

Curs 3- Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K -spațiu liniar

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

Acest material este inspirat din N. Papaghiuc, C. Călin, Algebră liniară și geometrie, Editura Performantica, Iași, 2003

1 Baze într-un K -spațiu liniar finit generat

Fie V un K -spațiu vectorial și $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V .

Definiția 1 Sistemul S se numește **liniar dependent** dacă există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, nu toți egali cu zero, astfel încât să aibă loc

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (1)$$

(combinația liniară $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ să fie vectorul nul).

Teorema 2 Condiția necesară și suficientă ca sistemul $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ să fie liniar dependent este ca cel puțin unul din vectorii sistemului S să se poată scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori ai sistemului S .

Demonstrație

Necesitatea (" \Rightarrow ") Să presupunem că sistemul S este liniar dependent. Deci are loc relația (1) cu scalarul $\alpha_1 \neq 0$ (de exemplu). În acest caz există $(\alpha_1)^{-1}$ deci obținem

$$\vec{v}_1 = -(\alpha_1)^{-1} \alpha_2 \vec{v}_2 - (\alpha_1)^{-1} \alpha_3 \vec{v}_3 - \dots - (\alpha_1)^{-1} \alpha_n \vec{v}_n$$

adică \vec{v}_1 este o combinație liniară de ceilalți $n - 1$ vectori.

Suficiența (" \Leftarrow ") Să presupunem că un vector (de exemplu \vec{v}_1) este o combinație liniară de ceilalți $n - 1$ vectori. Are loc

$$\vec{v}_1 = \beta_1 \vec{v}_2 + \beta_2 \vec{v}_3 + \dots + \beta_{n-1} \vec{v}_n$$

sau echivalent

$$\vec{v}_1 + (-\beta_1) \vec{v}_2 + (-\beta_2) \vec{v}_3 + \dots + (-\beta_{n-1}) \vec{v}_n = \vec{0}$$

adică are loc relația (1) cu coeficientul 1, al lui \vec{v}_1 , diferit de zero. Deci sistemul de vectori S este liniar dependent.

Definiția 3 Sistemul S se numește **liniar independent** dacă nu este liniar dependent, adică dacă singura combinație liniară nulă este cea cu toți scalarii nuli:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Exemplul 4 a) Sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent deoarece are loc $\alpha \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in K$, deci și pentru $\alpha \neq 0$.

b) Dacă $\vec{v} \neq \vec{0}$, atunci sistemul $S = \{\vec{v}\}$ este liniar independent deoarece din relația $\alpha \vec{v} = \vec{0}$, obținem $\alpha = 0$.

Exemplul 5 În spațiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

(1 și 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este liniar independent.

Într-adevăr, fie combinația liniară

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}.$$

Avem

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n (0, \dots, 1) \\ &= (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

deci relația precedentă devine

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Deci din orice combinație liniară nulă obținem toți scalarii nuli.

Exemplul 6 În spațiul vectorial $K_n[X]$ al polinoamelor de grad cel mult n , polinoamele $1, X, X^2, \dots, X^p$, $p \leq n$ formează un sistem liniar independent deoarece relația

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_p X^p = 0$$

implică $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

Exercițiul 7 Studiați dacă următorul sistem de vectori din spațiul vectorial \mathbb{R}^3 este liniar dependent sau nu:

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)\}.$$

Fie combinația liniară

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} & \Leftrightarrow \alpha_1 (1, 1, 1) + \alpha_2 (1, -1, 1) + \alpha_3 (-1, 3, -1) = \vec{0} \\ & \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 3\alpha_3, -\alpha_3) = \vec{0} \\ & \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = \vec{0} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea sistemului are determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

deci sistemul omogen nu admite soluție unică. Aceasta înseamnă că sistemul admite și o soluție diferită de cea banală. Deci sistemul dat este liniar dependent. Prin metodele cunoscute se va găsi mulțimea soluțiilor sistemului, $\{(-t, 2t, t), t \in \mathbb{R}\}$. O soluție particulară este, luând $t = -1$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -2, -1)$, ceea ce înseamnă că următoarea combinație liniară este vectorul nul:

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$$

(evident se poate verifica imediat, prin calcul direct, că $\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0$).

