

Cursuri 6,7 - Aplicații liniare

Oana Constantinescu, Lucian Maticiu, Iulia Pleșca

1 Definiții, exemple și proprietăți generale

Fie V, W două K -spații vectoriale.

Definiția 1 O aplicație $T : V \rightarrow W$ se numește **aplicație liniară** (sau **transformare liniară**, **operator liniar**, **morfism de spații vectoriale**) dacă satisface simultan condițiile:

- (a) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (aditivitatea aplicației liniare);
- (b) $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x}), \forall \lambda \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (omogenitatea aplicației liniare).

Vom nota cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulțimea aplicațiilor liniare de la V la W , i.e.

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ este aplicație liniară}\}.$$

Notăm mulțimea aplicațiilor liniare de la V la V simplu prin $\mathcal{L}(V)$. Elementele sale se mai numesc și endomorfisme de spații liniare.

Propoziția 2 Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci:

- (a) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, unde $\vec{0}_V$ este vectorul nul din V și $\vec{0}_W$ este vectorul nul din W ;
- (b) $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.

Demonstrație

(a) $T(\vec{0}_V) = T(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = T(\vec{0}_V) + T(\vec{0}_V)$, deci $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

(b) Alegând $\lambda = -1$ în relația ce exprimă omogenitatea lui T , obținem $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.

Propoziția 3 O aplicație $T : V \rightarrow W$ este liniară dacă și numai dacă are loc

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}), \forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (1)$$

Demonstrație

Implicația directă: Presupunem că T este aplicație liniară. Atunci $T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = T(\lambda\vec{x}) + T(\mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}), \forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$. Am folosit mai întâi că T este aditivă, apoi că T este omogenă.

Reciproc: Considerând în (1) $\lambda = \mu = 1, \vec{x}, \vec{y} \in V$ arbitrari, rezultă că T este aditivă. Luând apoi în aceeași relație $\mu = 0$ și λ, \vec{x} arbitrari, rezultă că T este omogenă.

Amintim că suma a două aplicații $f, g : V \rightarrow W$ se definește prin $f + g : V \rightarrow W, (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$, iar produsul aplicației $g : V \rightarrow W$ cu scalarul $\alpha \in K$ este $\alpha g : V \rightarrow W, (\alpha g)(\vec{x}) = \alpha g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.

Demonstrați următorul rezultat.

Propoziția 4 (a) Suma a două aplicații liniare este o aplicație liniară și produsul oricărui scalar din K cu o aplicație liniară este aplicație liniară. Mai mult, mulțimea $\mathcal{L}(V, W)$ are structură de spațiu liniar în raport cu aceste două legi de compoziție.

(b) Compunerea oricăror aplicații liniare este o aplicație liniară. Mulțimea $\mathcal{L}(V)$ are structură de inel (necomutativ) în raport cu adunarea aplicațiilor și compunerea lor.

Exemplul 5 Fie V un K -spațiu vectorial și $\alpha \in K$ fixat. Definim $h_\alpha : V \rightarrow V$, prin $T(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$. Evident $h_\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ deoarece

$$h_\alpha(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \alpha \cdot (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x}) + \mu(\alpha\vec{y}) = \lambda h_\alpha(\vec{x}) + \mu h_\alpha(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda, \mu \in K.$$

h_α se numește omotetia vectorială de raport α , pentru α nenul și diferit de 1. Dacă $\alpha = 0$ obținem aplicația nulă, iar pentru $\alpha = 1$ obținem aplicația identitate pe V . Evident acestea sunt aplicații liniare.

Exemplul 6 Definim aplicația

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, T(\vec{x}) = (x^1 + x^3, 2x^1 + x^3, x^2, 3x^1 - x^2 + x^3), \forall \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Arătați că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

