notaţiile precedente, acesta se poate scrie sub forma restrânsă (matriceală)*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

unde $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *iar* $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^t \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ *reprezintă matricea necunoscutelor şi, respectiv, matricea termenilor liberi.*

Propoziţia 43 *Dacă A este matrice pătratică nesingulară, atunci soluţia sistemului este dată de*

$$X = A^{-1}B.$$

Definiţia 44 *Dacă toţi termenii liberi sunt nuli, i.e. $B = O_{m,1}$ ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), atunci sistemul se numeşte* ***omogen****.*

Definiţia 45 *Dacă $B \neq O_{m,1}$, atunci sistemul se numeşte* ***neomogen****.*

Definiţia 46 (a) *Rangul matricei A se numeşte* ***rangul sistemului****.*
(b) *Dacă există numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ care verifică ecuaţiile sistemului (1), spunem că n–uplul $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie a sistemului (1).*

Remarca 47 *A rezolva un sistem de ecuaţii înseamnă a găsi soluţiile $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Definiţia 48 (a) *Sistemul (1) este* ***compatibil*** *dacă admite cel puţin o soluţie.*
(b) *Sistemul (1) este* ***incompatibil*** *dacă nu admite nici o soluţie.*
(c) *Sistemul (1) este* ***compatibil determinat*** *dacă admite o singură soluţie.*
(d) *Sistemul (1) este* ***compatibil nedeterminat*** *dacă admite mai multe soluţii.*

În cazul în care numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$), pentru rezolvarea sistemului se poate folosi **regula lui Cramer**

Teorema 49 (Regula lui Cramer) *Fie sistemul cu n ecuaţii şi n necunoscute*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Dacă $\det A \neq 0$***, atunci sistemul este compatibil şi are soluţia unică dată de***

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

unde $D = \det A$***, iar*** D_i ***este determinantul matricei obţinută prin înlocuirea în matricea*** A ***a coloanei*** i ***cu coloana termenilor liberi, pentru*** $i = \overline{1, n}$***.***

Exerciţiul 50 *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 10 \\ 2x-y+z &= 5 \\ x+y-z &= 4 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *şi* $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. *Observăm că* $\det(A) = 15 \neq 0$, *deci sistemul are soluţie unică dată de regula lui Cramer. Calculăm*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 45,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

şi deci

$$(x,y,z) = \frac{1}{15}(45,30,15) = (3,2,1).$$

Definiţia 51 *Fie* $r = rang\,(A) \leq \min\{m,n\}$. *Se numeşte* ***minor (determinant) principal al sistemului*** *(1), orice minor de ordin* r *nenul al matricei* A.

Definiţia 52 *Fie* $r = rang\,(A) \leq \min\{m,n\}$. *Se numeşte* ***minor (determinant) caracteristic asociat minorului principal****, orice minor de ordin* $(r+1)$ *al matricei extinse* $\bar{A}$ *obţinut prin bordarea minorului principal cu elemente ale uneia dintre liniile rămase şi ale coloanei termenilor liberi corespunzători.*

Remarca 53 *Ecuaţiile şi necunoscutele corespunzătoare minorului principal se numesc* ***ecuaţii şi, respectiv, necunoscute principale****, celelalte numindu-se* ***necunoscute secundare****.*

Teorema 54 (Kronecker–Capelli) ***Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă matricele*** A ***şi*** $\bar{A}$ ***au acelaşi rang, adică*** $rang\,(A) = rang\,(\bar{A})$.

Teorema 55 (Rouche) ***Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă toți minorii caracteristici sunt nuli****.*

Remarca 56 *Întrucât matricea extinsă* $\bar{A}$ *este obţinută prin adăugarea unei coloane la matricea* A*, în general avem că* $rang(A) \leq rang(\bar{A})$*. Aşadar un sistem este incompatibil dacă prin adăugarea coloanei termenilor liberi se măreşte rangul matricei.*

Remarca 57 *În concluzie, notând cu* $r := rang(A)$ *şi cu* m *şi* n *numărul de linii, respectiv de coloane ale sistemului, au loc următoarele cazuri:*
(a) *Dacă* $r = m$*, atunci sistemul este compatibil şi atunci:*
(a_1) *Dacă* $m = n$*, atunci sistemul este compatibil determinat (şi atunci soluţia sistemului se obţine aplicând regula de calcul a lui Cramer).*
(a_2) *Dacă* $m < n$*, atunci sistemul este compatibil nedeterminat şi admite o infinitate de soluţii (şi atunci soluţiile sistemului se obţin parametrizând necunoscutele secundare şi rezolvând sistemul format din ecuaţiile principale şi necunoscutele principale).*
(b) *Dacă* $r < m$*, atunci aplicăm teorema lui Kronecker–Capelli sau teorema lui Rouche.*

Remarca 58 *Deci*

$$\text{Un sistem este} \begin{cases} \text{compatibil determinat dacă:} & rang(A) = rang(\bar{A}) = n, \\ \text{compatibil nedeterminat dacă:} & rang(A) = rang(\bar{A}) < n, \\ \text{incompatibil dacă:} & rang(A) < rang(\bar{A}), \end{cases}$$

unde n *este numărul de necunoscute.*

Remarca 59 *Practic: se scriu matricele A şi $\bar{A}$ şi se calculează rangul lor. Dacă $rang(A) < rang(\bar{A})$, atunci sistemul este incompatibil. Dacă $rang(A) = rang(\bar{A})$, atunci sistemul este compatibil.*

Acum, dacă rangul obţinut este egal cu numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluţia dată de regula lui Cramer.

Dacă rangul obţinut este mai mic strict decât numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil nedeterminat; pentru a găsi soluţia, determinăm, folosind minorul principal (cel care dă rangul), ecuaţiile principale şi necunoscutele principale. Celelate necunoscute se vor numi secundare şi se vor renota cu alte litere (vor deveni parametri), urmând ca necunoscutele principale să se determine în funcţie de aceste necunoscute secundare.

Exerciţiul 60 *Să se rezolve şi să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ -3x + 12y - 3z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului şi matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $rang\,(A) = rang\,(\bar{A}) = 2$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este compatibil dar nedeterminat (admite o soluţie dar aceasta nu este unică). Determinantul principal (cel care dă rangul) este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, deci necunoscutele x şi z sunt necunoscutele principale, iar y este necunoscuta secundară. Vom nota $y = \alpha$ şi rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} x - 3z & = 1 + 4\alpha \\ -3x - 3z & = 2 - 12\alpha \end{cases}$$

care are soluţia $(x, z) = (4\alpha - 1/4, -5/12)$, deci mulțimea soluţiilor sistemului iniţial este

$$\{(4\alpha - 1/4, \alpha, -5/12)\,, \ \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Remarca 61 *În cazul particular al sistemelor liniare şi omogene avem următoarele concluzii:*
(a) Un sistem liniar omogen este întotdeauna compatibil, el admiţând cel puţin soluţia banală $X = O$, i.e. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Evident $rang(A) = rang(\bar{A})$.
(b) Un sistem liniar omogen admite şi alte soluţii (diferite de cea banală) dacă şi numai dacă $rang(A)$ este mai mic decât numărul de necunoscute.
(c) Prin urmare, un sistem liniar omogen în care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute admite şi alte soluţii (diferite de cea banală) dacă şi numai dacă $\det(A) = 0$.