Exercițiul 8 Să se stabilească dacă următorii vectori sunt liniar independenți: $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$

Să considerăm combinația liniară

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ deci rangul $\text{rang} A = 3$. Deci sistemul de mai sus este compatibil unic determinat. Pe de altă parte sistemul este omogen deci admite cel puțin soluția banală $(0, 0, 0)$. Prin urmare soluția banală este unica soluție. În acest caz deducem că vectorii dați sunt liniar independenți deoarece orice relație de tipul

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

implică $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Teorema 9 Fie V un K -spațiu vectorial. Atunci:

1. Orice sistem de vectori care conține un subsistem liniar dependent este de asemenea sistem liniar dependent.
2. Orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independent este de asemenea un sistem liniar independent.

Demonstrație

Fie $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V și să presupunem că $S_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset S$, $k < n$ este o submulțime de vectori liniar dependenți. Deci există scalarii $\alpha_i, i = \overline{1, k}$, astfel încât cel puțin unul este nenul și are loc

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Deducem că există scalarii $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, cu $\alpha_i = 0, \forall i > k$, și cel puțin un scalar nenul (între primii k), astfel încât are loc

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + \dots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

ceea ce înseamnă că sistemul S este liniar dependent.

A doua afirmație se obține din prima prin reducere la absurd.

Având în vedere că sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent, ca o consecință a teoremei anterioare, obținem

Propoziția 10 Orice sistem S care conține vectorul nul este liniar dependent.

Vom prezenta în continuare noțiunea de bază într-un spațiu vectorial finit generat.

Definiția 11 Sistemul finit de vectori $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se numește bază în K -spațiul vectorial V dacă satisface simultan condițiile:

- (a) B este sistem liniar independent.
- (b) B este un sistem de generatori al lui V .

Exemplul 12 În spațiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

(1 și 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este bază în K^n deoarece este liniar independent și este și sistem de generatori al lui K^n . Această bază se numește **bază canonică**.

Într-adevăr, am văzut deja că acești vectori sunt liniari independenți. În continuare arătăm că formează un sistem de generatori pentru K^n . Fie $\vec{x} \in K^n$ și deci $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$. Prin urmare

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Exemplul 13 În spațiul vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ al matricelor de tip $(2, 2)$ cu elemente din \mathbb{R} , sistemul de vectori

$$B = \left\{ E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

este bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deoarece este liniar independent și este și sistem de generatori al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Această bază se numește **bază canonică**.

Într-adevăr, orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este generată de matricele lui B , $A = aE_1^1 + bE_2^1 + cE_1^2 + dE_2^2$. Deci B este sistem de generatori pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ a.i. $\alpha E_1^1 + \beta E_2^1 + \gamma E_1^2 + \delta E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Deci B e sistem de vectori liniar independent.

Evident, $\{E_j^i\}$, $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$ este bază în $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde E_j^i este matricea care are pe linia i și coloana j pe 1 iar toate celelalte elemente sunt 0.

Exemplul 14 În spațiul vectorial $K_n(X)$ al polinoamelor de grad cel mult n , polinoamele $1, X, X^2, \dots, X^n$ formează un sistem liniar independent și este sistem de generatori, deci este o bază.

Pentru a verifica mai rapid dacă un sistem de vectori e bază pentru un spațiu liniar finit generat, vom folosi următoarea teoremă.

Teorema 15 (de caracterizare a bazelor) Condiția necesară și suficientă ca submulțimea finită $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ să fie bază în K -spațiul vectorial V este ca orice vector $\vec{x} \in V$ să se descompună în mod unic după vectorii lui B , adică $\forall \vec{x} \in V$, există și sunt unici scalarii $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$, a.i.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n. \quad (2)$$

Demonstrație

Necesitatea (" \Rightarrow ") Să presupunem că sistemul $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ este bază în K -spațiul vectorial V . Având în vedere că orice bază este un sistem de generatori, obținem că \vec{x} are o descompunere de tipul (2). Să presupunem că descompunerea nu este unică deci are loc

$$\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$$

Prin scădere obținem

$$\vec{0} = (x_1 - y_1)\vec{e}_1 + \dots + (x_n - y_n)\vec{e}_n$$

Sistemul de vectori B fiind liniar independent deducem că scalarii $x_i - y_i = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$ adică

$$x_i = y_i, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

deci cele două descompuneri coincid.