Rezolvare

$$\begin{aligned} T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= T(\lambda x^1 + \mu y^1, \lambda x^2 + \mu y^2, \lambda x^3 + \mu y^3) = \\ &(\lambda x^1 + \mu y^1 + \lambda x^3 + \mu y^3, 2\lambda x^1 + 2\mu y^1 + \lambda x^3 + \mu y^3, 3\lambda x^1 + 3\mu y^1 - \lambda x^2 - \mu y^2 + \lambda x^3 + \mu y^3) = \\ &(\lambda x^1 + \lambda x^3, 2\lambda x^1 + \lambda x^3, 3\lambda x^1 - \lambda x^2 + \lambda x^3) + (\mu y^1 + \mu y^3, 2\mu y^1 + \mu y^3, 3\mu y^1 - \mu y^2 + \mu y^3) = \\ &\lambda(x^1 + x^3, 2x^1 + x^3, 3x^1 - x^2 + x^3) + \mu(y^1 + y^3, 2y^1 + y^3, 3y^1 - y^2 + y^3) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}). \end{aligned}$$

Exemplul 7 Fie V_1, V_2 subspații liniare suplementare ale lui V , $V_1 \oplus V_2 = V$. $\forall \vec{x} \in V \exists! \vec{x}_1 \in V_1, \exists! \vec{x}_2 \in V_2$ astfel încât $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Definim proiecția lui V pe V_1 , paralelă cu V_2 , prin

$$p_1 : V \rightarrow V_1, p_1(\vec{x}) = \vec{x}_1, \forall \vec{x} \in V$$

și proiecția lui V pe V_2 , paralelă cu V_1 , prin

$$p_2 : V \rightarrow V_2, p_2(\vec{x}) = \vec{x}_2, \forall \vec{x} \in V.$$

De asemenea, definim simetria lui V față de V_1 , paralelă cu V_2 , prin

$$s_1 : V \rightarrow V, s_1 = 2p_1 - Id_V, s_1(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \forall \vec{x} \in V$$

și simetria lui V față de V_2 , paralelă cu V_1 , prin

$$s_2 : V \rightarrow V, s_2 = 2p_2 - Id_V, s_2(\vec{x}) = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \forall \vec{x} \in V.$$

Demonstrați că p_1, p_2, s_1, s_2 sunt aplicații liniare și $p_i \circ p_i = p_i$ (proiecțiile sunt aplicații idempotente), $s_i \circ s_i = Id_V$ (simetriile sunt aplicații involutive).

Ne interesează legătura dintre aplicațiile liniare și subspațiile liniare ale lui V, W .

Teorema 8 (a) Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și $U \subset V$.

Atunci $T(U) \subset W$, unde $T(U) \stackrel{s.l.}{=} \{\vec{y} \in W \mid \exists \vec{x} \in U \text{ a.i. } \vec{y} = T(\vec{x})\}$ este imaginea lui U prin T .

(b) Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și $U \subset W$. Atunci $T^{-1}(U) \subset V$, unde $T^{-1}(U) \stackrel{s.l.}{=} \{\vec{x} \in V \mid \text{a.i. } T(\vec{x}) \in U\}$ este contraimaginea lui U prin T .

Demonstrație

(a) Fie $\alpha, \beta \in K, \vec{z}, \vec{w} \in T(U) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in U$ a.i. $T(\vec{x}) = \vec{z}, T(\vec{y}) = \vec{w}$. Deci $\alpha\vec{z} + \beta\vec{w} = \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y}) = T(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$. Deoarece $\vec{x}, \vec{y} \in U \subset V \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U$, deci $\alpha\vec{z} + \beta\vec{w} \in T(U)$, de unde rezultă că $T(U) \stackrel{s.l.}{=} \subset W$.

(b) Fie $\alpha, \beta \in K, \vec{x}, \vec{y} \in T^{-1}(U)$. Atunci $T(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y})$. $T(\vec{x}), T(\vec{y}) \in U \stackrel{s.l.}{=} \subset W \Rightarrow \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y}) \in U \Leftrightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in T^{-1}(U)$. Deci $T^{-1}(U) \stackrel{s.l.}{=} \subset V$.

Definiția 9 (a) Se numește **nucleul unei aplicații liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$ notat cu $\text{Ker}(T)$, **contraimaginea prin T a subspațiului vectorial nul** $\{\vec{0}_W\}$ al lui W .

$$\text{Ker}(T) := T^{-1}(\vec{0}_W) = \left\{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W \right\} \underset{s.l.}{\subseteq} V.$$

(c) Se numește **imaginea aplicației liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$, și se notează cu $\text{Im}(T)$, mulțimea

$$T(V) := \{ \vec{w} \in W : \exists \vec{v} \in V, T(\vec{v}) = \vec{w} \}.$$

Teorema precedentă ne asigură că $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$ sunt subspații liniare ale lui V , respectiv W .