Exerciţiul 62 *Să se rezolve şi să se discute următorul sistem omogen:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ şi calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci $rangA \geq 2$. Apoi prin bordarea minorului Δ_2 obţinem doi minori de ordin superior $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ şi

$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. *Deoarece sunt nuli deducem că* $rang\,(A) = 2$. *Evident* $rang\bar{A} = rangA$, *deci sistemul este compatibil dar nedeterminat; astfel necunoscutele principale sunt* x_1 *şi* x_2 *iar ecuaţiile principale sunt primele două. Necunoscutele secundare sunt celelalte două şi le vom parametriza:* $\alpha := x_3$ *şi* $\beta := x_4$. *Sistemul devine*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -2\alpha + \beta \\ 2x_1 & = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

care are soluţia $x_1 = (\alpha - 3\beta)/2$, $x_2 = -5\,(\alpha - \beta)/4$.

Sistemul iniţial are mulțimea soluţiilor $\left\{ \left(\frac{\alpha-3\beta}{2}, \frac{-5(\alpha-\beta)}{4}, \alpha, \beta \right),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

Exerciţiul 63 (metoda lui Gauss) *Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul*

$$\begin{cases} x + y + 3z & = 10 \\ -2x + 3y - z & = 5 \\ -x - 2y + 3z & = 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

Există însă şi o metodă alternativă de a studia sistemul. Aceasta este ***metoda lui Gauss*** *pe care o prezentăm în continuare.*

Matricea extinsă a sistemului este $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *şi* ***vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală, la fiecare pas noul sistem obținut fiind echivalent cu cel inițial.***

Astfel vom aduna prima linie înmulţită cu constante convenabile la celelalte linii (ştim că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, rangul noii matrice obţinute nu se modifică).

Apoi vom aduna a doua linie înmulţită cu constante convenabile la următoarele linii, ş.a.m.d..

Astfel vom obţine zerouri pe coloane şi sistemul obţinut va fi unul triunghiular care se rezolvă imediat plecând de la ultima ecuaţie.

În cazul nostru, notând formal liniile cu L_i, *scriem* $2L_1 + L_2$, $L_1 + L_2$, *apoi* $\frac{1}{5}L_2' + L_3'$ *şi obţinem*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2+2 & 3+2 & -1+6 & 5+20 \\ -1+1 & -2+1 & 3+3 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1+1 & 6+1 & 16+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + y + 3z & = 10 \\ 5y + 5z & = 25 \\ 17z & = 21 \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$.

Remarca 64 ***Evident, metoda lui Gauss este utilă şi pentru determinarea rangului unei matrice şi pentru calcul de determinanţi. Menţionăm, în plus, că, pentru a aplica metoda lui Gauss, nu contează numărul de ecuaţii şi de necunoscute ale sistemului.***

1.3 Exerciţii

1. Să se efectueze diverse operaţii cu matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 55 & 18 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -5 \\ -26 & 20 & -3 \\ -10 & 15 & -7 \end{pmatrix}.$$

Calculaţi şi: $A^t + B$, BC, DE şi ED.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Determinaţi k astfel încât $AB = BA$.

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10+5k \\ -9 & 15+k \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 6-3k & 15+k \end{pmatrix}.$$

Deci $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} -10+5k & = 15 \\ 6-3k & = -9 \end{cases}$, sistem care are soluţia $k = 5$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se verifice că $AB = AC$, deşi $B \neq C$. Explicaţi.

Rezolvare:

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Dacă matricea A ar fi nesingulară, i.e. $\det A \neq 0$, atunci ar fi inversabilă, deci ar exista inversa A^{-1}. Înmulţind egalitatea cu A^{-1} în partea stângă obţinem $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow I_2B = I_2C \Leftrightarrow B = C$. Dar $\det A = 0$ deci A nu admite inversă.

4. Să se calculeze determinanţii:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix};\ (b)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ (c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după prima linie care conţine două zerouri)}$$

$$= +1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \left(+3\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}\right) + \left(+2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (3\,(-49) - 4\cdot 49 + 7\cdot 49) + (2\cdot 49 - 3\cdot 2 + 4\cdot 31) = 216.$$

(b) Avem

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după a patra coloană care conţine două zerouri)}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -2\cdot 67 + 2\cdot 14 = -106.$$

(c) Avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$ (se va dezvolta după prima linie, apoi după a doua linie, apoi după a treia linie).

5. Să se calculeze determinanţii:

$$(a)\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix};\ (b)\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix}$$

$(c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $(d)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Aplicăm proprietatea: *dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu un scalar, atunci* $\det B = \det A$.

(a) Înmulţind coloana a doua cu -3 şi adunând-o la a treia coloană, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 0 \\ 2! & 2! & 0 \\ 3! & 3! & 3!-3\cdot 3! \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după coloana a treia)}$$

$$= -\left(3-1\right)3!\begin{vmatrix} 1! & 2! \\ 2! & 2! \end{vmatrix} = -2\cdot 3!\cdot\left(2!-2\cdot 2!\right) = 2\cdot 1\cdot 3!\cdot 2! = \left(-1\right)^{3+1}\left(3-1\right)!\,3!\,2!\,1!.$$

(b) Înmulţind coloana a treia cu -4 şi adunând-o la a patra coloană, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 2! & 3! & 4! \\ 3! & 3! & 3! & 4! \\ 4! & 4! & 4! & 4! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 0 \\ 2! & 2! & 3! & 0 \\ 3! & 3! & 3! & 0 \\ 4! & 4! & 4! & 4!-4\cdot 4! \end{vmatrix} = \text{(dezvoltăm după coloana a patra)}$$

$$= -\left(4-1\right)4!\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 2! & 3! \\ 3! & 3! & 3! \end{vmatrix} = -\left(4-1\right)\,4!\,\left(-1\right)^{3+1}\left(3-1\right)!\,3!\,2!\,1! = \left(-1\right)^{4+1}\left(4-1\right)!\,4!\,3!\,2!\,1!\ .$$

(c) Înmulţind coloana a doua cu -1 şi adunând-o la a treia coloană (scădem coloana a doua din coloana a treia), obţinem, dezvoltând după ultima coloană, valoarea -2.

(d) Înmulţind coloana a doua cu -1 şi adunând-o la a patra coloană (scădem coloana a doua din coloana a patra), obţinem, dezvoltând după ultima coloană, valoarea -4.