Suficiența (" \Leftarrow ") Să presupunem că orice vector $\vec{x} \in V$ se descompune în mod unic după vectorii lui B . Deci B este un sistem de generatori pentru V , adică $[B] = V$. A mai rămas de demonstrat că B este liniar independent. Să presupunem că avem o combinație liniară de tipul

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad (3)$$

Pe de altă parte ecuația de mai sus reprezintă și o descompunere a lui $\vec{0}$ după baza B . Dar

$$0\vec{v}_1 + \dots + 0\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Având în vedere că descompunere lui $\vec{0}$ este unică deducem că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Definiția 16 *Scalarii $x_i \in K, i = \overline{1, n}$ ce dau descompunerea unică a lui \vec{x} în baza $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se numesc **coordonatele vectorului \vec{x} în baza $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.***

Teorema 17 (Teorema completării) *Fie V un spațiu liniar finit generat.*

a) *Din orice sistem de generatori ai lui V se poate extrage o bază în V .*

b) *Orice sistem de vectori liniar independent din V poate fi completat la o bază în V .*

Găsiți demonstrația în cartea recomandată ca bibliografie la pagina 15 (Teorema I.5).

Teorema 18 *În orice K -spațiu $V \neq \{\vec{0}\}$, finit generat, există cel puțin o bază.*

Demonstrație

Fie $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$. Atunci sistemul format din vectorul \vec{v} este liniar independent, deci el poate fi completat la o bază.

Teorema 19 (teorema schimbului a lui Steinitz) *Fie $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ un sistem de generatori ai lui V și $L = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ un sistem liniar independent din V . Atunci:*

a) $p \leq n$;

b) *Există vectorii $\vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n \in S$ astfel încât sistemul de vectori $S' = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ să fie un sistem de generatori pentru V .*

Găsiți demonstrația în cartea recomandată ca bibliografie la pagina 17 (Lema I.1, Teorema I.6).

Teorema 20 *Dacă $V \neq \{\vec{0}\}$ este un K -spațiu finit generat atunci oricare două baze ale lui V au același număr de vectori.*

Demonstrație

Fie B_1 și B_2 două baze, cu m , respectiv n elemente. Considerând B_1 sistem de vectori liniar independent și B_2 sistem de generatori pentru V , atunci rezultă $m \leq n$. Considerând B_1 sistem de generatori și B_2 sistem de vectori liniar independent, deducem $n \leq m$, deci $m = n$.

Definiția 21 *Dacă V este un K -spațiu finit generat, atunci numărul de elemente dintr-o bază a lui V se numește dimensiunea lui V . O notăm cu $\dim_K V$ sau, mai scurt (dacă nu este pericol de confuzie), $\dim V$.*

Remarca 22 *Dacă V este un K -spațiu vectorial de dimensiune n , atunci vom mai nota spațiul și cu V_n (notația va indica astfel și dimensiunea).*

Un rezultat util în practică este următorul

Propoziția 23 Fie V este un K -spațiu vectorial de dimensiune n . Atunci:

- (a) Orice sistem S format din n vectori liniari independenți este o bază în V .
- (b) Orice sistem S format din n vectori care constituie un sistem de generatori al lui V este o bază în V .

Demonstrație

(a) Dacă S este un sistem de vectori liniar independent, el poate fi completat la o bază, care are n vectori. Dar S are n vectori, deci S este chiar bază.

(b) Din sistemul de generatori S putem extrage o bază cu n vectori. Dar S are n vectori, deci chiar S este bază.

Definiția 24 Fie S un sistem de vectori din spațiul vectorial V . Se numește **rangul sistemului de vectori** S dimensiunea subspațiului vectorial generat de S .

Teorema 25 Toate sistemele de vectori din V obținute din S prin următoarele transformări (numite și transformări elementare):

1. schimbarea ordinii vectorilor;
 2. înmulțirea unui vector cu un scalar nenul;
 3. adunarea la un vector din S a unui alt vector din S înmulțit cu un scalar,
- au același rang cu S .

Teorema 26 Rangul unui sistem finit de vectori este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului.

(fără demonstrație).

În cazul particular al spațiului vectorial aritmetic K^n , dacă avem un număr finit de vectori, atunci, punându-i pe coloană, putem forma cu ei o matrice iar problema independenței lor liniare se reduce la a determina rangul acelei matrice. Astfel are loc rezultatul următor:

Teorema 27 Rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană (sau linie, evident) liniar independenți.