Prezentăm în continuare câteva proprietăți generale ale transformărilor liniare.

Propoziția 10 Fie V, W două K -spații vectoriale și $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Transformarea liniară T este injectivă;

(ii) $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$;

(iii) Pentru orice sistem de vectori liniar independent $S \subset V$ avem că $T(S) \subset W$ este un sistem de vectori liniar independent.

Demonstrație

(i) \implies (ii) Fie $\vec{x} \in \text{Ker}(T)$. Atunci $T(\vec{x}) = \vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$ iar din injectivitatea lui T obținem $\vec{x} = \vec{0}_V$.

(ii) \implies (iii) Fie $S \subset V$ un sistem de vectori liniar independent și fie $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset T(S)$ un subsistem finit de vectori. Vom arăta că acest subsistem este liniar independent. Fie combinația liniară

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_W$$

Deoarece $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset T(S)$, avem că pentru orice $i \in \overline{1, p}$, există $\vec{x}_i \in S$ astfel încât $\vec{v}_i = T(\vec{x}_i)$. Deci relația de mai sus devine

$$\alpha_1 T(\vec{x}_1) + \dots + \alpha_p T(\vec{x}_p) = \vec{0}_W \Leftrightarrow T(\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p) = \vec{0}_W$$

adică $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p \in \text{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$. Prin urmare

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p = \vec{0}_V$$

Dar S este sistem liniar independent deci $\alpha_i = 0, \forall i \in \overline{1, p}$, adică sistemul $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ este liniar independent.

(iii) \implies (i) Fie ie $\vec{x}, \vec{y} \in V$ cu $\vec{x} \neq \vec{y}$. Deci $(\vec{x} - \vec{y}) \neq \vec{0}_V$ adică sistemul $\{\vec{x} - \vec{y}\}$ este liniar independent. Din (iii) avem că $\{T(\vec{x} - \vec{y})\}$ este liniar independent ceea ce este echivalent cu faptul că

$$T(\vec{x} - \vec{y}) \neq \vec{0}_W \Leftrightarrow T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$$

ceea ce înseamnă că T este injecție.

Propoziția 11 Fie V, W două K -spații vectoriale, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și $S \subset V$ un sistem de generatori al lui V . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Transformarea liniară T este surjectivă;

(ii) $T(S) \subset W$ este un sistem de generatori al lui W .

Demonstrație

(i) \implies (ii) Fie un vector arbitrar ales $\vec{w} \in W$. Vom arăta că \vec{w} este generat de elemente din $T(S)$.

Din (i) deducem că $\exists \vec{v} \in V$ astfel încât $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Deoarece S este sistem de generatori al lui V obținem că există scalarii $\lambda_i \in K, i \in \overline{1, p}$ și vectorii $\vec{x}_i \in S, i \in \overline{1, p}$ astfel încât

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i$$

Deci

$$\vec{w} = T(\vec{v}) = T\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i T(\vec{x}_i),$$

adică $T(S)$ este un sistem de generatori al lui W .

(ii) \implies (i) Fie $\vec{w} \in W$ un vector arbitrar. Din (ii) deducem că \vec{w} este generat de elemente din $T(S)$, adică $\exists \vec{w}_i \in T(S)$ și $\exists \lambda_i \in K, i \in \overline{1, p}$ astfel încât

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i T(\vec{v}_i),$$

unde $\vec{v}_i \in S, \forall i \in \overline{1, p}$. Deci

$$\vec{w} = T\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i\right),$$

ceea ce înseamnă că \vec{w} este imaginea unui element din V , adică T este surjectivă.

Definiția 12 O aplicație $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se numește **izomorfism de spații vectoriale** dacă aplicația T este bijectivă.

Un izomorfism de la V la V se numește **automorfism al lui V** .

Spunem că V este izomorf cu W dacă există un izomorfism de la V la W . În acest caz notăm $V \simeq W$.

