Curs 6 - Subspații vectoriale. Sisteme de generatori.

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Subspații vectoriale

Definiţia 1 *Fie $(V,+,\cdot)$ un K spațiu vectorial. O submulţime $V'\subset V$ se numește **subspaţiu vectorial** (sau subspațiu liniar) al lui V dacă restricțiile operațiilor $+$ și $\cdot$ la $V'\times V'$, respectiv la $K\times V'$, conferă lui V' o structură de K spațiu vectorial.*

Notăm $V'\underset{s.v.}{\subset}V$, $V'\underset{s.l.}{\subset}V$ sau $V'\leq V$.

Teorema 2 *O submulţime $V'\subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă avem:*

$$\forall\vec{u},\vec{v}\in V',\forall\alpha,\beta\in K\Rightarrow\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in V'. \tag{1}$$

Demonstra. *Necesitatea ("$\Rightarrow$")* Dacă $V'\subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V atunci restricția lui $+$ la $V'\times V'$ este o operație internă, deci cu valori tot in V', adică $\forall\vec{u},\vec{v}\in V'$ rezultă că $\vec{u}+\vec{v}\in V'$. Analog, restricția lui $\cdot$ la $K\times V'$ e operație externă, deci ia valori tot în V'. Deci $\forall\alpha\in K$, $\forall\vec{u}\in V'$, rezultă că $\alpha\vec{u}\in V'$. Atunci, $\forall\vec{u},\vec{v}\in V',\forall\alpha,\beta\in K$, avem $\alpha\vec{u}\in V'$ și $\beta\vec{v}\in V'$, deci și $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in V'$.

Suficienţa ("$\Leftarrow$") Presupunem că are loc (1). Dacă alegem $\alpha=\beta=1$ obţinem că $\forall\vec{u},\vec{v}\in V'\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in V'$, deci restricția lui $+$ la $V'\times V'$ este o operație internă. Dacă alegem în (1) $\beta=0$, obţinem că $\forall\alpha\in K$, $\forall\vec{u}\in V'\Rightarrow\alpha\vec{u}\in V'$. Deci restricția lui $\cdot$ la $K\times V'$ e operație externă. În plus, dacă alegem $\alpha=\beta=0$ în (1) , obţinem că $\vec{0}\in V'$. Să demonstrăm că sunt verificate toate axiomele spaţiului vectorial pentru $+|_{V'\times V'}$ și $\cdot|_{K\times V'}$.

Mai întâi verifică ca $(V',+|_{V'\times V'})$ este subgrup al lui $(V,+)$. Știm deja că $\forall\vec{u},\vec{v}\in V'\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in V'$. Fie $\vec{v}\in V'$ arbitrar. Atunci, alegem $\alpha=-1$ în (1) și obținem $-\overrightarrow{v}=(-1)\overrightarrow{v}\in V'$. Deci $(V',+|_{V'\times V'})$ este subgrup al lui $(V,+)$.

În final, înmulțirea vectorilor din V cu scalari din K verifică cele patru axiome din definiția spațiului liniar. Atunci si $\cdot|_{K\times V'}$ verifică aceste axiome. Deci $(V',+|_{V'\times V'},\cdot|_{K\times V'})$ este spațiu liniar.

■

Remarca 3 *Pentru caracterizarea unui subspaţiu vectorial relaţia (1) poate fi înlocuită, echivalent, cu*

$$(\forall\vec{u},\vec{v}\in V'\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in V')\wedge(\forall\alpha\in K,\forall\vec{u}\in V'\Rightarrow\alpha\vec{u}\in V'). \tag{2}$$

Exemplul 4 *Submulţimea $\{\vec{0}\}$ a unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial. Întreg spațiul vectorial este subspațiu vectorial al său.*