Demonstrație

Într-adevăr, fie $A = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^m & s_2^m & \dots & s_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice dată și vectorii coloană ai

acesteia notați cu

$$v_1 = \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \dots \\ s_1^m \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \dots \\ s_2^m \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} s_n^1 \\ s_n^2 \\ \dots \\ s_n^m \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că, fără a restrânge generalitatea, vectorii v_1, v_2, \dots, v_r , cu $r \leq n$, sunt liniar independenți, deci din orice combinație liniară a lor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = O \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

Evident, $v_i \in K^m$, $i = \overline{1, r}$, deci numărul maxim de vectori liniar independenți este m , ceea ce înseamnă că trebuie să luăm $r \leq m$.

Deci se obține sistemul

$$\begin{cases} s_1^1 \alpha_1 + s_2^1 \alpha_2 + \cdots + s_r^1 \alpha_r = 0 \\ s_1^2 \alpha_1 + s_2^2 \alpha_2 + \cdots + s_r^2 \alpha_r = 0 \\ \vdots \\ s_1^m \alpha_1 + s_2^m \alpha_2 + \cdots + s_r^m \alpha_r = 0 \end{cases}$$

care este omogen de tip (m, r) și care trebuie să admită doar soluția banală. Prin urmare există un minor principal de rang r care să fie nenul. Acest determinant principal este exact cel care dă rangul matricei inițiale A , deci $\text{rang} A = r$.

Reciproc, să presupunem acum că $\text{rang} A = r$ (deci, evident, $r \leq \min(m, n)$) și să arătăm că numărul maxim de vectori liniar independenți este tot r . Fie astfel, o combinația liniară de $(r + 1)$ vectori

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_p v_p = 0 \in \mathcal{M}_{m,1}(K),$$

unde p este un indice oarecare astfel încât $r + 1 \leq p \leq n$. Prin urmare obținem sistemul

$$\begin{cases} s_1^1 \alpha_1 + s_2^1 \alpha_2 + \cdots + s_r^1 \alpha_r + s_p^1 \alpha_p = 0 \\ s_1^2 \alpha_1 + s_2^2 \alpha_2 + \cdots + s_r^2 \alpha_r + s_p^2 \alpha_p = 0 \\ \vdots \\ s_1^m \alpha_1 + s_2^m \alpha_2 + \cdots + s_r^m \alpha_r + s_p^m \alpha_p = 0 \end{cases}$$

care este un sistem omogen de tipul $(m, r + 1)$. Rangul matricei sistemului este r (este exact rangul matricei inițiale A) și deci mai mic decât numărul de necunoscute. Prin urmare sistemul nu admite soluție unică, deci admite și soluții nenule. Aceasta înseamnă că există cel puțin un coeficient α_i nenul, deci vectorii $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_p\}$ sunt liniar dependenți.

1.1 Exerciții

1. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenți și să se afle relația de dependență: $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, -1, 1)$ din \mathbb{R}^3 .

Rezolvare:

Fie combinația liniară

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha_1 (0, 1, 1) + \alpha_2 (1, 2, 3) + \alpha_3 (2, -1, 1) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (0, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 3\alpha_2) + (2\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și $\text{rang} A = 2$, deci sistemul omogen este compatibil

dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele două ecuații și primele două necunoscute obținem soluția $(5\alpha_3, -2\alpha_3, \alpha_3)$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_3 = 1$ se obține soluția $(5, -2, 1)$, deci are loc relația de dependență

$$5\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0},$$

ceea ce înseamnă că vectorii dați sunt liniar dependenți.

Să menționăm, vezi Teorema 27, că **rangul matricei formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenți**. În cazul nostru numărul de vectori liniar independenți este 2.

2. Să se studieze dependența liniară a următorilor vectori: $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, -2)$, $\vec{v}_3 = (5, -11, 10)$.