Se poate demonstra rapid că relația \simeq este o relație de echivalență pe mulțimea endomorfismelor liniare ale unui spațiu liniar.

Propoziția 13 Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un izomorfism de spații liniare. Atunci $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Demonstrație

Fie $\alpha, \beta \in K, \vec{z}, \vec{w} \in W$. T este bijectivă deci $\exists \vec{x}, \vec{y} \in V$ a.i. $T(\vec{x}) = \vec{z}, T(\vec{y}) = \vec{w}$. Atunci $T^{-1}(\alpha\vec{z} + \beta\vec{w}) = T^{-1}(\alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y})) = T^{-1}(T(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$.

Notăm cu $Gl(V)$ mulțimea automorfismelor lui V . Se poate verifica ușor că $(Gl(V), \circ)$ are structură de grup necomutativ.

2 Transformări liniare între K -spații finit dimensionale

Definiția 14 Dimensiunea lui $Ker(T)$ se numește **defectul aplicației liniare $T \in \mathcal{L}(V, W)$** și se notează cu $def(T)$.

Dimensiunea lui $Im(T)$ se numește **rangul aplicației liniare $T \in \mathcal{L}(V, W)$** și se notează cu $rang(T)$.

Următoarea teoremă ne dă legătura între defectul și rangul unei aplicații liniare. Ea este utilă în caracterizarea injectivității, surjectivității, bijectivității unei aplicații liniare.

Teorema 15 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W)$. Atunci are loc

$$\text{rang}T + \text{def}T = n.$$

Demonstrație

Presupunem că $\dim(KerT) = p > 0$.

Fie $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1, p}}$ o bază în $KerT$. O completăm la o bază în V_n , fie aceasta $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n\}$.

Vom demonstra că $B'' = \{T(\vec{e}_{p+1}), \dots, T(\vec{e}_n)\} \subset ImT$ este o bază în ImT , de unde rezultă evident $\text{rang}T + \text{def}T = n$.

Fie $\vec{y} \in ImT \Rightarrow \exists \vec{x} \in V$ a.i. $\vec{y} = T(\vec{x})$. Deoarece B este bază în V_n , există scalarii $\lambda^i \in K, i \in \overline{1, n}$ a.i. $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$. Folosind că T este transformare liniară, avem $\vec{y} = T(\sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^i T(\vec{e}_i) = \sum_{i=p+1}^n \lambda^i T(\vec{e}_i)$, deoarece $T(\vec{e}_1) = \dots = T(\vec{e}_p) = \vec{0}_W$. Deci B'' este sistem de generatori pentru ImT .

Demonstră că B'' e sistem de vectori liniar independent.

Fie $\mu^{p+1}, \dots, \mu^n \in K$ a.i. $\sum_{i=p+1}^k \mu^i T(\vec{e}_i) = \vec{0}_W \Leftrightarrow T(\sum_{i=p+1}^k \mu^i \vec{e}_i) = \vec{0}_W \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^k \mu^i \vec{e}_i \in KerT$. Dar B este o bază în $KerT$, deci există $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in K$ a.i. $\sum_{i=p+1}^k \mu^i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^p \alpha^j \vec{e}_j \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^k \mu^i \vec{e}_i - \sum_{j=1}^p \alpha^j \vec{e}_j = \vec{0}_V$. Dar B' e bază în V_n , deci sistem de vectori liniar independent, rezultă $\alpha^1 = \dots = \alpha^p = \mu^{p+1} = \dots = \mu^n = 0$. Deci din $\sum_{i=p+1}^k \mu^i T(\vec{e}_i) = \vec{0}_W$ a rezultat $\mu^{p+1} = \dots = \mu^n = 0$, adică B'' e sistem de vectori liniar independent.

Dacă $\dim(KerT) = 0 \Leftrightarrow KerT = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow T$ e surjectivă, fie $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ o bază în V_n , deci B este un sistem de vectori liniar independenți. T fiind injectivă, rezultă că $B'' = \{T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)\} \subset ImT$ este sistem liniar independent de vectori. Faptul că B'' este sistem de generatori se demonstrează identic ca în cazul precedent, luând $p = 0$.

