

Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada ianuarie –decembrie 2012

(max 5 pagini, format .pdf)

Contract PN-II-RU-TE-2011-3-0108,

Nr. 51/05.10.2011

Aplicatii biarmonice si subvarietati in diferite contexte geometrice

Director proiect: Conf. Dr. Cezar Oniciuc

Articolul "Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms" (Dorel Fetcu si Cezar Oniciuc) a aparut in revista cotata ISI (Q2) Tohoku Mathematical Journal 64(2) (2012), 195-222. Acesta contine rezultate privitoare la caracterizarea subvarietatilor integrale C-paralele biarmonice proprii in forme spatiale sasakiene. Sunt clasificate aceste subvarietati in forme spatiale sasakiene 7-dimensionale. Lucrand in sfera S^7 se determina explicit toate subvarietatile integrale C-paralele biarmonice proprii de dimensiune 3. De asemenea, sunt determinate toate subvarietatile biarmonice proprii lagrangiene paralele ale spatiului CP^3 .

Articolul "On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces" (autori Dorel Fetcu si Harold Rosenberg) a fost acceptat pentru publicare in revista cotata ISI (Q1) Revista Matematica Iberoamericana. Aici se demonstreaza o formula de tip Simons pentru subvarietati de curbura medie paralela in spatii produs de tipul $M^n(c) \times R$, unde $M^n(c)$ este o forma spatiala de curbura sectionala constanta c . Aceasta formula este apoi utilizata pentru caracterizarea unor astfel de subvarietati.

Articolul "Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in $S^n \times R$ " (Dorel Fetcu, Cezar Oniciuc si Harold Rosenberg) a fost acceptat pentru publicare in revista cotata ISI (Q1) Journal of Geometric Analysis. In acest articol se determina o formula de tip Simons pentru subvarietati de curbura medie paralela in spatii produs de tipul $M^n(c) \times R$, unde $M^n(c)$ este o forma spatiala de curbura sectionala constanta c . Apoi acesta formula este utilizata pentru a demonstra o teorema de tip gap pentru curbura medie a unor subvarietati complete biarmonice proprii de curbura medie paralela si pentru a clasifica suprafetele biarmonice proprii de curbura medie paralela in $S^n(c) \times R$.

Unul dintre obiectivele propuse a fost studiul subvarietatilor biarmonice in sfera euclidian unitate cu campul vectorial curbura medie normalizat paralel (PNMC). Rezultatele obtinute au facut obiectul unui articol, A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc. *Biharmonic PNMC submanifolds in spheres*, DOI: 10.1007/s11512-012-0169-5, care a fost acceptat spre publicare in revista *Arkiv fur Matematik*.

In acest articol s-au obtinut unele rezultate de rigiditate pentru subvarietati biarmonice PNMC in S^n . Subvarietatile PNMC constituie o generalizare a subvarietatilor de curbura medie paralela (PMC), iar un rezultat de rigiditate precizeaza conditii suficiente in care o subvarietate PNMC este PMC.

S-a obtinut caracterizarea biarmonicitatii subvarietatilor PNMC in S^n in termenii functiei curbura medie si a operatorului Weingarten asociat campului vectorial curbura medie normalizat.

Pentru cazul compact s-au obtinut rezultate de rigiditate impunand unele restrictii asupra normei operatorului Weingarten asociat campului vectorial curbura medie normalizat sau asupra functiei curbura medie.

In cazul necompact, in ipoteza de completitudine, impunand restrictii asupra curburii Ricci si folosind principiul Omori-Yau, s-au obtinut rezultate similare.

S-au clasificat apoi subvarietatile PNMC biarmonice cu cel mult doua curburi principale in directia campului vectorial curbura medie in sfere. In particular, au fost complet determinate suprafetele PNMC biarmonice in S^n .

A fost apoi investigat tipul, in sensul lui B.-Y. Chen, pentru subvarietati biarmonice proprii, nu neaparat compacte, in S^n . S-a demonstrat ca:

- (i) o subvarietate biarmonica proprie in S^n este de tip 1 sau 2 daca si numai daca are curbura medie constanta $f = 1$ sau $f \in (0, 1)$, respectiv.
- (ii) nu exista subvarietati PNMC biarmonice proprii de tip 3 in S^n .

Un alt obiectiv propus a constat in studiul subvarietatilor lambda-biarmonice in sfera euclidiană de raza r . Rezultatele obtinute fac obiectul unui articol, A. Balmus, *Remarks on lambda-biharmonic submanifolds in spheres*, in curs de finalizare.

S-au generalizat unele exemple si unele rezultate de clasificare privitoare la subvarietati biarmonice proprii in S^n la cazul subvarietatilor lambda-biarmonice.

Unul dintre cele mai importante rezultate obtinute este un rezultat de descompunere pentru subvarietatile lambda-biarmonice de curbura medie paralela si de operator Weingarten asociat campului vectorial curbura medie paralel. Acest rezultat a fost utilizat apoi pentru obtinerea unui rezultat de descompunere pentru subvarietatile biarmonice proprii de tip produs in produse standard de sfere din S^n .

