

Contract PN-II-RU-TE-2011-3-0108,

Nr. 51/05.10.2011

Aplicatii biarmonice si subvarietati in diferite contexte geometrice

Director proiect: Prof. Dr. Cezar Oniciuc

Raport Stiintific (pentru perioada 2011 - 2014)

I. Abordarea obiectivelor proiectului. Articole publicate sau acceptate

01. Primul obiectiv propus in cadrul proiectului este *Studiul subvarietatilor biarmonice in forme spatiale sasakiene 7-dimensionale si in spatiul proiectiv complex CP^3* . Obiectivul a fost realizat in totalitate, rezultatele cercetarii fiind prezentate in lucrarea

1. Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms, autori Cezar Oniciuc si Dorel Fetcu. Lucrarea a fost publicata in *Tohoku Mathematical Journal*, 64 (2), 195–222, 2012.

Aceasta lucrare continua studiul subvarietatilor integrale in forme spatiale sasakiene. Acest studiu a fost inceput de T. Sasahara, care a determinat toate suprafetele integrale biarmonice in sfera unitate 5-dimensională inezestrata cu structura uzuala de forma spatiala saskiana.

In lucrarea raportata, autorii au determinat ecuatiile (una pentru partea tangenta si una pentru partea normala) ce caracterizeaza subvarietatile integrale biarmonice si subvarietatile integrale C-paralele biarmonice de dimensiune maxima intr-o forma spatiala saskiana de dimensiune oarecare. Folosind aceste ecuatii, au fost clasificate toate subvarietatile integrale C-paralele biarmonice 3-dimensionale intr-o forma spatiala saskiana de dimensiune 7. In continuare, considerand sfera unitate S^7 inezestrata cu structura uzuala de forma spatiala saskiana de curbura olomorfa 1 si apoi cu structura modificata, definita de Tanno, de forma spatiala saskiana, s-au gasit ecuatiile parametrice ale subvarietatilor C-paralele biarmonice. In ultima sectiune a lucrarii, folosind fibrarea Hopf de la S^7 la spatial proiectiv complex CP^3 , autorii au determinat toate subvarietatile lagrangiene paralele biarmonice in CP^3 .

02. Al doilea obiectiv al proiectului, intitulat *Studiul subvarietatilor biarmonice cu proprietati geometrice aditionale in sfere*, a fost realizat in totalitate prin lucrarile:

1. Biharmonic PNMC submanifolds in spheres, autori Adina Balmus, Stefano Montaldo si Cezar Oniciuc, publicata in *Arkiv für Matematik*, 51 (2), 197–221, 2013.

In acest articol s-au obtinut unele rezultate de rigiditate pentru subvarietati biarmonice PNMC in S^n . Subvarietatile PNMC (subvarietati care au campul vectorial curbura medie normalizat paralel in fibratul normal) constituie o generalizare a subvarietatilor PMC (subvarietati care au campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal), iar un rezultat de rigiditate precizeaza conditii suficiente in care o subvarietate PNMC este PMC.

In lucrarea mentionata, s-a obtinut caracterizarea biarmonicitatii subvarietatilor PNMC in S^n in termenii functiei curbura medie si a operatorului Weingarten asociat campului vectorial curbura medie normalizat.

Pentru cazul compact s-au obtinut rezultate de rigiditate impunand unele restrictii asupra normei operatorului Weingarten asociat campului vectorial curbura medie normalizat sau asupra functiei curbura medie.

In cazul necompact, in ipoteza de completitudine, impunand restrictii asupra curburii Ricci si folosind principiul Omori-Yau, s-au obtinut rezultate similare.

S-au clasificat apoi subvarietatile PNMC biarmonice cu cel mult doua curburi principale in directia campului vectorial curbura medie in sfere. In particular, au fost complet determinate suprafetele PNMC biarmonice in S^n .