Rezolvare:

Să considerăm combinația liniară

$$\begin{aligned} \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha(1, -1, 2) + \beta(-1, 3, -2) + \gamma(5, -11, 10) = (0, 0, 0) \\ &= (\alpha, -\alpha, 2\alpha) + (-\beta, 3\beta, -2\beta) + (5\gamma, -11\gamma, 10\gamma) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - 11\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 10\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -11 \\ 2 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 0$, prin urmare $\text{rang} A <$

3, iar $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, deci rangul $\text{rang} A = 2$. Sistemul de mai sus are două necunoscute principale, α și β , și o necunoscută secundară γ și este deci compatibil nedeterminat (admite o infinitate de soluții) cu soluția $\alpha = -2\gamma$, $\beta = 3\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. În acest caz vectorii dați sunt liniar dependenți și are loc relația

$$(-2\gamma) \cdot \vec{v}_1 + 3\gamma \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}, \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

În particular pentru $\gamma = 1$ obținem relația de dependență $-2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

3. Să se studieze dependența liniară a următorilor vectori:

(a) $\vec{v}_1 = (1, 2, -1, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = (1, 3, 2, -1, -1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 4, 2, 0)$, $\vec{v}_4 = (2, 4, -3, -2, -3)$ din \mathbb{R}^5 ;

(b) $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 1)$ din \mathbb{R}^3 ;

(c) $p_1 = 2X^2 + X + 3$, $p_2 = X^2 + 5X - 3$, $p_3 = 3X^2 - X + 7$ din $\mathbb{R}_2[X]$;

(d) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rezolvare:

(a) Fie combinația liniară

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \alpha_1(1, 2, -1, 1, -2) + \alpha_2(1, 3, 2, -1, -1) + \alpha_3(0, 1, 4, 2, 0) + \alpha_4(2, 4, -3, -2, -3) &= \vec{0} \end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Determinăm $\text{rang}A = 3$ și deci sistemul omogen este compatibil dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele trei ecuații și primele trei necunoscute obținem soluția $(-\alpha_4, -\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4)$, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_4 = -1$ se obține soluția $(1, 1, -1, -1)$, deci are loc relația de dependență

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{0},$$

ceea ce înseamnă că vectorii dați sunt liniar dependenți.

(b) Fie combinația liniară

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 (1, -1, 2) + \alpha_2 (1, 0, 3) + \alpha_3 (2, 1, 1) = \vec{0}$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Determinăm $\text{rang}A = 3$ și deci sistemul omogen este compatibil și unic determinat, deci soluția banală este unica, adică $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ ceea ce înseamnă că vectorii dați sunt liniar independenți.

(c) Fie combinația liniară

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) X^2 + (\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3) X + (3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3) = 0$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$ și $\text{rang}A = 2$, deci sistemul omogen este compati-

bil dar nedeterminat. Rezolvând sistemul format cu primele două ecuații și primele două necunoscute obținem soluția $(-\frac{16}{9}\alpha_3, \frac{5}{9}\alpha_3, \alpha_3)$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Luând, în particular, $\alpha_3 = -9$ se obține soluția $(16, -5, -9)$, deci are loc relația de dependență

$$16p_1 - 5p_2 - 9p_3 = 0,$$

ceea ce înseamnă că vectorii dați sunt liniar dependenți.

(d) Fie combinația liniară

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Determinăm $\text{rang}A = 3$ și deci sistemul omogen este compatibil și unic determinat, deci soluția banală este unica, adică $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ ceea ce înseamnă că vectorii dați sunt liniar independenți.

4. Să se studieze după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ dependența liniară a sistemului de vectori $\{\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (4, 5, 6), \vec{v}_3 = (7, 8, m)\}$.

Rezolvare:

Să considerăm combinația liniară

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 5, 6) + \gamma(7, 8, m) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + m\gamma = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & m \end{vmatrix} = m - 9$. Dacă $m \neq 9$ obținem rangul $\text{rang}A = 3$ deci sistemul de mai sus este compatibil unic determinat cu soluția banală ca unică soluție $\alpha = \beta = \gamma = 0$. În acest caz vectorii dați sunt liniar independenți.