Aplicând Propozițiile 10, 11, obținem:

Corolarul 16 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci au loc:

- (i) T este aplicație injectivă $\Leftrightarrow \text{rang}T = n, n \leq m$
- (ii) T este aplicație surjectivă $\Leftrightarrow \text{rang}T = m, m \leq n$
- (iii) T este aplicație bijectivă $\Leftrightarrow \text{rang}T = n = m$

Observăm deci că defectul unei aplicații liniare măsoară abaterea ei de la injectivitate, iar rangul abaterea de la surjectivitate.

Corolarul 17 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_n)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) T este aplicație injectivă
- (ii) T este aplicație surjectivă
- (iii) T este aplicație bijectivă

Fie în continuare V_n un K -spațiu vectorial n -dimensional și considerăm spațiul vectorial aritmetic K^n .

Propoziția 18 Orice spațiu vectorial n -dimensional V_n este izomorf cu K^n .

Demonstrație

Teorema 21 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, B, \bar{B} două baze în V_n și B', \bar{B}' două baze în W_m . Presupunem că $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ și $B' \xrightarrow{S'} \bar{B}'$. Atunci are loc relația

$$M_{\bar{B}\bar{B}'}(T) = (S')^{-1} \cdot M_{BB'}(T) \cdot S, \quad (3)$$

unde $M_{BB'}(T)$ și $M_{\bar{B}\bar{B}'}(T)$ sunt matricile transformării liniare în raport cu bazele B și B' , respectiv \bar{B} și \bar{B}' .

Remarca 22 Formula (3) de mai sus, se numește *formula matriceală de schimbare a matricei unei transformări liniare la schimbări de baze*.

Demonstrație Am văzut mai sus că ecuația matriceală a lui T în raport cu perechea de baze B, B' este $Y = M_{BB'}(T) \cdot X$, și similar ecuația matriceală a lui T în raport cu perechea de baze \bar{B}, \bar{B}' este $\bar{Y} = M_{\bar{B}\bar{B}'}(T) \cdot \bar{X}$. Pe de altă parte, conform formulei matriceale de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, avem următoarele ecuații de legătură

$$X = S \cdot \bar{X}, \quad Y = S' \cdot \bar{Y}.$$

Deci

$$\begin{aligned} Y &= S' \cdot \bar{Y} = M_{BB'}(T) \cdot X = M_{BB'}(T) \cdot S \cdot \bar{X} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{Y} &= \left((S')^{-1} M_{BB'}(T) S \right) \cdot \bar{X} \end{aligned}$$

Dar $\bar{Y} = M_{\bar{B}\bar{B}'}(T) \cdot \bar{X}$ deci, identificând matricile obținem

$$M_{\bar{B}\bar{B}'}(T) = (S')^{-1} \cdot M_{BB'}(T) \cdot S.$$

Remarca 23 Știm că $\text{rang}(AS) = \text{rang}(S'A) = \text{rang}(A)$, pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ și orice matrice nesingulară $S \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, $S' \in \mathcal{M}_{m,m}(K)$. Deci rangul matricei unei aplicații liniare nu depinde de bazele în raport cu care se scrie această matrice. Spunem că rangul matricei unei aplicații liniare este un invariant al aplicației liniare.

Corolarul 24 Fie endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V_n)$ și B, \bar{B} baze în V_n cu $B \xrightarrow{S} \bar{B}$. Atunci are loc relația

$$M_{\bar{B}}(T) = (S)^{-1} \cdot M_B(T) \cdot S, \quad (4)$$

Definiția 25 Două matrice patratică $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ se numesc asemenea dacă există o matrice nesingulară $S \in \text{Gl}(n, K)$ astfel încât $B = S^{-1}AS$.

Deducem că matricile unui endomorfism liniar în raport cu două baze diferite sunt asemenea. Pe lângă rangul matricei $M_B(T)$, un alt invariant al lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$ este evident determinantul lui $M_B(T)$.

Se poate demonstra următorul rezultat, care explică denumirea de $\text{rang}T$.

Propoziția 26 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci $\text{rang}T = \text{rang}A$, unde A este matricea transformării liniare T în raport cu două baze fixate arbitrar în V și W .