Apoi a fost investigat tipul, in sensul lui B.-Y. Chen, pentru subvarietati biarmonice proprii, nu neaparat compacte, in S^n . S-a demonstrat ca:

- (i) o subvarietate biarmonica proprie in S^n este de tip 1 sau 2 daca si numai daca are curbura medie constanta $f = 1$ sau $f \in (0, 1)$, respectiv.
- (ii) nu exista subvarietati PNMC biarmonice proprii de tip 3 in S^n .

2. Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienergy tensor, autori Renzo Cadeo, Stefano Montaldo, Cezar Oniciuc si Paola Piu, publicata in *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (4), 193 (2), 529—550, 2014.

In aceasta lucrare, autorii au introdus notiunea de subvarietate biconservativa. O subvarietate se numeste biconservativa daca partea tangenta a campului de bitensiune se anuleaza. In mod echivalent, o subvarietate este biconservativa daca si numai daca divergenta campului de tensiune bienergie asociat este zero. Campul de tensiune bienergie provine dintr-un principiu variational. Notiunea de subvarietate biconservativa este mai putin restrictiva decat cea de subvarietate biarmonica, fapt ce a permis obtinerea a numeroase exemple. In acest articol s-au gasit in mod explicit toate suprafetele biconservative in spatiul euclidian 3-dimensional in sfera euclidian 3-dimensional si in spatiul hiperbolic 3-dimensional. Una dintre proprietatile interesante ale suprafetelor biconservative in R^3 sau S^3 este faptul ca aceste suprafete sunt suprafete de rotatie de un anumit tip.

3. Biharmonic surfaces of constant mean curvature, autori Eric Loubeau, Cezar Oniciuc, *Pacific J. Math.*, 271 (1), 213—230, 2014.

In aceasta lucrare, s-a calculat o formula de tip Simons pentru campul tensiune bienergie asociat aplicatiilor biarmonice de la o suprafata intr-o varietate riemanniana arbitrara. In cazul in care aplicatiile biarmonice sunt si imersii riemanniene, s-au obtinut mai multe rezultate de rigiditate pentru suprafetele CMC, punand in evidenta influenta curburii

gaussiene asupra pseudo-ombilicitatii. In partea a doua a lucrarii s-a aratat ca ipoteza de biarmonicitate permite extinderea teoremei clasice a lui Hopf asupra suprafetelor CMC in orice varietate riemanniana.

4. *Biconservative surfaces*, autori Stefano Montaldo, Cezar Oniciuc, Andrea Ratto

In aceasta lucrare, am obtinut cateva proprietati geometrice ale suprafetelor biconservative intr-o varietate riemanniana arbitrara. In particular, am studiat relatia dintre suprafetele biconservative si olomorfia functiei Hopf generalizate. De asemenea, am dat o clasificare completa a suprafetelor CMC biconservative intr-o forma spatiala 4-dimensională.

5. *Proper biconservative immersions into the euclidian space*, autori Stefano Montaldo, Cezar Oniciuc, Andrea Ratto

In aceasta lucrare, utilizand tehnici de geometrie diferentiala echivarianta, am studiat hipersuprafetele biconservative $SO(p+1) \times SO(q+1)$ - invariante in spatiul euclidian $R^n (n = p + q + 2)$ si hipersuprafetele biconservative $SO(p+1)$ - invariante in spatiul euclidian $R^n (n = p + 2)$. Mai mult, am aratat ca in aceste doua clase de familii invariante nu exista imersii propriu biarmonice.

6. *CMC proper-biharmonic surfaces of constant gaussian curvature in spheres*, autori Eric Loubeau, Cezar Oniciuc

In aceasta lucrare, am investigat suprafetele CMC in sfere impunand conditia suplimentara de biarmonicitate. Plecand de la lucrarea lui Miyata, am dat o descriere completa a unor astfel de imersii, iar in cazul plat am aratat ca pentru orice $h \in (0,1)$ exista plane si cilindri CMC propriu-biarmonice in S^5 , cu $|H| = h$, si am gasit o conditie necesara si suficienta asupra lui h pentru existenta torurilor CMC propriu biarmonice in S^5 , de curbura medie h .