Exemplul 5 *Considerăm spaţiul vectorial aritmetic K^n. Atunci submulţimea sa*

$$V=\{\vec{u}\in K^n\mid\vec{u}=(0,u_2,u_3,\ldots,u_n),\,u_2,u_3,\ldots,u_n\in K\}\subset K^n$$

este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice $\vec{u},\vec{v}\in V,\forall\alpha,\beta\in K$ avem că

$$\begin{aligned}\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} &= \alpha(0,u_2,u_3,\ldots,u_n)+\beta(0,v_2,v_3,\ldots,v_n)=(0,\alpha u_2,\ldots,\alpha u_n)+(0,\beta v_2,\ldots,\beta v_n)\\ &= (0,\alpha u_2+\beta v_2,\ldots,\alpha u_n+\beta v_n)\in V.\end{aligned}$$

Exemplul 6 *Pe de altă parte, submulţimea* $V' = \{\vec{u} \in K^n \mid \vec{u} = (1, u_2, u_3, \ldots, u_n),\ u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$ *nu este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, fie* $\vec{u}, \vec{v} \in V'$*. Avem că*

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = \\ &= (2, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \notin V', \end{aligned}$$

deoarece $2 \neq 1$*.*

Exemplul 7 *Fie* $\mathcal{M}_n(K)$ *spaţiul vectorial al matricelor pătratice cu elemente din* K*. Atunci submulţimea sa* $S_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ *(submulţimea matricelor simetrice) este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice* $A, B \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ *avem că*

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B,$$

adică vectorul matrice care s-a obţinut este o matrice simetrică şi deci $\alpha A + \beta B \in V$*.*

Analog, se poate demonstra că $A_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid -A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ *(submulţimea matricelor antisimetrice) este un subspaţiu vectorial.*

Exemplul 8 *Mulţimea polinoamelor de grad cel mult* n *este subspaţiu liniar al spaţiului liniar al polinoamelor, cu coeficienţi într-un câmp dat:* $K_n[X] \underset{s.v.}{\subset} K[X]$*, deoarece orice combinaţie liniară de două polinoame de grad cel mult* n *este un polinom de grad cel mult* n*.*

Exemplul 9 $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\ funcţie\ continuă\ pe\ \mathbb{R}\}$*,*

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\ funcţie\ derivabilă\ pe\ \mathbb{R}\}$ *sunt subspaţii vectoriale ale lui* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*, deoarece orice combinaţie liniară de funcţii continue (respectiv derivabile) este o funcţie continuă (derivabilă).*

Exemplul 10 *Considerăm un sistem omogen de* m *ecuaţii liniare, cu* n *necunoscute* $x_1, \cdots, x_n$*, scris matricial sub forma* $AX = O$*, unde* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *e matricea sistemului,* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$*. Atunci, mulţimea soluţiilor* S *a acestui sistem este subspaţiu liniar al lui* $\mathbb{R}^n$*.*

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$*,* $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ *două soluţii arbitrare ale sistemului,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *arbitrari,* X, Y *matricele coloană* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$*. Deci* $AX = O$ *şi* $AY = O$*. Rezultă* $A(\alpha X + \beta Y) = O$*, deci* $\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}$ *e soluţie a sistemului dat.*

Definiţia 11 *Fie* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ *un sistem de* $n \in \mathbb{N}^*$ *vectori din spaţiul vectorial* V*. Spunem că vectorul* $\vec{v} \in V$ *este o* ***combinaţie liniară*** *de vectorii sistemului* S *dacă există* n *scalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ *astfel încât are loc*

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Teorema 12 *Fie* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p\}$*. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ce se pot forma cu vectorii sistemului* S *este un subspaţiu vectorial al lui* V*.*

Demonstra. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V$ doi vectori din V care se pot exprima ca nişte combinaţii liniare de vectori din S,deci

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_p \vec{v}_p \text{ şi } \vec{v} = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \cdots + b_p \vec{v}_p\,.$$