Într-adevăr, dacă $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ e o bază în V_n , atunci $\text{Im}T = T(V_n)$ e generat de $\{T(\vec{e}_i)\}_{i \in \overline{1,n}}$, deci $\dim(\text{Im}T)$ este numărul maxim de vectori liniar independenți din $\{T(\vec{e}_i)\}_{i \in \overline{1,n}}$ care este dat de rangul matricei lui T în raport cu baza B și o altă bază în W .

Teorema 27 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ o bază în V_n și $B' = \{\vec{f}_j\}_{j \in \overline{1, m}}$ o bază în W_m , $A = M_{BB'}(T)$. Atunci aplicația

$$\Theta : \mathcal{L}(V_n, W_m) \rightarrow \mathcal{M}_{n, m}(K), \quad \Theta(T) = M_{BB'}(T), \quad \forall T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$$

este izomorfism de spații liniare.

O consecință a acestei teoreme este că $\dim \mathcal{L}(V_n, W_m) = nm$.

Teorema 28 Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ o bază în V_n și $A = M_B(T)$.

(a) Aplicația $\Theta : \mathcal{L}(V_n) \rightarrow \mathcal{M}_{n, n}(K)$, $\Theta(T) = M_B(T)$, $\forall T \in \mathcal{L}(V_n)$ este izomorfism de inele.

(b) Aplicația $\Psi : Gl(V_n) \rightarrow Gl(n, K)$, $\Psi(T) = M_B(T)$ este izomorfism de grupuri.

3 Aplicații

1. Pentru următorii operatori liniari, determinați nucleul, imaginea, câte o bază în fiecare.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x^1, x^2, x^3) = (x^1 - x^2 + x^3, x^1 + x^3, x^1 + x^3)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x^1, x^2, x^3) = (2x^1 + x^2, 4x^3)$;

(c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x^1, x^2) = (x^1, x^1 + 3x^2, 2x^1 - x^2, x^2)$.

Rezolvare

(a) $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in Ker(T) \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ker(T) = \{(t, 0, -t), t \in \mathbb{R}\}$.

Deducem că $B_1 = \{\vec{a} = (1, 0, -1)\}$ e bază în $Ker(T)$, deci $\text{def}T = 1$.

Deoarece $\text{rang}T + \text{def}T = 3$, rezultă $\text{def}T = 2$, deci $Im(T)$ este un subspațiu liniar 2 dimensional al lui \mathbb{R}^3 .

Completăm baza B_1 la o bază $B = \{\vec{a}, \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0)\}$ în \mathbb{R}^3 și luăm $B'' = \{T(\vec{e}_1) = (1, 1, 1), T(\vec{e}_2) = (-1, 0, 0)\}$. Din demonstrația teoremei ce ne dă legătura dintre rangul și defectul lui T , știm că B'' este bază în $Im(T)$. Deci

$$Im(T) = \{(\alpha - \beta, \alpha, \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$

$$Im(T) = \left\{ \vec{y} = (y^1, y^2, y^3) \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \begin{cases} \alpha - \beta = y^1 \\ \alpha = y^2 \\ \alpha = y^3 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow$$

$$Im(T) = \{ \vec{y} = (y^1, y^2, y^3) \mid y^2 - y^3 = 0 \}.$$

(b) Ca la subpunctul anterior, obținem $Ker(T) = \{(t, -2t, 0), t \in \mathbb{R}\}$, deci $B_1 = \{\vec{a} = (1, -2, 0)\}$ e bază în $Ker(T)$, deci $\text{def}T = 1$.

Rezultă că $\text{def}T = 2$, deci $Im(T)$ este un subspațiu liniar 2 dimensional al lui \mathbb{R}^2 , deci $Im(T) = \mathbb{R}^2$. Rezultă că T este surjectivă. Evident orice bază a lui \mathbb{R}^2 este bază în $Im(T)$.

(c) Obținem $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, deci T este injectivă. Rezultă că $\text{def}T = 2$, deci $Im(T)$ este un subspațiu liniar 2 dimensional al lui \mathbb{R}^4 .

Alegem $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0)\}$ bază în \mathbb{R}^2 .