03. Al treilea obiectiv al proiectului, intitulat *Studiul subvarietatilor care au campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal*, a fost realizat prin lucrarile:

1. *Biharmonic Submanifolds with Parallel Mean Curvature in $S^n \times R$* , autori Cezar Oniciuc, Dorel Fetcu si Harold Rosenberg, publicata in *Journal of Geometric Analysis*, 23 (4), 2158–2176, 2013.

Intr-o lucrare recenta, Y.-L. Ou si Z.-P. Wang au studiat suprafetele de curbura medie constanta (suprafete CMC) biarmonice in spatii 3-dimensionale inzestrate cu geometrii Thurston. In particular, au studiat suprafetele CMC biarmonice in $S^2 \times R$. In general, suprafetele CMC in spatii produs de tip $M^2(c) \times R$, unde $M^2(c)$ este o suprafata simplu conexa de curbura sectionala constant c , sau mai general, suprafetele avand campul vectorial curbura medie paralel (suprafete PMC) in $M^n(c) \times R$ au fost intens studiate (de exemplu, de Uwe Abresch, Hilario Alencar, Manfredo do Carmo, Harold Rosenberg, Renato Tribuzy, Francisco Urbano etc.).

In lucrarea raportata, calculand laplaceanul operatorului forma in directia campului curbura medie, autorii au obtinut o formula de tip Simons pentru subvarietatile PMC in

$M^n \times R$. Apoi, folosind aceasta formula si un rezultat cunoscut al lui Yau, au demonstrat un rezultat de tip “gap” pentru curbura medie a unei subvarietati PMC biarmonice in $S^n \times R$, adica curbura medie este sau 1, sau ia valori intr-un interval $(0, a]$, unde a este o constanta strict mai mica decat 1. In a doua parte a lucrarii, folosind rezultate cunoscute de reducere, s-au clasificat toate suprafetele PMC biarmonice in $S^n \times R$.

Lucrarea a fost prezentata in cadrul seminarului de *Geometrie si Analiza* de la Departamentul de Matematica, Universitatea din Cagliari, Italia, de catre directorul de proiect.

2. On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces, autori Dorel Fetcu si Harold Rosenberg, publicata in *Revista Matematica Iberoamericana*, 29 (4), 1283—1306, 2013.

In acest articol, s-a studiat situatia generala a subvarietatilor (nu doar a suprafetelor, si fara ipoteza de biarmonicitate) avand campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal (subvarietati PMC) in spatii produs de tip $M^n(c) \times R$. Mai intai s-a gasit o formula de tip Simons pentru aceste subvarietati. Apoi autorii au folosit aceasta formula pentru a demonstra cateva rezultate privind reducerea codimensiunii pentru unele dintre aceste subvarietati. Mai exact, s-a calculat mai intai laplaceanul formei a doua fundamentale a unei subvarietati PMC si apoi, folosind formula obtinuta, s-au gasit conditii necesare ca o subvarietate PMC m -dimensionala intr-un spatiu produs sa fie de fapt o hipersuprafata de curbura medie constanta in $M^{m+1}(c)$. Aceste conditii necesare sunt exprimate in functie de norma formei a doua fundamentale si unghiul dintre campul vectorial curbura medie si campul vectorial unitar tangent la R . S-au demonstrat deasemenea unele teoreme de tip “gap” in cazul subvarietatilor minimale si, in general, avand campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal, in spatii produs.

Lucrarea a fost prezentata de Dorel Fetcu la seminarul *Sextas matematicas*, Departamentul de Matematica, Universitatea Federala din Rio de Janeiro, si in cadrul seminarului de *Geometrie Diferentiala* de la Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brazilia.

3. New results toward the classification of biharmonic submanifolds in S^n , autori Adina Balmus, Stefano Montaldo si Cezar Oniciuc, publicata in *Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta - seria Matematica*, 20 (2), 89-113, 2012.