6. Să se calculeze determinanţii Vandermonde

$$V_3\left(a,b,c\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad V_4\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm proprietatea: *dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu un scalar, atunci* $\det B = \det A$. Se va obţine, adunând la o line, linia precedentă înmulţită cu $(-a)$ şi dezvoltând apoi după linie sau coloană convenabilă,

$$V_3\left(a,b,c\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-a & b-a & c-a \\ a^2-a^2 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}.$$

Acum, putem calcula direct sau putem aplica o metodă de calcul a unui determinant: *dacă matricea B este obţinută prin înmulţirea unei linii (sau coloane) a lui A cu un scalar α*, atunci $\det B = \alpha \det A$. Deci

$$\begin{aligned} V_3(a,b,c) &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)V_2(b,c) = (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Aceeaşi tehnică se poate aplica acum şi pentru determinanţi Wandermonde de ordin superior. Astfel

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1-a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_1^2-a_1^2 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ a_1^3-a_1^3 & a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ 0 & a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & a_4^2-a_1a_4 \\ a_2^3-a_1a_2^2 & a_3^3-a_1a_3^2 & a_4^3-a_1a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)V_4(a_1,a_2,a_3)$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

Remarca 65 *Se poate şi aduna la fiecare coloană, prima coloana înmulţită cu -1 şi vom obţine:*

$$V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \cdots,$$

precum şi

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_1^3 & a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 & a_4^2-a_1^2 \\ a_2^3-a_1^3 & a_3^3-a_1^3 & a_4^3-a_1^3 \end{vmatrix} = \cdots.$$

7. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3\alpha & 2\alpha+\beta & \alpha+2\beta & 3\beta \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta & 2\alpha\beta+\beta^2 & 3\beta^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 3\alpha & 2\alpha+\beta-3\alpha & \alpha+2\beta-3\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha^2 & 2\alpha\beta+\beta^2-3\alpha^2 & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta-\alpha^3 & \alpha\beta^2-\alpha^3 & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 2\beta-2\alpha & 3\beta-3\alpha \\ 2\alpha(\beta-\alpha) & (\beta-\alpha)(2\alpha+\beta+\alpha) & 3\beta^2-3\alpha^2 \\ \alpha^2(\beta-\alpha) & \alpha\left(\beta^2-\alpha^2\right) & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta & 3(\beta+\alpha) \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha) & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta-4\alpha & 3(\beta+\alpha)-6\alpha \\ \alpha^2 & \alpha(\beta+\alpha)-2\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2-3\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)^3 \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 3\beta-3\alpha \\ \alpha\beta-\alpha^2 & \beta^2+\beta\alpha-2\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & \beta+\alpha+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)^6 .$$

8. Să se determine dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ este singulară sau nu. Dacă este nesingulară, atunci calculaţi inversa A^{-1}.

   Rezolvare:

   Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, deci matricea este nesingulară şi deci inversabilă.

   Inversa este dată de formula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$. Pentru calculul adjunctei A^* scriem mai întâi transpusa $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ şi apoi

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

   şi deci $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} -26 & 0 & 13 \\ 7 & -1 & -1 \\ 18 & 3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7/13 & -1/13 & -1/13 \\ 18/13 & 3/13 & -10/13 \end{pmatrix}$.

9. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{vmatrix} = x^2 - 2x + m - 1$ care este diferit de zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă discriminantul este strict negativ. Deci matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $4 - 4(m-1) = 4(2-m) < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

10. Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $(b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

$(c)\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $(d)\ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

$(e)\ E = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $(f)\ F = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix}$;

$(g)\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$; $(h)\ H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$(a)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $(b)\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$;

$(c)\ C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$; $(d)\ D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$;

$(e)\ E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{3}{64} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{64} \end{pmatrix}$; $(f)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{128} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{256} & \frac{3}{256} & \frac{5}{256} \end{pmatrix}$;

$(g)\ G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(h)\ H^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Să se calculeze rangul următoarelor matrice pentru diferite valori ale parametrului real α:

$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$; $(b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

(a) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci $rang\,(A) \geq 2$. Calculăm şi minorul de ordinul al treilea (singurul care există): $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3 - 4\alpha$. Deci, dacă $\alpha = 3/4$, atunci $rang\,(A) = 2$, iar dacă $\alpha \neq 3/4$, atunci $rang\,(A) = 3$.

(b) Calculăm un minor de ordin doi: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci $rang\,(B) \geq 2$. Calculăm (este suficient conform teoremei lui Kronecker) şi cei doi minori de ordinul al treilea obţinuţi prin bordarea celui diferit de zero: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 6\alpha - 5$ şi

$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 15.$

Prin urmare, dacă $\alpha = 1$, atunci $\Delta_3 = 0$ şi $\Delta_3' = -12 \neq 0$ şi deci $rang\,(B) = 3$.
Dacă $\alpha = 5$, atunci $\Delta_3 = \Delta_3' = 0$ şi deci $rang\,(B) = 2$.
Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$, atunci $\Delta_3 \neq 0$ şi $\Delta_3' \neq 0$ şi deci $rang\,(B) = 3$.

12. Să se calculeze rangul matricelor:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Avem $rang\,(A) = 3$, $rang\,(B) = 2$, $rang\,(C) = 5$.

13. Să dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & n \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine m şi n astfel încât încât cele două matrice să aibă acelaşi rang.

Rezolvare:

Avem $rang\,(A) \geq 2$ şi $rang\,(A) = 3 \Leftrightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$.

Pe de altă parte $rang\,(B) \geq 2$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 3$ şi $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & n \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n - 1$.

Prin urmare $rang\,(B) = 3 \Leftrightarrow (m \neq -3$ sau $n \neq 1)$. Deci dacă $m = -3$, atunci $rang\,(A) = rang\,(B) = 2$ doar dacă $n = 1$, iar dacă $m \neq -3$, atunci $rang\,(A) = rang\,(B) = 3$.

14. Să se rezolve ecuaţia matriceală $XA = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, matricea A admite inversă şi fie A^{-1} această inversă. Înmulţind la dreapta egalităţii cu A^{-1} obţinem

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1},$$

deci a găsi X, înseamnă a găsi inversa lui A şi a calcula apoi produsul BA^{-1}. Se va obţine $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve matriceal sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 4z & = -3 \\ 2x - y + 3z & = -6 \\ x + y - 2z & = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, matricea necunoscutelor este $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ iar matricea termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Deci sistemul se rescrie matriceal sub forma $AX = B$. Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, matricea A admite inversă şi fie A^{-1} această inversă. Înmulţind la stânga egalităţii cu A^{-1} obţinem

$$AA^{-1}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

deci a găsi X, înseamnă a găsi inversa lui A şi a calcula apoi produsul $A^{-1}B$. Se va obţine $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, adică $x = -1$, $y = 1$ şi $z = -1$.

16. Folosind regula lui Cramer, să se rezolve următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z & = 38 \\ 3x + 5y + 2z & = 31 \\ 5x + 2y + 3z & = 31 \end{cases}$$

Rezolvare:

Calculăm mai întâi $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$, deci, sistemul având numărul de ecuaţii egal cu numărul necunoscutelor, este (conform regulii lui Cramer) compatibil determinat. Trebuie să mai calculăm şi determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} 38 & 3 & 5 \\ 31 & 5 & 2 \\ 31 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -140,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 38 & 5 \\ 3 & 31 & 2 \\ 5 & 31 & 3 \end{vmatrix} = -210,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 38 \\ 3 & 5 & 31 \\ 5 & 2 & 31 \end{vmatrix} = -350$$

iar $x = \dfrac{-140}{-70} = 2$, $y = \dfrac{-210}{-70} = 3$, $x = \dfrac{-350}{-70} = 5$ şi deci soluţia este $(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

17. Să se rezolve şi să se discute următoarele sisteme omogene:

$$(a)\ \begin{cases} x - 3y + 4z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 0 \\ 3x - 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

În cazul oricărui sistem omogen este evident că $rang\bar{A} = rangA$ (matricea $\bar{A}$ conţine în plus o coloană cu zerouri), şi deci orice sistem omogen este compatibil. În cazul $m = n$, dacă $\det A \neq 0$, atunci soluţia este unică dată de regula lui Cramer. Dar orice sistem omogen admite, evident, soluţia banală deci ea este singura soluţie.