În relaţiile de mai sus o parte dintre coeficienţi pot fi nuli. Atunci $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \cdots = (\alpha a_1 + \beta b_1)\,\vec{v}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\,\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha a_p + \beta b_p)\,\vec{v}_p$, adică $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ este de asemenea o combinaţie liniară de vectori din S şi, aplicând caracterizarea dată de Teorema 2, obţinem concluzia. ∎

Definiţia 13 *Vom nota cu $[S]$ sau $L(S)$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ce se pot forma cu vectorii din S,*

$$[S] := \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha\vec{v}_p,\ \forall\alpha_1, ..., \alpha_p \in K, p \in \mathbb{N}^*\} \subseteq V.$$

*Această mulţime este, conform teoremei precedente, un subspaţiu vectorial şi se numeşte **subspaţiul vectorial generat** de submulţimea S (sau înfăşurătoarea liniară a lui S). Spunem că vectorii $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p$ formează un **sistem de generatori** pentru $[S]$.*

Putem da o definiție similară și pentru cazul în care S nu este finită. Atunci $[S]$ este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare **finite** de vectori din S și este subspațiu liniar al lui V.

2 Sisteme de generatori

Definiţia 14 *Vom spune că submulţimea $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \subset V$ este un **sistem de generatori** al lui V dacă subspaţiul vectorial generat de S coincide cu V, adică*

$$[S] = V,$$

(ceea ce înseamnă că orice vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S). În acest caz, spunem că V este finit generat.

Exerciţiul 15 *În spaţiul vectorial K^n , fie sistemul de vectori*

$$S = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \cdots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

(1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K). Verificăm dacă S este un sistem de generatori pentru K^n.

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un vector arbitrar din K^n . Verificăm dacă există scalarii $\alpha_i \in K$, $i \in \overline{1, n}$ a.i.

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n (0, \ldots, 1) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow \alpha_i = x_i, \forall i \in I.$$

Deci există scalarii cu proprietatea cerută (chiar unici), deci S este un sistem de generatori pentru K^n.

Exerciţiul 16 *Studiaţi dacă următorul sistem de vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$:*

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)\}.$$

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$. Verificăm dacă există scalarii reali α_i, $i \in \overline{1, 3}$ a.i.

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$$

care este echivalent cu rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ *şi* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, *rezultă că rangul matricei sistemului este doi. Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar și suficient ca minorul caracteristic să fie nul,* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x_3 - x_1) = 0$. *Deci doar vectorii* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, *cu* $x_3 = x_1$, *pot fi generați de* S. *Rezultă că* S *nu este un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 17 *Evident* $S = \{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ *este sistem de generatori pentru* $K_n[X]$, *dar* $S^{'} = \{X, X^2, \cdots, X^n\}$ *nu generează pe* $K_n[X]$, *deoarece polinoamele de grad* 0 *nu se pot scrie ca niște combinații liniare de polinoamele lui* $S^{'}$.

Remarca 18 *Dacă* S *este sistem de generatori pentru* V *și* $S \subset S^{'}$, *(* S, S' *finite), atunci* $S^{'}$ *este sistem de generatori pentru* V.

Evident, orice vector din V *este o combinație liniară de vectorii lui* S, *la care adăugăm vectorii din* $S' \backslash S$ *înmulțiți cu* 0.

Deci e important să determinăm un sistem minimal de generatori.

Teorema 19 *Fie* $\{V_i\}_{i \in I}$ *o mulțime de subspații liniare ale lui* V. *Atunci intersecția lor,* $\cap_{i \in I} V_i$, *este subspațiu liniar al lui* V .

Demonstra. *Fie* $\vec{u}, \vec{v} \in V$ *doi vectori arbitrari din* $\cap_{i \in} V_i$ *și* α, β *doi scalari arbitrari din* K.

Rezultă că $\vec{u}, \vec{v} \in V_i$, $\forall i \in I$. *Dar* V_i *e subspațiu liniar al lui* V, *pentru orice* $i \in I$, $\Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_i$, $\forall i \in I \Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta \in \cap_{i \in I} V_i$.