Lucrarea cuprinde rezultate mai vechi ale autorilor dar si unele noi, cum ar fi clasificarea subvarietatilor paralele biarmonice in sfera unitate euclidiană sau unele rezultate de reducere a codimensiunii. In plus, lucrarea contine si demonstratiile a doua rezultate ale lui J.H. Chen referitoare la hipersuprafetele biarmonice in S^n . Demonstratiile originale sunt intr-un articol publicat in limba chineza. Demonstratiile au fost traduse de catre Juan Yang, iar autorii lucrarii mentionate le-au prezentat folosind insa un formalism global, invariant, si eliminand unii pasi care nu mai erau necesari in aceasta noua abordare.

Lucrarea a fost prezentata la *The 10th International Workshop on Differential Geometry and its Applications*, August 26 - 30, 2011, Constanta.

4. Biharmonic surfaces with parallel mean curvature in complex space forms, autori Dorel Fetcu si Ana Lucia Pinheiro, acceptata spre publicare in *Kyoto Journal of Mathematics* (2014).

Acest articol abordeaza tema biarmonicitatii suprafețelor imersate într-o formă spațială complexă având câmpul vectorial curbura medie paralel (suprafețe pmc). Mai întâi, cu ajutorul unei diferențiale olomorfe definită pe o astfel de suprafață, introdusă de primul autor într-un articol din anul 2012, găsim unele proprietăți legate de posibilitatea ca suprafață pmc biarmonică să fie pseudo-ombilicală sau/și plată. Apoi, folosind aceste rezultate, obținem clasificarea completă a suprafețelor pmc complete propriu-biarmonice având curbura gaussiană nenegativă. Astfel, arătăm că astfel de suprafețe există doar în spațiul proiectiv complex, sunt total reale și sunt de trei tipuri distincte: suprafețe pseudo-umbilicale, sau suprafețe lagrangiene într-o spațiul proiectiv complex de dimensiune complexă 2, sau produsul direct a două elice complete în spațiul proiectiv complex de dimensiune complexă 3. În primele două cazuri, suprafețele sunt descrise cu ajutorul lifturilor lor orizontale la sfere de dimensiune impară, via fibrarea Hopf, iar în al treilea, pentru cele două curbe sunt determinate curburile și torsiunile complexe și este arătat că rezultatele obținute asigură și existența acestora.

O4 & O5. In contul obiectivelor **O4** si **O5**, intitulate *Studiul aplicatiilor biarmonice in grupuri Lie* si, respectiv, *Studiul analitic al unor anumite ecuatii de tip biarmonic*, mentionam

1. articolul in lucru ***On biharmonic maps from torus into spheres***, autori Eric Loubeau, Cezar Oniciuc si Iulian Stoleriu.

In aceasta lucrarea se studiaza existenta si proprietatile calitative ale solutiilor periodice pentru unui sistem de doua ecuatii diferentiale neliniare de ordinul al doilea ce apare in studiul aplicatiilor biarmonice. Sistemul studiat este autonom, cu doua grade de libertate, reversibil in timp si admite o integrala prima. Deoarece valorile proprii ale sistemului linearizat sunt pur imaginare si non-semi-simple, metoda clasica Liapunov a varietatii centrale nu poate fi utilizata in acest caz. Folosind tehnica de reducere Liapunov-Schmidt, s-a dovedit ca, intr-o vecinatate mica a punctului de echilibru de interes, sistemul admite solutii periodice. Pentru valori initiale potrivite, aceste solutii pot fi approximate (metoda Lindstedt-Poincare) pana la ordinul dorit. Urmatorul pas este de a cerceta daca solutiile periodice observate sunt diferite de solutiile armonice. Acest lucru poate fi observat din studierea diagramei de bifurcatie, obtinute prin introducerea artificiala in sistemul initial a doi parametri reali. Solutiile periodice diferite de cele armonice vor corespunde unor aplicatii biarmonice de la R^2 la S^2 .

2. Nonholonomic dynamics of second order and the Heisenberg spinning particle, autori Mircea Crasmareanu si Iulian Stoleriu, publicat in *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9 (7), 1-9, 2012. In acest articol, autorii studiaza un sistem de ecuatii diferentiale ce modeleaza dinamica neolonomica de ordinul al doilea a particulei de tip Heisenberg.