Dacă $m = 9$ atunci $\text{rang}A < 3$ și $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ deci $\text{rang}A = 2$, adică sistemul de mai sus are două necunoscute principale α și β , și o necunoscută secundară γ și este deci compatibil nedeterminat cu soluția $\alpha = \gamma, \beta = -2\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$. Atunci are loc relația

$$\gamma \cdot \vec{v}_1 - 2\gamma \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}, \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

În particular pentru $\gamma = 1$ obținem relația de dependență

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

5. Să se arate că următorii vectori sunt liniar dependenți și să se afle relația de dependență:

(a) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)$ din \mathbb{R}^3 ;

(b) $\vec{v}_1 = (1, 2, 5), \vec{v}_2 = (5, 3, 1), \vec{v}_3 = (-15, -2, 21)$ din \mathbb{R}^3 ;

(c) $p_1 = X^2 + 5, p_2 = X^2 - 4X + 3, p_3 = X^2 + 16X + 13$ din $\mathbb{R}_2(X)$;

(d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

6. Să se arate că următorii vectori sunt liniar independenți:

(a) $\vec{v}_1 = (5, 3, 1), \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 4, 2)$ din \mathbb{R}^3 ;

(b) $p_1 = X^2 - 4X + 3, p_2 = 5X - 4, p_3 = X^2 + X + 1$ din $\mathbb{R}_2(X)$.

7. Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \vec{v}_2 = (2, -1, 3), \vec{v}_3 = (1, 3, 5), \vec{v}_4 = (3, 1, 7)$.

Rezolvare:

Conform Teoremei 27 rangul matricii formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul

de vectori coloană liniari independenți. În cazul nostru rangul matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenți din S este 2.

Să se găsească, în plus, relația de dependență dintre primii trei vectori.

8. Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_3 = (3, 0, -3)$, $\vec{v}_4 = (1, 1, 0)$.

Rezolvare:

Conform Teoremei 27 rangul matricei formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul

de vectori coloană liniari independenți. În cazul nostru rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

este 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenți din S este 2.

Să se găsească, în plus, relația de dependență dintre primii trei vectori.

9. În \mathbb{R}^4 se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (3, 1, -1, 0)$ și $\vec{v}_3 = (2, -2, 3, 1)$. Să se precizeze care este subspațiul vectorial generat de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 și \vec{v}_3 .

Rezolvare:

Conform Teoremei 27 rangul matricei formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenți. Iar **dimensiunea subspațiului generat de vectorii dați este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului dat.** În

cazul nostru rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este 3, deci numărul maxim de vec-

tori liniar independenți dintre cei dați este 3. Prin urmare dimensiunea subspațiului generat de cei trei vectori este 3.

10. În \mathbb{R}^4 se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\vec{v}_2 = (1, 3, -2, 4)$. Să se arate că \vec{v}_1, \vec{v}_2 sunt liniar independenți și să se precizeze care este subspațiul vectorial generat de \vec{v}_1 și \vec{v}_2 . Vectorul $\vec{v} = (-1, 11, -12, 2)$ aparține acestui subspațiu?

Rezolvare:

Conform Teoremei 27 rangul matricei formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenți. Iar dimensiunea subspațiului generat de vectorii dați este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului dat. În cazul

nostru rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar

independenți dintre cei dați este 2. Prin urmare dimensiunea subspațiului generat de cei doi vectori este 2. Subspațiul generat de vectorii \vec{v}_1 și \vec{v}_2 este, prin definiție,

$$\begin{aligned} \{\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} &= \{\alpha(2, -1, 3, 5) + \beta(1, 3, -2, 4) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, 3\alpha - 2\beta, 5\alpha + 4\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Vectorul $\vec{v} = (-1, 11, -12, 2)$ aparține acestui subspațiu dacă există scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ sau echivalent

$$(-1, 11, -12, 2) = (2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, 3\alpha - 2\beta, 5\alpha + 4\beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + 3\beta = 11 \\ 3\alpha - 2\beta = -12 \\ 5\alpha + 4\beta = 2 \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea A are rangul 2 iar $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -12 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

are rangul tot 2 (ambii determinanți de ordinul al treilea $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -12 \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ sunt nuli). Prin urmare, $\text{rang}A = \text{rang}\bar{A} = 2$ deci sistemul este compatibil. Soluția este dată prin rezolvarea sistemului format cu primele două ecuații (cele principale) și primele două necunoscute (cele principale). Obținem $\alpha = -2$ și $\beta = 3$.

Deci avem $\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$, adică \vec{v} aparține subspațiului generat de cei doi vectori.

