Seminar 1

1. Fie
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
pe care definim legea de compoziție internă:
$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$
   a) Demonstrați că $(\mathbb{R}^3, +)$ este grup comutativ.
   b) Arătați că $(W, +)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}^3, +)$, unde
$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Se consideră în S_4 următoarele permutări:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   a) Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, determinați σ^{-1}, τ^{-1} și signaturile lui σ și τ.
   b) Demonstrați că mulțimea permutărilor pare de ordinul n, împreună cu produsul (compunerea) permutărilor, este subgrup al grupului permutărilor $(S_n, \cdot)$.

4) Demonstrați că $(M_{m,n}(\mathbb{C}), +)$ este grup comutativ. Fie
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$
Demonstrați că $(W, +)$ este subgrup al lui $(M_{2,3}(\mathbb{R}), +)$.

3. Demonstrați că mulțimea matricelor simetrice de ordin n (respectiv a celor antisimetrice) este subgrup al lui $(M_n(\mathbb{R}), +)$.

4. Fie
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
Demonstrați că $(W, \cdot)$ este grup neabelian.

5. Efectuați următoarele produse de matrice:
$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Calculați A^m, $m \in \mathbb{N}^*$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Calculați suma de matrice

$$S = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ -k & 2 & \dfrac{k(k-1)}{2} \end{pmatrix}.$$