06. Obiectivul al saselea al proiectului, denumit *Studiul imaginilor directe ale anumitor obiecte coomologice prin clase de morfisme pe varietati*, a fost atins prin elaborarea lucrarii

1. ***Generalized holomorphic analytic torsion***, autori J.I. Burgos Gil, G. Freixas, R. Litcanu, publicat in *Journal of the European Mathematical Society*, 16 (3), 463—535, 2014.

Pentru a enunta si demonstra o versiune aritmetica a Teoremei Grothendieck-Riemann-Roch a fost necesara generalizarea notiunii de torsiune analitica definita de Ray si Singer, astfel fiind definite clasele de torsiune analitica superioare. Gillet si Soule au observat ca, odata ce o teorie coerenta a claselor de torsiune analitica superioare este definita, Teorema Grothendieck-Riemann-Roch aritmetica este o consecinta naturala.

Teorema Grothendieck-Riemann-Roch furnizeaza o formula care stabileste legatura dintre imaginile directe si clasele caracteristice ale fibratelor vectoriale pe varietati complexe sau, mai general, pe varietati algebrice. Daca fibratele vectoriale sunt inzestrate cu metrice hermitiene, teoria Chern-Weil asociaza claselor caracteristice un sistem de reprezentanti dat de forme diferentiale.

In general formula data de Teorema Grothendieck-Riemann-Roch nu mai ramane valabila la nivelul acestor forme caracteristice. Aceasta problema a fost rezolvata prin introducerea claselor singulare Bott-Chern, in cazul imersiilor inchise, si a claselor de torsiune analitica superioare, in cazul morfismelor netede.

In acest articol extindem clasele de torsiune analitica olomorfa definite de J.-M. Bismut si K. Köhler la cazul morfismelor proiective arbitrare intre varietati complexe netede. In acest scop, propunem o definitie axiomatice si clasificam posibilele teorii de torsiune analitica generalizata, care corespund acestei definitii. Astfel, demonstram ca orice asemenea teorie corespunde in mod biunivoc unei clase caracteristice aditive asociate fibratelor vectoriale.

Extinderea torsiunii analitice definite de Bismut si Köhler este obtinuta in cadrul teoriei generalizate corespunzatoare clasei caracteristice $-R/2$, R fiind R -genul clasic care apare in definitia calculatorie a torsiunii analitice.

Ca aplicatii ale caracterizarii axiomatice, obtinem demonstratii mai simple ale unor proprietati ale claselor de torsiune analitica, dam o caracterizare a R -genului si construim imaginile directe pentru structuri hermitice generalizate prin morfisme proiective.

Abordarea axiomatice si aplicatiile obtinute sunt ingrediente esentiale pentru demonstrarea unei teoreme de tip Grothendieck-Riemann-Roch aritmetice, pentru morfisme proiective oarecare. Acest rezultat va fi publicat intr-un articol ulterior. In particular, este de asteptat sa obtinem rezultate relevante privind imaginile directe ale diverselor structuri inzestrate cu metrice hermitice prin imersii inchise cu proprietati particulare.

07. In vederea realizarii obiectivului *Editarea unei monografii asupra aplicatiilor biarmonice pe subvarietati*, mentionam elaborarea si sustinerea tezei de abilitare intitulata ***Subvarietati biarmonice in forme spatiale***, autor Cezar Oniciuc. Aceasta teza a fost prezentata la Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Romane din

Bucuresti pe 25 Iulie 2012. Lucrarea contine toate rezultatele cunoscute obtinute de autor si colaboratorii sai in domeniul subvarietatilor biarmonice. Lucrarea va fi trimisa spre publicare, sub forma unei monografii.