Dacă $m = n$ şi $\det A = 0$, atunci soluţia nu este unică şi trebuie să determinăm necunoscutele principale şi pe cele secundare.

(a) Avem $\det A = 0$, şi deci sistemul compatibil este nedeterminat. Un minor principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci $rangA = 2$. Atunci acest minor principal determină ecuaţiile şi necunoscutele principale; astfel primele două ecuaţii sunt ecuaţii principale, x, y sunt necunoscute principale iar z, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x - 3y &= -4\alpha \\ x + 2y &= \alpha \end{cases}$$

care are soluţia $x = -\alpha$ şi $y = \alpha$, deci mulțimea soluţiilor sistemului iniţial este

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

(b) Avem $\det A = 0$. Un minor principal este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$ şi deci primele două ecuaţii sunt ecuaţii principale, x, y sunt necunoscute principale iar z, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + 2y &= -\alpha \\ x - 2y &= -2\alpha \end{cases}$$

care are soluţia $x = -3\alpha/2$ şi $y = \alpha/4$, deci mulțimea soluţiilor sistemului iniţial este $\{(-3\alpha/2, \alpha/4, \alpha)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

18. Să se rezolve şi să se discute sistemul omogen, în funcție de parametrul real λ:

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ 4x+5y+6z &= 0 \\ x+\lambda^2 z &= 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\det A = -3\left(1+\lambda^2\right) \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, deci sistemul este compatibil determinat, şi fiind sistem omogen, admite doar soluţia banală.

19. Să se rezolve şi să se discute sistemul omogen, în funcție de parametrul real m:

$$\begin{cases} x_1+x_2+mx_3-x_4 &= 0 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4 &= 0 \\ 3x_1-x_2-x_3-x_4 &= 0 \\ mx_1-2x_2-2x_3-2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24-4m$. Rezolvăm acum ecuaţia $\det A = 0 \Leftrightarrow 24-4m=0$.

Dacă $m \neq 6$, atunci sistemul este compatibil determinat, şi fiind sistem omogen, admite doar soluţia banală.

Dacă $m=6$, sistemul este compatibil dar nu admite soluţie unică. Un minor principal este $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -33$ şi deci primele trei ecuaţii sunt ecuaţii principale, x_1, x_2 şi x_3 sunt necunoscute principale iar x_4, notat cu α, este necunoscuta secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x_1+x_2+6x_3 &= \alpha \\ 2x_1+x_2-x_3 &= -\alpha \\ 3x_1-x_2-x_3 &= \alpha \end{cases}$$

care are soluţia unică dată de regula lui Cramer. Trebuie să mai calculăm determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 6 \\ -\alpha & 1 & -1 \\ \alpha & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\alpha,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 6 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 31\alpha,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & -\alpha \\ 3 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = -10\alpha$$

iar $x_1 = \dfrac{-4\alpha}{-33}$, $x_2 = \dfrac{31\alpha}{-33}$, $x_3 = \dfrac{-10\alpha}{-33}$ şi deci soluţiile sistemului iniţial sunt

$$\left\{ \frac{1}{33}\left(4\alpha, -31\alpha, 10\alpha, 33\alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

20. Să se rezolve şi să se discute sistemul, în funcție de parametrul real λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+z &= 1 \\ \lambda x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Observăm că $\det(A) = (1+\lambda)^2$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $\det A \neq 0$ şi deci sistemul are soluţie unică dată de regula lui Cramer. Calculăm

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda+3,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda-3,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda^2+2\lambda-2$$

şi deci

$$(x,y,z) \in \left\{ \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(3\lambda+3, 3\lambda-3, -2\lambda^2+2\lambda-2\right),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$

Dacă $\lambda = -1$, atunci $\det A = 0$ şi scriem $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculăm $rang\,(A) = 2$ şi $rang\left(\bar{A}\right) = 3$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

21. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x-4y-3z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ 2x+4y+2z &= 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem mai întâi matricea sistemului şi matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $rang\,(A) = 2$, deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, iar $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Pe de altă parte, $rang\left(\bar{A}\right) = 3$ deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ iar celălalt minor obţinut prin bordarea lui Δ_2 este $\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Deci $rang\,(A) \neq rang\left(\bar{A}\right)$ şi, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil.

22. Să se rezolve şi să se discute sistemul, în funcție de parametrii reali α, β:

$$\begin{cases} (\alpha-1)\,x+\alpha y+(\alpha+1)\,z &= 1 \\ (\beta-1)\,x+\beta y+(\beta+1)\,z &= 1 \\ x+y+z &= -2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Avem

$$A=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \beta-1 & \beta & \beta+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ \beta-1 & \beta & \beta+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ \beta-1 & \beta \end{vmatrix}=\alpha-\beta$ iar $\Delta_3=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \beta-1 & \beta & \beta+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

Dacă $\alpha\neq\beta$, atunci $rang\,(A)=2$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ \beta-1 & \beta \end{vmatrix}=\alpha-\beta$ iar $\Delta_3=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \beta-1 & \beta & \beta+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ şi $\Delta_3'=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & 1 \\ \beta-1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\beta-2\alpha\neq 0$ pentru $\alpha\neq\beta$. Deci $rang\,(A)=2\neq 3=rang\,(\bar{A})$, prin urmare sistemul este incompatibil.

Dacă $\alpha=\beta$, atunci calculăm $\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ iar $\Delta_3=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, deci $rang\,(A)=2$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A}=\begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calculăm $\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ iar Δ_3 este nul, oricum l-am alege. Deci $rang\,(\bar{A})=2=rang\,(A)$, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat.

Minorul principal este $\Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, deci prima şi a treia ecuaţie sunt cele principale, necunoscutele x şi y sunt necunoscutele principale, iar z este necunoscuta secundară. Vom nota $z=a$ şi rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} (\alpha-1)\,x+\alpha y &= -(\alpha+1)\,a \\ x+y &= -2-a \end{cases}$$

care are soluţia unică $(x,y)=(-1-2\alpha+a,-1+2\alpha-2a)$, pentru a fixat, deci mulțimea soluțiilor sistemului iniţial este $\{(-1-2\alpha+a,-1+2\alpha-2a,a)\,,\ a\in\mathbb{R}\}$.

23. Să se rezolve şi să se discute sistemele:

$$(a)\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ x_1+3x_2+x_3 &= 5 \\ x_1+x_2+5x_3 &= -7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3 &= 14 \end{cases};\quad (b)\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3 &= \lambda \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3 &= 1 \end{cases};$$

şi

$$(c)\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3 &= 11 \\ 7x_1-3x_2+5x_3 &= 6 \\ 3x_1+x_2-8x_3 &= 15 \\ 6x_1-5x_2+11x_3 &= -4 \end{cases}\quad (d)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4 \\ x_2-x_3+x_4 &= -3 \\ x_1+3x_2-3x_4 &= 1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases};$$

$$(e)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 & =11\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 & =12\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 & =13\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4 & =14 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem, mai întâi, matricea sistemului şi matricea extinsă. Calculăm rangurile lor şi vedem dacă sunt sau nu egale. Dacă nu sunt egale atunci sistemul este incompatibil. Dacă sunt egale atunci se determină necunoscutele principale şi pe cele secundare.