Unul dintre obiectivele propuse a fost atins prin elaborarea lucrarii J.I. Burgos Gil, G. Freixas, R. Litcanu, *Generalized holomorphic analytic torsion*, J. Eur. Math. Soc., acceptat spre publicare.

Pentru a enunta si demonstra o versiune aritmetica a Teoremei Grothendieck-Riemann-Roch a fost necesara generalizarea notiunii de torsiune analitica definita de Ray si Singer, astfel fiind definite clasele de torsiune analitica superioare. Gillet si Soule au observat ca, odata ce o teorie coerenta a claselor de torsiune analitica superioare este definita, Teorema Grothendieck-Riemann-Roch aritmetica este o consecinta naturala.

Teorema Grothendieck-Riemann-Roch furnizeaza o formula care stabileste legatura dintre imaginile directe si clasele caracteristice ale fibratelor vectoriale pe varietati complexe sau, mai general, pe varietati algebrice. Daca fibratele vectoriale sunt inzestrate cu metrici hermitiene, teoria Chern-Weil asociaza claselor caracteristice un sistem de reprezentanti dat de forme diferentiale.

In general formula data de Teorema Grothendieck-Riemann-Roch nu mai ramane valabila la nivelul acestor forme caracteristice. Aceasta problema a fost rezolvata prin introducerea claselor singulare Bott-Chern, in cazul imersiilor inchise, si a claselor de torsiune analitica superioare, in cazul morfismelor netede.

In acest articol extindem clasele de torsiune analitica olomorfa definite de J.-M. Bismut si K. Köhler la cazul morfismelor proiective arbitrare intre varietati complexe netede. In acest scop, propunem o definitie axiomatice si clasificam posibilele teorii de torsiune analitica generalizata, care corespund acestei definitii. Astfel, demonstram ca orice asemenea teorie corespunde in mod biunivoc unei clase caracteristice aditive asociate fibratelor vectoriale.

Extinderea torsiunii analitice definite de Bismut si Köhler este obtinuta in cadrul teoriei generalizate corespunzatoare clasei caracteristice $-R/2$, R fiind R -genul clasic care apare in definitia calculatorie a torsiunii analitice.

Ca aplicatii ale caracterizarii axiomatice, obtinem demonstratii mai simple ale unor proprietati ale claselor de torsiune analitice, dam o caracterizare a R -genului si construim imagini directe pentru structuri hermitice generalizate prin morfisme proiective.

Abordarea axiomatice si aplicatiile obtinute sunt ingrediente esentiale pentru demonstrarea unei teoreme de tip Grothendieck-Riemann-Roch aritmetice, pentru morfisme proiective oarecare. Acest rezultat va fi publicat intr-un articol ulterior. In particular, este de asteptat sa obtinem rezultate relevante privind imaginile directe ale diverselor structuri inzestrate cu metrici hermitice prin imersii inchise cu proprietati particulare.

Articolul, realizat in colaborare cu J. I. Burgos Gil (ICMAT Madrid) si G. Freixas i Montplet (Universite Paris VI) se inscrie intr-un grup de articole dedicat subiectului care mai include, deocamdata:

- J.I. Burgos Gil, R. Litcanu, Singular Bott-Chern classes and the arithmetic Grothendieck-Riemann-Roch theorem for closed immersions. Doc. Math. 15, 73-176, 2010.
- J.I. Burgos Gil, G. Freixas, R. Litcanu, Hermitian structures on the derived category of coherent sheaves, J. Math. Pures Appl. 97, iss. 5, 424-459, 2012.

In articolul in lucru *Eric Loubeau, Cezar Oniciuc, Iulian Stoleriu, On biharmonic maps from torus into spheres* se studiaza existenta si proprietatile calitative ale solutiilor periodice pentru unui sistem de doua ecuatii diferentiale neliniare de ordinul al doilea ce apare in studiul aplicatiilor biarmonice. Sistemul studiat este autonom, cu doua grade de libertate, reversibil in timp si admite o integrala prima. Deoarece valorile proprii ale sistemului linearizat sunt pur imaginare si non-semi-simple, metoda clasica Liapunov a varietatii centrale nu poate fi utilizata in acest caz. Folosind tehnica de reducere Liapunov-Schmidt, s-a dovedit ca, intr-o vecinatate mica a punctului de echilibru de interes, sistemul admite solutii periodice. Pentru valori initiale potrivite, aceste solutii pot fi aproximate (metoda Lindstedt-Poincare) pana la ordinul dorit. Urmatorul pas este de a cerceta daca solutiile periodice observate sunt diferite de solutiile armonice. Acest lucru poate fi observat din studierea diagramei de bifurcatie, obtinute prin introducerea artificiala in sistemul initial a doi parametri reali. Solutiile periodice diferite de cele armonice vor corespunde unor aplicatii biarmonice de la R^2 la S^2 .