Lista de lucrari publicate/acceptate

1. D. Fetcu si C. Oniciuc, ***Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms***, *Tohoku Mathematical Journal*, 64 (2), 195–222, 2012.
2. A. Balmus, S. Montaldo si C. Oniciuc, ***Biharmonic PNMC submanifolds in spheres***, *Arkiv für Matematik*, 51 (2), 197–221, 2013.
3. R. Cadeo, S. Montaldo, C. Oniciuc si P. Piu, ***Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienenergy tensor***, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (4), 193 (2), 529–550, 2014.
4. E. Loubeau si C. Oniciuc, ***Biharmonic surfaces of constant mean curvature***, *Pacific J. Math.*, 271 (1), 213–230, 2014.
5. S. Montaldo, C. Oniciuc si A. Ratto, ***Biconservative surfaces***, va aparea in *Journal of Geometric Analysis*.
6. D. Fetcu, C. Oniciuc si H. Rosenberg, ***Biharmonic Submanifolds with Parallel Mean Curvature in $S^n \times \mathbb{R}$*** , *Journal of Geometric Analysis*, 23 (4), 2158–2176, 2013.
7. D. Fetcu si H. Rosenberg, ***On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces***, *Revista Matematica Iberoamericana*, 29 (4), 1283–1306, 2013.
8. A. Balmus, S. Montaldo si C. Oniciuc, ***New results toward the classification of biharmonic submanifolds in S^n*** , *Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta - seria Matematica*, 20 (2), 89-113, 2012.
9. D. Fetcu si A. L. Pinheiro, ***Biharmonic surfaces with parallel mean curvature in complex space forms***, va aparea in *Kyoto Journal of Mathematics*.
10. M. Crasmareanu si I. Stoleriu, ***Nonholonomic dynamics of second order and the Heisenberg spinning particle***, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9 (7), 1-9, 2012.
11. J. I. Burgos Gil, G. Freixas si R. Litcanu, ***Generalized holomorphic analytic torsion***, *Journal of the European Mathematical Society*, 16 (3), 463–535, 2014.

Lista de lucrari trimise spre publicare

1. S. Montaldo, C. Oniciuc si A. Ratto, ***Proper biconservative immersions into the euclidian space***
2. E. Loubeau si C. Oniciuc, ***CMC proper-biharmonic surfaces of constant gaussian curvature in spheres***

II. Descrierea mobilitatilor cu finantare din proiect

- In Mai 2012 Profesorul Eric Loubeau, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea Al. I. Cuza

din Iasi. Cu aceasta ocazie, a tinut un ciclu de conferinte in cadrul Workshop-ului "Riemannian Geometry and Harmonic Maps".

- In perioada 2 Decembrie 2012 - 8 Decembrie 2012, Profesorul Stefano Montaldo, Università degli Studi di Cagliari, Italia, a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iasi. Cu aceasta ocazie, a prezentat conferinta "An introduction to Wilmore surfaces".
- In 4 Noiembrie - 15 Noiembrie 2012, Cezar Oniciuc a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, unde a continuat colaborarea stiintifica cu Profesorul Eric Loubeau, pe teme legate de studiul aplicatiilor biarmonice de la R^2 la S^2 .
- In Ianuarie - Februarie 2012, Cezar Oniciuc a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Università degli Studi di Cagliari, Italia, unde a studiat hipersuprafetele biconservative, adica hipersuprafetele cu tensor stres-energie, in raport cu bienergia, conservativ. A obtinut o clasificare locala a suprafetelor biconservative in forme spatiale tridimensionale. Cu aceasta ocazie, a sustinut cursuri de *Geometrie Riemanniana* in cadrul scolii doctorale ale Departamentului de Matematica si a sustinut conferinta "Bi-harmonic submanifolds".
- In perioada 8 - 13 Iunie 2012, Dorel Fetcu a participat la conferinta "*XIVth International Conference in Geometry, Integrability and Quantization*", Varna (Bulgaria), sustinand lucrarea cu titlul "*Simons type formulas for submanifolds with parallel mean curvature in product spaces and applications*", bazata pe rezultatele obtinute in trei lucrari scrise in colaborare cu Harold Rosenberg (IMPA, Rio de Janeiro, Brazil) si Cezar Oniciuc.
O prezentare cu acelasi titlu a fost sustinuta de Dorel Fetcu, ca lector invitat, la Seminarul Departamentului de Matematica din cadrul Institutului de Matematica al Universitatii Federale din Bahia, Salvador, Brazilia, pe 13 Noiembrie 2012.
- In perioada 17 - 23 Septembrie 2012, Razvan Litcanu a facut o vizita de cercetare la Kyoto University, Japonia, la invitatia Prof. A. Moriwaki si S. Kawaguchi. In cadrul acestei vizite a participat la conferinta Paris-Barcelona-Kyoto seminar on Arakelov Geometry (Kyoto, 18-21 septembrie), in cadrul careia au fost prezentate rezultatele din articolul ***Generalized holomorphic analytic torsion***.
- Unele rezultate preliminare obtinute legate de obiectivul al cincilea al proiectului au fost comunicate de catre Iulian Stoleriu la sesiunile stiintifice a doua conferinte internationale ("*Conference on Applied and Industrial Mathematics*" - CAIM August 2012, in Chisinau, Moldova si "*International Conference on Controlled Deterministic and Stochastic Systems*", Iulie 2012 in Iasi), cat si in cadrul a doua seminarii stiintifice (la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iasi si la Universitatea Strathclyde din Glasgow, Marea Britanie).