Știm că $\{T(\vec{e}_1) = (1, 1, 2, 0), T(\vec{e}_2) = (0, 3, -1, 1)\}$ este bază în $Im(T)$. Obținem

$$Im(T) = \{(\alpha, \alpha + 3\beta, 2\alpha - \beta, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \left\{ \vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4) \mid \begin{cases} 3y^1 - y^2 + 3y^4 = 0 \\ 2y^1 - y^3 - y^4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

2. Fie transformările liniare

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(\vec{x}) = (2x^1 - x^2, 3x^2), \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(\vec{x}) = (-x^1 + x^2, 4x^1), \quad \forall \vec{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$ și să se verifice că acestea sunt transformări liniare.

Soluție: Vom scrie mai întâi expresiile obținute prin compunerea celor două transformări:

$$\begin{cases} (g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(2x^1 - x^2, 3x^2) = (-2x^1 + x^2 + 3x^2, 8x^1 - 4x^2) = (-2x^1 + 4x^2, 8x^1 - 4x^2) \\ (f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(-x^1 + x^2, 4x^1) = (-2x^1 + 2x^2 - 4x^1, 12x^1) = (-6x^1 + 2x^2, 12x^1) \end{cases}$$

Se verifică condițiile din definiție și se obține că cele două aplicații sunt transformări liniare.

Să scriem matricele asociate celor două compuneri în raport cu baza canonică din \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} (g \circ f)(\vec{e}_1) = (-2, 8) \\ (g \circ f)(\vec{e}_2) = (4, -4) \end{cases} \rightarrow M_{B_c}(g \circ f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(\vec{e}_1) = (-6, 12) \\ (f \circ g)(\vec{e}_2) = (2, 0) \end{cases} \rightarrow M_{B_c}(f \circ g) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Puteam folosi

$$M_{B_c}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_{B_c}(g \circ f) = M_{B_c}(g) \cdot M_{B_c}(f), \quad M_{B_c}(f \circ g) = M_{B_c}(f) \cdot M_{B_c}(g).$$

3. Fie transformarea liniară

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x^1, x^2, x^3) = (x^1 + x^2, 2x^1 + 3x^2 - x^3, x^1 - x^3), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Fie $B_c = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ baza canonică din \mathbb{R}^3 și

$B = \{\vec{f}_1 = (1, 1, 0), \vec{f}_2 = (1, 0, 1), \vec{f}_3 = (0, 1, 1)\}$ o altă bază în \mathbb{R}^3 .

Să se scrie matricele $M_{B_c}(T)$, $M_B(T)$, $M_{B_c B}(T)$, $M_{B B_c}(T)$.

Soluție: Pentru a scrie matricea în raport cu bazele canonice vom calcula imaginile vectorilor bazei spațiului de plecare:

$$T(\vec{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2, 1), \quad T(\vec{e}_2) = T(0, 1, 0) = (1, 3, 0), \quad T(\vec{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, -1, -1).$$

$$\text{Obținem: } M_{B_c}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina $M_B(T)$ avem nevoie de matricea de trecere de la baza canonică la baza

$$B, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Atunci } M_B(T) = S^{-1} \cdot M_{B_c}(T) \cdot S.$$

Calculăm inversa matricei schimbării de bază: $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Prin urmare

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Același rezultat se obține și dacă calculăm

$$\begin{cases} T(1, 1, 0) = (2, 5, 1) \\ T(1, 0, 1) = (1, 1, 0) \\ T(0, 1, 1) = (1, 2, -1) \end{cases}$$

apoi căutăm $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' \in \mathbb{R}$ a.i.

$$\begin{cases} (2, 5, 1) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) \rightarrow a = 3, b = -1, c = 2 \\ (1, 1, 0) = a'(1, 1, 0) + b'(1, 0, 1) + c'(0, 1, 1) \rightarrow a' = 1, b' = 0, c' = 0 \\ (1, 2, -1) = a''(1, 1, 0) + b''(1, 0, 1) + c''(0, 1, 1) \rightarrow a'' = 2, b'' = -1, c'' = 0 \end{cases}$$

$$\text{Analog } M_{B_c B}(T) = S^{-1} \cdot M_{B_C}(T) \cdot I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pentru ultima matrice avem: } M_{B B_c}(T) = I M_{B_C}(T) \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$