11. În spațiul $\mathbb{R}_3(x)$ se consideră vectorii $p_1 = X^3 + 2X - 1$, $p_2 = 2X^2 + 1$, $p_3 = X^3 - X$. Să se arate că p_1 , p_2 și p_3 sunt liniar independenți și să se precizeze care este subspațiul vectorial generat de ei. Vectorul $p = 2X^2 + 3X$ aparține acestui subspațiu? Dar $p = X + 1$?

Rezolvare:

Se verifică mai întâi că vectorii dați sunt liniari independenți (se pleacă de la o combinație liniară egală cu zero, i.e. $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 0$, și trebuie să arătăm că $\alpha = \beta = \gamma = 0$).

Subspațiul generat de vectorii polinoame date este, prin definiție,

$$\begin{aligned} & \{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \\ & = \{(\alpha + \gamma)X^3 + 2\beta X^2 + (2\alpha - \gamma)X + (-\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Vectorul $p = 2X^2 + 3X$ aparține acestui subspațiu dacă există scalarii $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ sau echivalent

$$2X^2 + 3X = (\alpha + \gamma)X^3 + 2\beta X^2 + (2\alpha - \gamma)X + (-\alpha + \beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta = 2 \\ 2\alpha - \gamma = 3 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

are rangul 3 (avem $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$) iar $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ are rangul tot 3

(determinantul matricei \bar{A} este nul). Prin urmare, $\text{rang}A = \text{rang}\bar{A} = 3$ deci sistemul este compatibil. Soluția este dată prin rezolvarea sistemului format cu primele trei ecuații (cele principale) și primele trei necunoscute (cele principale). Obținem $\alpha = 1$, $\beta = 1$ și $\gamma = -1$.

Deci avem $p = p_1 + p_2 - p_3$, adică p aparține subspațiului generat de cele trei polinoame.

Prin abordare similară se va demonstra că $X + 1$ nu aparține subspațiului generat. Într-adevăr, $p = X + 1$ aparține acestui subspațiu dacă există scalarii $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$, sau echivalent

$$X + 1 = (\alpha + \gamma) X^3 + 2\beta X^2 + (2\alpha - \gamma) X + (-\alpha + \beta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

are rangul 3 iar $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ are rangul 4 (determinantul matricei \bar{A} nu este

nul). Prin urmare, $\text{rang}A \neq \text{rang}\bar{A}$ deci sistemul este incompatibil. Deci $p(x)$ nu aparține subspațiului generat de cele trei polinoame.

12. În \mathbb{R}^4 se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (1, 4, -5, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3, 1)$. Să se arate că \vec{v}_1, \vec{v}_2 sunt liniar independenți și să se precizeze care este subspațiul vectorial generat de \vec{v}_1 și \vec{v}_2 . Vectorul $\vec{v} = (2, 14, -34, 7)$ aparține acestui subspațiu?
13. În \mathbb{R}^4 se consideră subspațiul $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Să se afle un sistem de generatori al lui V .
14. Să se arate că dacă vectorii $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ sunt liniar independenți atunci și vectorii

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \end{cases}$$

sunt liniar independenți.

15. Să se determine λ astfel încât vectorii $\vec{v}_1 = (\lambda, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, \lambda, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, \lambda)$ din \mathbb{R}^3 să formeze o bază în \mathbb{R}^3 .

Rezolvare:

Într-un spațiu de dimensiune n , dacă avem n vectori liniar independenți, atunci aceștia formează o bază.

În particular, în spațiul \mathbb{R}^3 , care este de dimensiune 3, dacă avem trei vectori liniar independenți atunci aceștia formează o bază.

Conform Teoremei 27 rangul matricei formată cu vectorii puși pe coloană este exact numărul de vectori coloană liniari independenți (iar dimensiunea subspațiului generat de cei trei vectori este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului dat). În

cazul nostru rangul matricei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ depinde de λ . Astfel $\det A = \lambda^3 + 2\lambda =$

$\lambda(\lambda^2 + 2)$, deci dacă $\lambda = 0$, atunci rangul este 2 și deci numărul maxim de vectori liniar independenți dintre cei dați este 2 (deci cei trei vectori nu sunt liniar independenți, deci nu pot forma o bază). Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci rangul este 3, prin urmare numărul maxim de vectori liniar independenți dintre cei dați este 3, deci cei trei vectori sunt liniar independenți și deoarece numărul de vectori liniar independenți coincide cu dimensiunea spațiului, vectorii dați formează o bază în \mathbb{R}^3 .