(a)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det\bar{A}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix}=0$, deducem că $rang\left(\bar{A}\right)\leq 3$. Pe de altă parte, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow rangA\geq 2$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=22\neq 0\Rightarrow rangA\geq 3$ şi $rang\bar{A}\geq 3$, deci obţinem $rang\,(A)=3=rang\left(\bar{A}\right)$, adică sistemul este compatibil. Minorul principal este Δ_3 deci primele trei ecuaţii sunt cele principale iar x_1,x_2,x_3 sunt necunoscutele principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 & =2\\ x_1+3x_2+x_3 & =5\\ x_1+x_2+5x_3 & =-7 \end{cases}$$

care are soluţia dată de regula lui Cramer. Se va obţine $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,-2)$.

(b) Avem

$$A=\begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

şi

$$\det A=\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3.$$

Iar $\det A=0\Leftrightarrow -\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=0$.

Rădăcinile (rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber) sunt $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$ şi $\lambda_3=3$ (adică $-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=(1-\lambda)^2(3-\lambda)$).

Deci dacă $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ atunci $\det A\neq 0$ și sistemul este compatibil determinat, soluţia unică fiind găsită cu regula lui Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} \lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2(\lambda-3)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & \lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2(4-\lambda)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ x_3 &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{1}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Dacă $\lambda = 1$ atunci $\det A = 0$ şi sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

Acum $rang\,(A) = 1 = rang\,(\bar{A})$ deci sistemul este compatibil nedeterminat şi, plecând de la minorul principal, găsim că necunoscutele principale şi ecuaţiile principale sunt x_1 respectiv prima ecuaţie. Sistemul devine, notând necunoscutele secundare $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$,

$$\begin{cases} x_1 = & 1 - \alpha - \beta \end{cases}$$

adică smulțimea soluțiilor sistemului iniţial este $\{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Dacă $\lambda = 3$ atunci $\det A = 0$ şi sistemul devine

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{cases}$$

Acum $rang\,(A) = 2$ şi $rang\,(\bar{A}) = 3$ deci sistemul este incompatibil.

(c) Avem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \\ 6 & -5 & 11 \end{pmatrix},\ \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 274 \neq 0 \Rightarrow rang A = 3$. În ceea ce priveşte pe $\bar{A}$, calculăm $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 11 \\ 7 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & 15 \\ 6 & -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 0$ deci $rang\,(\bar{A}) \leq 3$, prin urmare $rang\,(\bar{A}) = 3$ (deoarece există minorul $\Delta_3 \neq 0$). Obţinem $rang\,(A) = 3 = rang\,(\bar{A})$ şi deci sistemul este compatibil nedeterminat. Determinantul principal este Δ_3, deci necunoscutele x, y şi z sunt necunoscute principale iar primele trei ecuaţii sunt ecuaţiile principale. Sistemul devine

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 &= 15 \end{cases}$$

care este cu trei ecuaţii şi trei necunoscute şi care are determinantul matricei sistemului nenul. Deci se poate rezolva cu regula lui Cramer. Calculăm determinanţii

$$\begin{vmatrix} 11 & 4 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \\ 15 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 548, \quad \begin{vmatrix} 2 & 11 & -3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 15 & -8 \end{vmatrix} = 274, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -274$$

şi deci

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1)\,.$$

(d) Avem $rang\,(A) = 3 = rang\,(\bar{A})$ şi apoi $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(-8, 3+\alpha, 6+2\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(e) Avem $rang\,(A) = 4 = rang\,(\bar{A})$, iar soluţia este dată de regula lui Cramer, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 1)$.

24. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele:

$$(a)\begin{cases} x + 2y - 3z & = 0 \\ 2x - y + z & = -3 \\ y + 2z & = 4 \end{cases};\quad (b)\begin{cases} x + y + z - t & = 2 \\ 2x + y - z + 2t & = 9 \\ -x + 2y + 2z - t & = 5 \\ x + 3y - z - 2t & = -4 \end{cases}$$

şi

$$(c)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 & = -1 \end{cases};\quad (d)\begin{cases} x + 2y + z & = 3 \\ 2x - y + 3z & = 2 \\ x - 3y + 2z & = 0 \end{cases};\quad (e)\begin{cases} x - 2y + z & = -4 \\ 4x + 3y - 2z & = 11 \\ -2x + 3y + 4z & = 11 \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) Avem că $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$ şi numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute. Obţinem $rang\,(A) = 3 = rang\,(\bar{A})$ şi deci sistemul este compatibil determinat cu soluţia dată de regula lui Cramer.

Vom folosi metoda lui Gauss.

Scriem matricea extinsă $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală. Astfel vom aduna prima linie înmulţită cu constante convenabile la celelalte linii (ştim că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, sistemul e transformat intr-unul echivalent cu el). Apoi vom aduna a doua linie înmulţită cu constante convenabile la următoarele linii, ş.a.m.d.. Astfel obţinem zerouri pe coloane şi sistemul devine unul triunghiular. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2-2 & -1-4 & 1+6 & -3-0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1-1 & 2+7/5 & 4-3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 17/5 & 17/5 \end{pmatrix}$$

şi deci sistemul iniţial este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z & = 0 \\ -5y + 7z & = -3 \\ 17z/5 & = 17/5 \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 1)$.

(b) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ şi vom face transformări convenabile pentru a obţine zerouri sub diagonala principală. Obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2-2 & 1-2 & -1-2 & 2+2 & 9-4 \\ -1+1 & 2+1 & 2+1 & -1-1 & 5+2 \\ 1-1 & 3-1 & -1-1 & -2+1 & -4-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3-3 & 3-9 & -2+12 & 7+15 \\ 0 & 2-2 & -2-6 & -1+8 & -6+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8+8 & 7-\frac{8}{6}\cdot 10 & 4-\frac{8}{6}\cdot 22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & -76/3 \end{pmatrix}.$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x+y+z-t & = 2 \\ -y-3z+4t & = 5 \\ -6z+10t & = 22 \\ -19t/3 & = -76/3 \end{cases}$$

Soluţia lui este imediată $(x, y, z, t) = (1, 2, 3, 4)$.

(c) Avem, citind matricea extinsă,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

şi sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 & = 1 \\ -3x_2-x_3-3x_4 & = 0 \\ 0x_3+0x_4 & = -2 \end{cases}$$

care nu are soluţii deoarece am obţinut $0 = -2$, care este o contradicţie. Deci sistemul iniţial este incompatibil.

Se poate observa, calculând pentru sistemul iniţial cele două ranguri, că $rang\,(A) = 2$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ şi $\Delta_3, \Delta_3' = 0$) şi $rang\,(\bar{A}) = 3$ (deoarece $\Delta_2 \neq 0$ şi $\Delta_3, \Delta_3' = 0$ dar există şi $\Delta_3'' = 6 \neq 0$). Deci $rang\,(A) < rang\,(\bar{A})$ ceea ce înseamnă că sistemul dat este incompatibil.

