

Contract PN-II-RU-TE-2011-3-0108,

Nr. 51/05.10.2011

*Aplicatii biarmonice si subvarietati in diferite contexte geometrice*

Director proiect: Conf. Dr. Cezar Oniciuc

## Raport stiintific

Incepand cu luna octombrie, membrii echipei au inceput activitatea de cercetare in vederea atingerii obiectivelor propuse in proiect.

Primul obiectiv propus a fost *Studiul subvarietatilor biarmonice in forme spatiale sasakiene 7-dimensionale si in spatiul proiectiv complex  $CP^3$* . La acest obiectiv au lucrat directorul de proiect si Dorel Fetcu. Obiectivul a fost realizat, rezultatele cercetarii fiind inglobate in lucrarea *Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms*. Lucrarea a fost acceptata recent in *Tohoku Mathematical Journal*. In aceasta lucrare s-a continuat studiul subvarietatilor integrale in forme spatiale sasakiene. Acest studiu a fost inceput de T. Sasahara care a determinat toate suprafetele integrale biarmonice in sfera unitate 5-dimensională inzestrata cu structura uzuala de forma spatiala sasakiana. Mai intai, autorii au gasit ecuatiile (una pentru partea tangenta si una pentru partea normala) ce caracterizeaza subvarietatile integrale biarmonice si subvarietatile integrale C-paralele biarmonice de dimensiune maxima intr-o forma spatiala sasakiana de dimensiune oarecare. Apoi, folosind aceste ecuatii, s-au clasificat toate subvarietatile integrale C-paralele biarmonice 3-dimensionale intr-o forma spatiala sasakiana de dimensiune 7. In continuare, considerand sfera unitate  $S^7$  inzestrata cu structura uzuala de forma spatiala sasakiana de curbura olomorfa 1 si apoi cu structura modificata, definita de Tanno, de forma spatiala sasakiana, s-au gasit ecuatiile parametrice ale subvarietatilor C-paralele biarmonice. In ultima sectiune a lucrarii, folosind fibrarea Hopf de la  $S^7$  la spatial proiectiv complex  $CP^3$ , autorii au determinat toate subvarietatile lagrangiene paralele biarmonice in  $CP^3$ .

O lucrare in curs de finalizare este *Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector in  $S^n \times R$* , autori: directorul de proiect, Dorel Fetcu si Harold Rosenberg. Intr-o lucrare recenta, Y.-L. Ou si Z.-P. Wang au studiat suprafetele de curbura medie constanta (suprafete CMC) biarmonice in spatii 3-dimensionale inzestrate cu geometrii Thurston. In particular au studiat suprafetele CMC biarmonice in  $S^2 \times R$ . In general, suprafetele CMC in spatii produs de tip  $M^2(c) \times R$ , unde  $M^2(c)$  este o suprafata simplu conexa de curbura sectionala constant  $c$ , sau mai general, suprafetele avand vectorul curbura medie paralel (suprafete PMC) in  $M^n(c) \times R$  au fost intens studiate (de exemplu, de Uwe Abresch, Hilario Alencar, Manfredo do Carmo, Harold Rosenberg, Renato Tribuzy, Francisco Urbano, etc.). In lucrarea mentionata, calculand laplaceanul operatorului forma in directia campului curbura medie, autorii au obtinut o formula de tip Simons pentru subvarietatile PMC in  $M^n \times R$ . Apoi, folosind aceasta

formula si un rezultat cunoscut al lui Yau, au demonstrat un rezultat de tip “gap” pentru curbura medie a unei subvarietati PMC biarmonice in  $S^n \times \mathbb{R}$ , adica curbura medie este sau 1, sau ia valori intr-un interval  $(0, a]$ , unde  $a$  este o constanta strict mai mica decat 1. In a doua parte a lucrarii, folosind rezultate cunoscute de reducere, s-au clasificat toate suprafetele PMC biarmonice in  $S^n \times \mathbb{R}$ .

Lucrarea a fost prezentata in cadrul seminarului de *Geometrie si Analiza* de la Departamentul de Matematica, Universitatea din Cagliari, Italia, de catre directorul de proiect.