16. Să se determine λ astfel încât vectorii $\vec{v}_1 = (1, \lambda, 0)$, $\vec{v}_2 = (\lambda, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, \lambda)$ din \mathbb{R}^3 să formeze o bază în \mathbb{R}^3 .
17. Se dau vectorii $\vec{v}_1 = (1, 2, -3, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (-2, 0, 1, 3)$ și $\vec{v}_4 = (-1, 1, 1, 2)$ din \mathbb{R}^4 . Să se arate că aceștia formează o bază în \mathbb{R}^4 . Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v} = (-2, 2, -3, 1)$ în această nouă bază.

Rezolvare:

În spațiul \mathbb{R}^4 , care este de dimensiune 4, dacă avem patru vectori liniar independenți atunci aceștia formează o bază.

Rangul matricei A este 4 deoarece $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$, deci numărul maxim

de vectori liniar independenți dintre cei dați este 4, adică cei patru vectori sunt liniar independenți și deci pot forma o bază în \mathbb{R}^4 .

A scrie coordonatele vectorului $\vec{v} = (-2, 2, -3, 1)$ în noua bază în seamnă a găsi scalarii $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 + \delta\vec{v}_4$ sau echivalent

$$(-2, 2, -3, 1) = (\alpha - 2\gamma - \delta, 2\alpha - \beta + \delta, -3\alpha + \beta + \gamma + \delta, -\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\delta)$$

ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha - 2\gamma - \delta = -2 \\ 2\alpha - \beta + \delta = 2 \\ -3\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3 \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\delta = 1. \end{cases}$$

Studiem compatibilitatea acestui sistem: matricea A are rangul 4 iar $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

are rangul tot 4, prin urmare, $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 4$ deci sistemul este compatibil unic determinat. Soluția este dată folosind regula lui Cramer. Obținem $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$ și $\delta = -1$.

Deci avem $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$ adică coordonatele lui \vec{v} în noua bază sunt 1, -1, 2, -1.

18. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v} = (10, 8, 5, 1) \in \mathbb{R}^4$ în baza $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, unde $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$.
19. Fie subspațiul vectorial al matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine o bază a acestui subspațiu.
20. Fie subspațiul vectorial al matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine o bază a acestui subspațiu.
21. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ dintr-un spațiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ formează o nouă bază și să se afle coordonatele în această bază ale vectorului $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
22. Se dau vectorii $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3)$ din \mathbb{R}^3 . Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ formează o nouă bază și să se afle coordonatele în această bază ale vectorilor $\vec{u} = (5, -1, 3)$ și $\vec{v} = (2, 3, -1)$.
23. Se dă vectorul $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ dintr-un spațiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Să se determine coordonatele vectorului \vec{a} în baza $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ știind că trecerea de la o bază la alta este realizată de relațiile $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ și $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
24. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ și $\vec{c} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ dintr-un spațiu vectorial cu baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Să se arate că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ formează o nouă bază și să se afle coordonatele în această bază ale vectorului $\vec{d} = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.
25. Să se determine dimensiunea și o bază a subspațiului vectorial generat de vectorii:
 - (a) $\vec{v}_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -1, 4)$, $\vec{v}_3 = (0, 4, -1, 2)$ din \mathbb{R}^4 ;
 - (b) $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2, -3, 4)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -3, 0, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 3, 1, 1, 2)$, $\vec{v}_4 = (1, 5, 3, 5, 1)$ din \mathbb{R}^5 .

Rezolvare:

Dimensiunea subspațiului generat de vectorii dați este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului dat.

(a) Rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ este 2, deci numărul maxim de vectori liniar

independenți dintre cei dați este 2. Prin urmare dimensiunea subspațiului generat de cei trei vectori este 2 iar o bază este dată, de exemplu, de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(b) Rangul matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este 3, deci numărul maxim de vectori liniar

independenți dintre cei dați este 3. Prin urmare dimensiunea subspațiului generat de cei patru vectori este 3 iar o bază este dată, de exemplu, de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

26. Să se determine dimensiunea și o bază a subspațiului vectorial generat de vectorii $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -3, 0)$ din \mathbb{R}^4 .