2 Inelul polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ

Pentru aprofundarea acestui capitol puteți folosi - **Mircea Ganga, Matematică, Manual pentru clasa a XIIa, Elemente de algebră, profil M1, editura Mathpress, Ploiești, orice ediție**

În acest manual sunt tratate polinoamele cu coeficienți într-un corp comutativ, puteți să vă imaginați că acesta este corpul numerelor reale, sau corpul numerelor complexe, pentru a ușura înțelegerea materiei. Oricum, în cursul de algebră liniară, ne vom limita la aceste cazuri. Putem însă defini polinoamele pornind de la un inel unitar comutativ arbitrar.

Definiţia 66 *Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mulțimea tuturor șirurilor cu valori în $\mathbb{K}$ care au proprietatea că doar un număr finit de termeni sunt diferiți de zero.*

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{f = (a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots) \mid \exists m \in \mathbb{N}\, a.i.\, a_i = 0,\, \forall i > m\},$$

la care adăugăm și șirul nul $(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

*Se numește **polinom cu coeficienți în** $\mathbb{K}$ orice element al lui $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ se numește polinomul nul.*

*$a_0, a_1, \cdots, a_n$, unde $n = max\{k \in | \; k \neq 0\}$ se numesc **coeficienții polinomului**, iar n **gradul polinomului**.*

Definiţia 67 *Fie $f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots)$, $g = (b_0, b_1, \cdots, b_k, \cdots)$. Spunem $f = g \Leftrightarrow a_k = b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

În continuare, vom defini adunarea și înmulțirea polinoamelor.

Definiţia 68 *Fie $f = (a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots)$, $g = (b_0, b_1, \cdots, b_k, \cdots)$.*

*Atunci $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_k + b_k, \cdots)$ se numește **suma polinoamelor** f, g.*

Exerciţiul 69 *Efectuați suma polinoamelor $f = \left(1, 2 - i, 3, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$ și $g = (2 + i, 2 + i, i, 0, \cdots, 0, \cdots)$.*

Evident obținem $f + g = \left(3 + i, 4, 3 + i, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$.

Observăm că am adunat un polinom de grad 4 cu unul de grad 3 și am obținut un polinom de grad4.

Dar fie $h = \left(3, 1, i, -\frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$. Atunci $f + h = (4, 3 - i, 3 + i, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$, deci am adunat două polinoame de gradul 4 și am obținut un polinom de gradul 3.

Remarca 70 *Dacă f, g sunt două polinoame cu coeficienți în $\mathbb{K}$, atunci*

$$grad\,(f + g) \leq \max\{gradf + gradg\}.$$

Definiţia 71 *Fie $f = (a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots)$, $g = (b_0, b_1, \cdots, b_k, \cdots)$. Atunci $fg = (c_0, c_1, \cdots, c_k, \cdots)$ se numește **produsul polinoamelor** f, g, unde*

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\
\cdots&\cdots \\
c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.
\end{aligned}$$

Exerciţiul 72 *Efectuați produsul polinoamelor $f = \left(1, 2 - i, 3, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$ și*

$g = (2 + i, 2 + i, i, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Evident obținem $c_0 = 2 + i$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 7 + i$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 11 + 4i$, $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 8 + \frac{11}{2} i$, deci

$fg = \left(2 + i, 7 + i, 11 + 4i, 8 + \frac{11}{2} i, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$.

Remarca 73 *Dacă f, g sunt două polinoame cu coeficienți în corpul comutativ $\mathbb{K}$, atunci*

$$grad\,(f+g) = gradf + gradg.$$

Remarca 74 *Dar dacă am lucra cu polinoame cu coeficienți într-un inel unitar comutativ, care nu este corp? Am obține acelați rezultat?*

Hai să considerăm inelul claselor de resturi modulo 4 și polinul $f = \left(\hat{1}, \hat{2}, \hat{0}, \cdots, \hat{0}, \cdots\right)$. Atunci $f^2 = f \cdot f = \left(\hat{1}, \hat{0}, \cdots, \hat{0}, \cdots\right)$. Deci produsul a două polinoame de grad 2 este, în acest caz particular, de grad 1.

Deci pentru cazul polinoamelor cu coeficienți într-un inel comutativ, unitar, care nu este corp, avem

$$grad\,(f+g) \leq gradf + gradg.$$

Teorema 75 $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ *este un domeniul de integritate (inel unitar, fără divizori ai lui zero) , adică adunarea și înmulțirea polinoamelor au următoarele proprietăți.*

a) Adunarea polinoamelor este comutativă, $f + g = g + f$, $\forall f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

b) Adunarea polinoamelor este asociativă, $(f+g)+h = f+(g+h)\,, \forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

c) Adunarea polinoamelor admite polinomul nul $0 = (0, \cdots, 0, \cdots)$ ca element neutru, $f + 0 = 0 + f = f$, $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

d) Orice polinom f admite un polinom opus, adică un polinom notat $-f$ cu proprietatea $f + (-f) = (-f) + f = 0$;

e) Înmulțirea polinoamelor este comutativă, $fg = gf$, $\forall f, g \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

f) Înmulțirea polinoamelor este asociativă, $(fg)\,h = f\,(gh)\,, \forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

g) Înmulțirea polinoamelor admite polinomul $1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ ca element neutru, $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$, $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;

h) Produsul polinoamelor este distributiv față de adunarea polinoamelor, $(f+g)\,h = fh + gh$, $\forall f, g, h \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

i) Produsul oricăror două polinoame nenule este un polinom nenul.

Remarca 76 *Faptul că $\mathbb{K}$ este corp, nu doar inel, intervine doar la demonstrarea lui i).*

Evident, dacă $f = (a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots)$, atunci $-f = (-a_0, -a_1, \cdots, -a_k, \cdots)$.

Polinomul $1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ este numit polinomul unitate.

Prin convenție, gradul polinomului nul este $-\infty$.

Forma algebrică a unui polinom

Notăm cu $\mathbb{K}^0 = \{(a, 0, \cdots, 0, \cdots)\,, |\ a \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, mulțimea polinoamelor de grad 0, la care se adaugă polinomul nul. Evident, $\mathbb{K}^0$, împreună cu operațiile de adunare si înmulțire a polinoamelor (induse din $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), are structură de inel comutativ cu $0 \neq 1$. Mai mult, $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^0$, $\phi(a) = (a, 0, \cdots, 0, \cdots)\,, \forall a \in \mathbb{K}$, este izomorfism de inele, deci o aplicație bijectivă, cu proprietățile

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b),$$
$$\phi(a.b) = \phi(a)\phi(b),\ \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

Existența acestui izomorfism permite identificarea oricărui polinom de tipul $(a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ din $\mathbb{K}^0$ cu elementul a din $\mathbb{K}$. Din acest motiv, nu mai facem distincția dintre $\mathbb{K}^0$ și $\mathbb{K}$.

Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, în cazul în care unul dintre polinoame e de tipul $(a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ și celălalt arbitrar, $f = (f_0, f_1, \cdots, f_k, \cdots)$, produsul lor se noteaza simplu af și avem

$$af = (af_0, af_1, \cdots, af_k, \cdots)\,.$$

Numim această operație **înmulțirea polinoamelor cu scalari**.