■

Remarca 20 *Se poate demonstra că subspațiul generat de* S *este intersecția tuturor subspațiilor vectoriale ale lui* V *care includ pe* S. *Deci* $[S]$ *este cel mai mic subspațiu liniar (în sensul incluziunii), care conține pe* S.

3 Exerciții

1. *Să se precizeze care din submulţimile de mai jos sunt subspații vectoriale şi care nu.*

   (a) $S_1 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (b) $S_2 = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$;

   (d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + 3x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (f) $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + 3x_2 = 1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (g) $S_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (h) $S_8 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 > 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   Rezolvare:

   Trebuie să verificăm dacă prin orice de combinaţie liniară cu elemente din submulţime, părăsim sau nu submulţimea. Fie, arbitrari, dar fixaţi, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $x, y \in S_i$, $i = \overline{1,8}$, *şi să vedem dacă* $\alpha x + \beta y$ *rămâne sau nu în* S_i, $i = \overline{1,8}$.

   Se va obţine că sunt subspaţii vectoriale S_1, S_4 *şi* S_5.

2. *Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*:*

   (a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

   (b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

   (c) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$*?*

   Rezolvare:

   Trebuie să verificăm dacă prin orice combinaţie liniară cu elemente din submulţime, părăsim sau nu submulţimea.

   (a) *Calculăm, pentru* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $A, A' \in S_1$,

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \in S_1,$$

   deci S_1 *este subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*

   (b) *Calculăm, pentru* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $A, A' \in S_2$,

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & a' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \notin S_2,$$

   deoarece $2 \neq 1$*, deci* S_2 *nu este subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*

   (c) *Calculăm, pentru* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $A, A' \in S_3$,

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \in S_3,$$

   deci S_3 *este subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*

3. *Să se arate că mulţimea matricelor de forma* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *.*

4. *Să se arate că mulţimea matricelor de forma* $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *.*

5. *Se dau vectorii* $\vec{v}_1 = (1, 2, -3, -1)$*,* $\vec{v}_2 = (0, -1, 1, 2)$*,* $\vec{v}_3 = (-2, 0, 1, 3)$*,* $\vec{v}_4 = (-1, 1, 1, 2)$ *şi* $\overrightarrow{v}_5 = (1, 1, 1, 1)$ *din* $\mathbb{R}^4$*. Să se arate că* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \overrightarrow{v}_5\}$ *este sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^4$*.*

   Rezolvare:

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *un vector arbitrar din* $\mathbb{R}^4$*. Verificăm dacă există scalarii reali* α_i*,* $i \in \overline{1,5}$ *a.i.*

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4 + \alpha_5 \overrightarrow{v}_5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 & = x_1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 & = x_2, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 & = x_3, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 & = x_4. \end{cases}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$, *rezultă că* $rangA = rang\bar{A} = 4$, *deci sistemul este compatibil nedeterminat* (α_5 *necunoscută secundară). Deci vectorii formează un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^4$. *Observăm că fiecare vector al lui* $\mathbb{R}^4$ *se poate scrie într-o infinitate de moduri ca o combinație liniară de* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \overrightarrow{v}_5$.

6. Demonstrați că următorul sistem de vectori nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, -1, 2), \vec{v}_2 = (2, 1, -1), \vec{v}_3 = (-1, -2, 3)\}.$$

Rezolvare:

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *un vector arbitrar . Verificăm dacă există scalarii reali* α_i, $i \in \overline{1,3}$ *a.i.*

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & = x_1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 & = x_2, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 & = x_3. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este 2, *de exemplu un minor principal este* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$. *Sistemul este compatibil dacă și numai dacă minorul caracteristic de mai jos este nul,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \end{vmatrix} = -x_1 + 5x_2 + 3x_3.$$

Deoarece există vectori $\overrightarrow{x}$ *pentru care acesta e nenul, de exemplu* $\overrightarrow{x} = (1, 0, 0)$, *deducem că sistemul e incompatibil, deci* S *nu este sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$.