- In Mai 2013, Profesorul Eric Loubeau, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea Al. I. Cuza din Iasi.
- In perioada 11 - 18 Septembrie 2013, profesorii Shun Maeta (Shumei University, Japonia) si Hajime Urakawa (Tohoku University, Japonia) au efectuat vizite de cercetare ca profesori invitati la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iasi. Cu acest prilej, au sustinut seminariile stiintifice: "*Biharmonic submanifolds and Chen's conjecture*" (S. Maeta) si "*Geometry of harmonic maps, biharmonic maps and integrable systems*" (H. Urakawa).
- In perioada 19 - 22 Septembrie 2013, Cezar Oniciuc a participat la conferinta *The 11th international workshop on differential geometry and its applications*, ce a avut loc la Ploiesti, unde a prezentat lucrarea *Recent advances in the theory of biharmonic submanifolds*.
- In perioada 23 Septembrie - 9 Octombrie 2013, Cezar Oniciuc a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Università degli Studi di Cagliari, Italia.
- In Noiembrie 2013, Profesorul Stefano Montaldo, Università degli Studi di Cagliari, Italia, a efectuat o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iasi.
- In perioada 20 Martie - 3 Aprilie 2014, Cezar Oniciuc a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea Federala din Bahia, Salvador, Brazilia. Aici a tinut seminarul *Biharmonic surfaces in spheres*.
- In perioada 3 - 9 Mai 2014, Cezar Oniciuc a participat la un stadiu de cercetare la Università degli Studi di Cagliari.
- In perioada 7 - 11 Iulie 2014, Iulian Stoleriu a participat la conferinta *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, organizata de The Universidad Autónoma de Madrid, unde a prezentat lucrarea *Periodic solutions for a pair of coupled oscillators at resonance*.
- In perioada 3 - 5 Septembrie 2014, Cezar Oniciuc a participat la conferinta *International Workshop on Finite Type Submanifolds*, organizata de Istanbul Technical University, unde a prezentat lucrarea *Biharmonic and biconservative immersions*.
- In perioada 8 - 12 Septembrie 2014, Cezar Oniciuc a participat la conferinta *Real and Complex Differential Geometry*, organizata de Universitatea din Bucuresti, unde a prezentat lucrarea *Surfaces in spheres: biharmonic and CMC*.

- În perioada 8 - 12 Septembrie 2014, Simona Nistor a participat la conferința *Real and Complex Differential Geometry*, organizată de Universitatea din București.
- În perioada 16 - 26 Septembrie 2014, Cezar Oniciuc a participat la un stadiu de cercetare la Università degli Studi di Cagliari.