O alta lucrare in curs de finalizare este *On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces*, autori Dorel Fetcu si Harold Rosenberg. In acest articol s-au studiat situatia generala a subvarietatilor (nu doar a suprafetelor, si fara ipoteza de biarmonicitate) avand campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal (subvarietati PMC) in spatii produs de tip  $M^n(c) \times \mathbb{R}$ . Mai intai s-a gasit o formula de tip Simons pentru aceste subvarietati. Apoi autorii au folosit aceasta formula pentru a demonstra cateva rezultate privind reducerea codimensiunii pentru unele dintre aceste subvarietati. Mai exact, s-a calculat mai intai laplaceanul formei a doua fundamentale a unei subvarietati PMC si apoi, folosind formula obtinuta, s-au gasit conditii necesare ca o subvarietate PMC  $m$ -dimensionala intr-un spatiu produs sa fie de fapt o hipersuprafata de curbura medie constanta in  $M^{m+1}(c)$ . Aceste conditii necesare implica norma formei a doua fundamentale si unghiul dintre campul vectorial curbura medie si campul vectorial unitar tangent la  $\mathbb{R}$ . S-au demonstrat deasemenea unele teoreme de tip “gap” in cazul subvarietatilor minimale si, in general, avand campul vectorial curbura medie paralel in fibratul normal, in spatii produs.

Lucrarea a fost prezentata de Dorel Fetcu la seminarul *Sextas matematicas*, Departamentul de Matematica, Universitatea Federala din Rio de Janeiro, si in cadrul seminarului de *Geometrie Diferentiala* de la Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brazilia.

Lucrarea *New results toward the classification of biharmonic submanifolds in  $S^n$* , autori Adina Balmus, Stefano Montaldo si Cezar Oniciuc, a fost prezentata la *The 10<sup>th</sup> International Workshop on Differential Geometry and its Applications, August 26-30, 2011, Constanta*. Lucrarea cuprinde rezultate mai vechi ale autorilor dar si unele noi, cum ar fi clasificarea subvarietatilor paralele biarmonice in sfera unitate euclidiană sau unele rezultate de reducere a codimensiunii. In plus, lucrarea contine si demonstratiile a doua rezultate ale lui J.H. Chen referitoare la hipersuprafetele biarmonice in  $S^n$ . Demonstratiile originale sunt intr-un articol publicat in limba chineza. Demonstratiile au fost traduse de catre Juan Yang, iar autorii lucrarii mentionate le-au prezentat folosind insa un formalism global, invariant, si eliminand unii pasi care nu mai erau necesari in aceasta noua abordare.

Intr-un articol in lucru, autori Eric Loubeau, Cezar Oniciuc si Iulian Stoleriu, am studiat existenta si proprietatile solutiilor periodice ale unui sistem de ecuatii diferentiale neliniare de ordinul al doilea ce apare in studiul aplicatiilor biarmonice.

Metoda de investigatie utilizata are la baza teoria varietatii centrale (locale). Sistemul diferential original (care este echivalent cu un sistem de patru ecuatii diferentiale de ordinul intai) s-a redus la un sistem de doua ecuatii diferentiale de ordinul intai. Conform teoriei, cel putin in vecinatatea unui punct de echilibru, dinamica sistemului initial va fi topologic echivalenta cu dinamica sistemului de ecuatii redus, care este mult mai usor de analizat si pentru care exista deja o literatura de specialitate la dispozitie. Folosind schimbări de variabile potrivite, sistemul original a fost transformat mai intai într-o forma standard de aplicare a teoriei varietatii centrale (locale). S-a obtinut o aproximare pentru varietatea centrala locala si aproximari pentru dinamica fluxului pe aceasta varietate. Cum traiectoriile solutiilor pentru sistemul redus (inclusiv orbitele periodice) sunt transportate homeomorfic in traiectorii (orbite periodice) pentru sistemul initial, deducem faptul ca, cel putin in vecinatatea punctului de echilibru considerat, sistemul initial de ecuatii admite solutii periodice. Mai mult, folosind metoda Lindstedt, putem aproxima perioada oscilatiilor generate de sistemul dinamic redus.

In aceasta etapa a proiectului nu s-au efectuat mobilitati suportate din proiect si nici nu s-au efectuat cheltuieli de logistica. Devizul Cadru Antecalcul a fost respectat.

#### **Lucrari acceptate spre publicare:**

1) D. Fetcu, C. Oniciuc. *Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms*. Acceptata in Tohoku Mathematical Journal.

#### **Lucrari in curs de finalizare:**

1) D. Fetcu, C. Oniciuc, H. Rosenberg. *Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector in  $S^n \times R$* .

2) D. Fetcu, H. Rosenberg. *On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces*.

3) A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc. *New results toward the classification of biharmonic submanifolds in  $S^n$* .

#### **Lucrari in lucru:**

1) E. Loubeau, C. Oniciuc, I. Stoleriu. *On biharmonic maps from torus into spheres*.