Remarca 77 *Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ $\mathbb{K}$, împreună cu operația de adunare a polinoamelor și cu cea de înmulțire a polinoamelor cu scalari din $\mathbb{K}$ are structură de spațiu liniar peste $\mathbb{K}$.*

Notăm polinomul $(0,1,0,0,\cdots,0,\cdots)$ cu X. Folosind regula de înmulțire a polinoamelor, avem

$$\begin{aligned}
&X^2 = XX = (0,0,1,0,\cdots,0,\cdots),\\
&X^3 = XXX = (0,0,0,1,0,\cdots,0,\cdots),\\
&\cdots\cdots\\
&X^k = \underbrace{XX\cdots X}_{k\,ori} = \left(\underbrace{0,\cdots,0}_{k},1,0,\cdots,0,\cdots\right).
\end{aligned}$$

Considerăm $X^0 = 1$.

Numim polinomul X nedeterminata pe $\mathbb{K}$. Atenție, el nu reprezintă o variabilă, ci un polinom particular.

Astfel, orice polinom de grad n se scrie sub forma

$$\begin{aligned}
f &= (a_0,a_1,\cdots,a_n,0,\cdots,0,\cdots)\\
&= (a_0,0,\cdots,0,\cdots)+(0,a_1,0,\cdots,0,\cdots)+(0,0,a_2,0\cdots,0,\cdots)+\cdots(0,0,\cdots,0,a_n,0,\cdots,0,\cdots)\\
&= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,
\end{aligned}$$

numită **forma algebrică a polinomului f, ordonat după puterile crescătoare ale nedeterminatei X.**

Notăm mulțimea polinoamelor de nedeterminată X, cu coeficienți în $\mathbb{K}$, cu $\mathbb{K}[X]$, iar mulțimea polinoamelor de nedeterminată X, cu coeficienți în $\mathbb{K}$, de grad cel mult n, cu $\mathbb{K}_n[X]$.

Polinoamele de grad 0, de tipul $f = (a_0,0,\cdots,0,\cdots) = a_0$ se numesc polinoame constante.

Expresiile a_kX^k, $k \in \overline{0,n}$, se numesc termenii polinomului (sau monoame). a_0 se numește termenul liber al polinomului, iar a_n coeficientul dominant.

Forma algebrică a polinoamelor ajută la simplificarea scrierii și în cazul operațiilor cu polinoame.

Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m$ și $k \in \mathbb{K}$, atunci

$$\begin{aligned}
f+g &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\cdots+(a_i+b_i)X^i+\cdots(a_l+b_l)X^l,\ l=\max\{n,m\},\\
fg &= a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+\cdots+\left(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right)X^k+\cdots,\\
kf &= ka_0+ka_1X+ka_2X^2+\cdots+ka_nX^n.
\end{aligned}$$

Exercițiul 78 *Efectuați produsul polinoamelor*

a) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 + X$;

b) $f = iX + (1-i)X^2$, $g = 1 + i - iX + 2iX^2$.

a) Folosim distributivitatea înmulțirii polinoamelor față de adunarea lor, comutativitatea și asociativitatea adunării polinoamelor.

$fg = \left(1+X+X^2\right)(1+X) = \left(1+X+X^2\right)1+\left(1+X+X^2\right)X = 1+X+X^2+X+X^2+X^3 = 1+2X+2X^2+X^3$.

b) $fg = (i-1)X + 3X^2 + (-3-i)X^3 + (2+2i)X^4$.

Definiţia 79 *Fie $f \in \mathbb{K}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ și $x \in \mathbb{K}$. Elementul $f(x) := a_1x + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}$, se numește **valoarea polinomului f în x**.*

*Dacă $x_0 \in \mathbb{K}$ și $f(x_0) = 0$, spunem că x_0 **este rădăcină a polinomului** f.*

*Aplicația $\tilde{f} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$, se numește **funcția polinomială asociată polinomului** f.*

Pentru a afla rădăcinile unui polinom, îi asociem o ecuație și aflăm soluțiile ei.

Atenție, să nu confundăm noțiunile de mai jos.

Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$	Funcția polinomială asociată $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Ecuația asociată
$f = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax + b,\ a \neq 0$	$ax + b = 0,\ a \neq 0$
$f = aX^2 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$	$\tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,\ a_0 \neq 0$	$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_0 \neq 0$	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,\ a_0 \neq 0$
X = nedeterminată (e un polinom particular)	x = variabilă	x = necunoscută

Teorema împărțirii cu rest

Teorema 80 *Fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$, $g \neq 0$. Atunci există polinoamele unice $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât*

$$f = gq + r, \quad grad(r) < grad(g).$$

Definiţia 81 *Polinomul f se numește **deîmpărțit**, polinomul g este **împărțitorul**, polinomul q este **câtul** și polinomul r este **restul** împărțirii polinomului f la polinomul g.*

*Dacă $r = 0 \Leftrightarrow f = gq$, spunem că polinomul f **se divide prin polinomul** g (notăm $f \vdots g$) sau g **divide** f (notăm $g \mid f$).*

Exerciţiul 82 *Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$ la $g = 3X^2 - 6X + 2$, în $\mathbb{R}[X]$.*

$$\begin{array}{l|l}
6X^5 + 0X^4 - 17X^3 - X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 \\ \cline{2-2}
-6X^5 + 12X^4 - 4X^3 & 2X^3 + 4X^2 + X - 1 \\ \hline
12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3 & \\
-12X^4 + 24X^3 - 8X^2 & \\ \hline
3X^3 - 9X^2 + 0X + 3 & \\
-3X^3 + 6X^2 - 2X & \\ \hline
-3X^2 - 2X + 3 & \\
3X^2 - 6X + 2 & \\ \hline
-8X + 5 &
\end{array}$$

Deoarece $grad\,(-8X + 5) < grad\,\left(3X^2 - 6X + 2\right)$, rezultă că avem câtul $q = 2X^3 + 4X^2 + X - 1$ și restul $r = -8X + 5$.

Putem face rapid proba, $\left(3X^2 - 6X + 2\right)\left(2X^3 + 4X^2 + X - 1\right) + (-8X + 5) = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$.

Exerciţiul 83 *Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 6X^3 - 7X^2 + 3X + 2$ la $g = 2X^2 - 3X + 2$, în $\mathbb{R}[X]$.*

$$\begin{array}{l|l}
6X^3 - 7X^2 + 3X + 2 & 2X^2 - 3X + 2 \\ \cline{2-2}
-6X^3 + 9X^2 - 6X & 3X + 1 \\ \hline
2X^2 - 3X + 2 & \\
-2X^2 + 3X - 2 & \\ \hline
/ &
\end{array}$$

Rezultă că avem câtul $q = 3X + 1$ și restul $r = 0$, polinomul nul. Deci $g \mid f$.

Exercițiul 84 *Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + 3$ la $g = X - i$, în $\mathbb{C}[X]$.*

$$
\begin{array}{l|l}
X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + 3 & X - i \\ \cline{2-2}
-X^6 + iX^5 & X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i \\ \hline
(i-1)X^5 + X^4 - X^3 + X^2 & \\
-(i-1)X^5 + i(i-1)X^4 & \\ \hline
-iX^4 - X^3 + X^2 & \\
iX^4 + X^3 & \\ \hline
X^2 & \\
-X^2 + iX & \\ \hline
iX & \\
-iX - 1 & \\ \hline
-1 &
\end{array}
$$

Deci avem câtul $q = X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i$ și restul $r = -1$, polinom de grad 0.