III. Alte activități din cadrul proiectului:

- Prezentarea tezei de abilitare intitulată *Subvarietati biarmonice în forme spațiale*, autor Cezar Oniciuc. Aceasta teza a fost prezentată la Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Române din București pe 25 Iulie 2012.
- Minicurs de subvarietati biarmonice

În perioada 21-23 ianuarie 2013, Dorel Fetcu a prezentat minicursul (de 6 ore) intitulat [Subvariedades biharmonicas em variedades Riemannianas](#) (în limba portugheză), în cadrul programului de vară al școlilor de master și doctorală ale Institutului de Matematică al Universității Federale din Bahia în Salvador (Brazilia). Au fost prezentate noțiuni introductive din teoria aplicațiilor biarmonice, rezultate generale precum ecuația Euler-Lagrange asociată integralei bienergiei, a doua formulă variațională a bienergiei, etc., precum și rezultate legate de existența subvarietăților propriu-biarmonice în forme spațiale reale, obținute în special de A. Balmuş, S. Montaldo și C. Oniciuc, iar în final rezultate de clasificare și exemple explicite de astfel de subvarietăți în forme spațiale complexe și sasakiene, obținute în urma colaborării dintre D. Fetcu, E. Loubeau, S. Montaldo și C. Oniciuc.

IV. Membri noi în echipa proiectului:

- În perioada iunie 2012 - septembrie 2013, drd. **Andrei Cuzub** a fost angajat în cadrul proiectului. Activitățile sale de cercetare s-au axat pe următoarele teme:

1. Forme și curenți Green pe varietăți complexe proiective. Forme cu singularități de tip logaritmice pe varietăți complexe proiective. Rezultate de existență și proprietăți;
2. Teoria intersecției pe o varietate algebrică și, mai general, pe o schemă Noetheriană și regulată;
3. Probleme de moduli. Stack-uri algebrice;
4. Teoria intersecției Arakelov pe varietăți aritmetice;
5. Teorema lui Belyi de caracterizare a curbilor algebrice definite peste un corp de numere.

Obiectivul principal a fost obținerea unor invarianți asociați curbilor algebrice peste corpuri de numere, utilizând morfisme Belyi și teoria intersecției Arakelov. Mai precis, dată o curbă peste un corp de numere, un morfism Belyi și un model al curbei peste inelul corespunzător de întregi, studiem unele intersecții Arakelov ce pot fi astfel

construite, căutând invarianți cu proprietăți asemănătoare cu înălțimile clasice pe varietăți algebrice.

Un al doilea obiectiv al doctorandului – mai îndepărtat – a fost construcția unor invarianți pe curbe algebrice, utilizând morfisme Belyi și teoria intersecției pe stack-uri algebrice.

Studiul acestor subiecte s-a concretizat în elaborarea unui proiect de cercetare prezentat în cadrul școlii doctorale și care urmează a fi dezvoltat într-o viitoare teză de doctorat.

De asemenea, în perioada iunie 2012 – noiembrie 2012, doctorandul Andrei Cuzub a participat la Sesiunea de Comunicări Științifice a Facultății de Matematică din cadrul Zilelor Universității “Al. I. Cuza” din Iași și la Seminarul Informal de Noutăți Geometrice, al Catedrei de Geometrie de la Facultatea de Matematica, Universitatea “Al. I. Cuza” din Iași.

- Începând din 1 octombrie 2013, a fost angajată în cadrul proiectului studenta **Simona Elena Nistor**, în locul domnului Andrei Cuzub. În acea perioadă, dra. Nistor era masteranda în anul al II-lea al secției de *Cercetare în Matematica* din cadrul Facultății de Matematica și desfășoară activități de informare și de cercetare în domeniul varietăților riemanniene, domeniul în care și-a pregătit teza de disertație pe care a susținut-o în Iulie 2014.

În perioada 20 Septembrie 2013 - 28 Februarie 2014, ea a efectuat un stagiu de cercetare în cadrul Departamentului de Matematica de la Università degli Studi di Cagliari, Italia.

În Octombrie 2014, dra. Nistor a fost admisă la Doctorat, sub conducerea Prof. Dr. Cezar Oniciuc, din cadrul Facultății de Matematica, Universitatea “Al. I. Cuza” din Iași.

Director proiect,
Prof. Dr. Cezar Oniciuc