Teorema 85 *Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ diferit de polinomul nul. Atunci restul împărțirii lui f prin $g = X - a$ este egal cu valoarea numerică a polinomului pentru $x = a$, adică $r = f(a)$.*

Teorema 86 *(Bezout) Un element $a \in \mathbb{K}$ este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{K}[X]$ dacă și numai dacă $X - a$ divide pe f.*

Definiția 87 *Elementul $a \in \mathbb{K}$ este rădăcină de ordin $p \in \mathbb{N}^*$ pentru polinomul f dacă $(x-a)^p$ divide f și $(x-a)^{p+1}$ nu divide f.*

Exercițiul 88 *a) Să se determine restul împărțirii lui $f = X^4 + 2X^3 - X + 4$ la $g = X - 1$.*
b) Arătați că $a = 1$ este rădăcină pentru $h = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.
a) Restul împărțirii lui f la g este $f(1) = 6$.
b) Se verifică $h(1) = 0$.

Putem folosi **schema lui Horner** pentru a determina câtul și restul împărțirii unui polinom prin $X - a$.

Exercițiul 89 *a) Folosiți schema lui Horner pentru a afla câtul și restul împărțirii lui f la g, $f = 3X^5 - 2X^3 + 3X^2 - 5$, $g = X - 2$.*

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	0	-2	3	0	-5
2	3	$2\cdot 3+0=6$	$2\cdot 6-2=10$	$2\cdot 10+3=23$	$2\cdot 23+0=46$	$2\cdot 46-5=87$
	X^4	X^3	X^2	X	X^0	

Deci restul este $r = 87$ iar câtul este $q = 3X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 23X + 46$.

b) Folosiți schema lui Horner pentru a afla ordinul de multiplicitate a rădăcinii $a = 2$ a lui $f = X^6 - 7X^5 + 15X^4 - 40X^2 + 48X - 16$.

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
2	1	-7	15	0	-40	48	-16
2	1	$2\cdot 1-7=-5$	$2(-5)+15=5$	$2\cdot 5+0=10$	$2\cdot 10-40=-20$	$2(-20)+48=8$	$2\cdot 8-16=0$
2	1	$2\cdot 1-5=-3$	$2(-3)+5=-1$	$2(-1)+10=8$	$2\cdot 8-20=-4$	$2(-4)+8=0$	
2	1	$2\cdot 1-3=-1$	$2(-1)-1=-3$	$2(-3)+8=2$	$2\cdot 2-4=0$		
2	1	$2\cdot 1-1=1$	$2\cdot 1-3=-1$	$2(-1)+2=0$			
2	1	$2\cdot 1+1=3$	$2\cdot 3-1=5\neq 0$	*concluzie: 2 e rădăcină de ordinul 4*			
	X^2	X	X^0				

$f = (X-2)^4\left(X^2 + 3X + 5\right)$.

Teorema 90 *(polinoame cu coeficienți reali) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a+ib$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a lui f, atunci $\overline{x_0} = a + ib$ este de asemenea o rădăcină complexă a lui f și x_0, $\overline{x_0}$ au același ordin de multiplicitate.*

În consecință, orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe ce nu sunt reale. De asemenea, orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăconă reală.

Teorema 91 *(polinoame cu coeficienți raționali) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ diferit de polinomul nul. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, este o rădăcină pătratică a lui f, atunci $\overline{x_0} = a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină pătratică a lui f și x_0, $\overline{x_0}$ au același ordin de multiplicitate.*

Teorema 92 *(polinoame cu coeficienți întregi) Fie $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$. Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a lui f, atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.*

În particular, dacă p este o rădăcină întreagă a lui f, atunci $p \mid a_0$.

Teorema 93 *(relațiile lui Viete) Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad n, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, care are în corpul $\mathbb{K}$ rădăcinile $x_1, x_2, \cdots .x_n$, nu neapărat distincte. Atunci au loc următoarele relații.*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots x_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sum_{i,j\in\overline{1,n},\, i\neq j} x_ix_j & = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \sum_{i,j,k\in\overline{1,n},\, i\neq j\neq k\neq i} x_ix_jx_k & = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \sum_{i_1,\cdots,i_k\in\overline{1,n},\, i_j\neq i_l,\, \forall j\neq l} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} & = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \cdots & \cdots \\ x_1x_2\cdots x_n & = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

De exemplu, fie $f = 2X^4 + X^3 - 3X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale, nu neapărat distincte. Atunci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = -\frac{1}{2}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 & = -\frac{3}{2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 & = 0, \\ x_1x_2x_3x_4 & = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercițiul 94 *Rezolvați următoarele ecuații.*

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - \sqrt{3}$.

b) $3x^3 - 10x^2 + 31x + 26 = 0$, știind că are soluția $x_1 = 2 - 3i$.

c) $z^3 + (4 - 2i)z^2 + (2 - 7i)z - 3 - 3i = 0$, dacă admite cel puțin o soluție reală.

a) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 - 3X^2 - 3X + 1$. Deoarece $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ este rădăcină a lui f, deducem că $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ este și ea rădăcină a lui f. Deci polinomul f se divide prin $g = \left(X - 2 - \sqrt{3}\right)\left(X - 2 + \sqrt{3}\right) = X^2 - 4X + 1$. Împărțind f la g obținem câtul $X + 1$, deci a treia soluție a ecuației se obține rezolvând ecuația $x + 1 = 0$, adică $x_3 = -1$.

Bineînțeles, puteam folosi și relațiile lui Viete, pentru a nu mai împărți cele două polinoame. Suma celor trei rădăcini este 3, deci $x_3 = -1$.

b) Asociem ecuației date polinomul cu coeficienți reali $f = 3X^3 - 10X^2 + 31X + 26$. Deducem că $x_1 = 2 - 3i$ e rădăcină a lui f, deci și $x_2 = 2 + 3i$ este rădăcină a lui f. Rezultă că f se divide prin

$g = (X - 2 + 3i)\,(X - 2 - 3i) = X^2 - 4X + 13$. Câtul împărțirii lui f la g este $3X + 2$, deci a treia soluție a ecuației este $x_3 = -\frac{2}{3}$.

Puteți aplica direct relațiile lui Viete!

c) Fie x o soluție reală a ecuației date. Deci $x^3+(4-2i)x^2+(2-7i)x-3-3i = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + 4x^2 + 2x - 3\right)+ i\left(-2x^2 - 7x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 + 4x^2 + 2x - 3 & = 0 \\ -2x^2 - 7x - 3 & = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm mai întâi ecuația de gradul al doilea, cu soluțiile -3 și $-\frac{1}{2}$. Doar $x = -3$ este și soluție a ecuației de gradul 3, deci singura rădăcină reală a polinomului $f = X^3 + (4-2i)X^2 + (2-7i)X - 3 - 3i$ este -3. Împărțim f la $X + 3$ (sau folosim schema lui Horner) și obținem câtul $X^2 + (1-2i)X - 1 - i$. Asociem ecuația de gradul doi, cu coeficienți în $\mathbb{C}$, $z^2 + (1-2i)z - 1 - i = 0$. Evident soluțiile sunt i și $-1 + i$.