În perioada iunie 2012 – noiembrie 2012, activitățile de cercetare, studiu și aprofundare ale doctorandul Andrei Cuzub s-au axat pe următoarele teme:

1. Forme și curenți Green pe varietăți complexe proiective. Forme cu singularități de tip logaritmice pe varietăți complexe proiective. Rezultate de existență și proprietăți;
2. Teoria intersecției pe o varietate algebrică și, mai general, pe o schemă Noetheriană și regulată;
3. Probleme de moduli. Stack-uri algebrice;
4. Teoria intersecției Arakelov pe varietăți aritmetice;
5. Teorema lui Belyi de caracterizare a curbilor algebrice definite peste un corp de numere.

Obiectivul principal a fost obținerea unor invarianti asociați curbilor algebrice peste corpuri de numere, utilizând morfisme Belyi și teoria intersecției Arakelov. Mai precis, dată o curbă peste un corp de numere, un morfism Belyi și un model al curbei peste inelul corespunzător de întregi, studiem unele intersecții Arakelov ce pot fi astfel construite, căutând invarianti cu proprietăți asemănătoare cu înălțimile clasice pe varietăți algebrice.

Un al doilea obiectiv al doctorandului – mai îndepărtat – a fost construcția unor invarianti pe curbe algebrice, utilizând morfisme Belyi și teoria intersecției pe stack-uri algebrice.

Studiul acestor subiecte s-a concretizat in elaborarea unui proiect de cercetare prezentat în cadrul școlii doctorale și care urmează a fi dezvoltat într-o viitoare teză de doctorat.

De asemenea, in perioada iunie 2012 – noiembrie 2012, doctorandul Andrei Cuzub a participat la Sesiunea de Comunicări Științifice a Facultății de Matematică din cadrul Zilelor Universității “Al. I. Cuza” din Iași si la Seminarul Informal de Noutăți Geometrice, al Catedrei de Geometrie de la Facultatea de Matematica, Universitatea “Al. I Cuza” din Iasi.

Descrierea mobilitatilor suportate din proiect

In mai 2012 Profesorul Eric Loubeau, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, a facut o vizita de cercetare ca profesor invitat la Universitatea Al. I. Cuza din Iasi. Cu aceasta ocazie a tinut un ciclu de conferinte in cadrul Workshop-ul "Riemannian Geometry and Harmonic Maps".

În perioada 02 decembrie 2012 – 08 decembrie 2012, Profesorul Stefano Montaldo, Universita degli Studi di Cagliari, Italia, a făcut o vizită de cercetare ca profesor invitat la Universitatea Al. I. Cuza din Iași.

În 04 noiembrie -15 noiembrie, Cezar Oniciuc a făcut o vizită de cercetare ca profesor invitat la Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, unde a continuat colaborarea științifică cu Profesorul Eric Loubeau, pe teme legate de studiul aplicațiilor biarmonice de la R^2 la S^2 .

În ianuarie-februarie 2012, Cezar Oniciuc a făcut o vizită de cercetare ca profesor invitat la Universitatea din Cagliari, Italia, unde a studiat hipersuprafețele biconservative, adică hipersuprafețele cu tensor stres-energie în raport cu bienergia conservativă. A obținut o clasificare locală a suprafețelor biconservative în forme spațiale tridimensionale.

În perioada 8-13 iunie 2012, Dorel Fetcu a participat la "XIVth International Conference in Geometry, Integrability and Quantization" la Varna (Bulgaria), cu prezentarea cu titlul "Simons type formulas for submanifolds with parallel mean curvature in product spaces and applications", bazată pe rezultatele obținute în trei lucrări scrise în colaborare cu Harold Rosenberg (IMPA, Rio de Janeiro, Brazil) și Cezar Oniciuc.

O prezentare cu același titlu a fost susținută de Dorel Fetcu, ca lector invitat, la Seminarul Departamentului de Matematică din cadrul Institutului de Matematică al Universității Federale din Bahia, Salvador, Brazilia, în data de 13 noiembrie 2012.

În perioada 17-23 septembrie, Razvan Litcanu a făcut o vizită de cercetare la Kyoto University, Japonia, la invitația Prof. A. Moriwaki și S. Kawaguchi. În cadrul acestei vizite a participat la conferința Paris-Barcelona-Kyoto seminar on Arakelov geometry (Kyoto, 18-21 septembrie), în cadrul căreia au fost prezentate rezultatele din articolul de mai sus. Alte vizite de cercetare și participări la conferințe, fără suport financiar din grant dar cu impact asupra obținerii și diseminării rezultatelor descrise, au avut loc la IHES, Bures sur Yvette (Franța, octombrie-noiembrie 2011) și New York (28 mai - 3 iunie 2012).

Unele rezultate preliminare obținute în cadrul au fost comunicate de către Iulian Stoleriu la sesiunile științifice a două conferințe internaționale ("Conference on Applied and Industrial Mathematics" -CAIM 2012- în Chișinău, Moldova și "International Conference on Controlled Deterministic and Stochastic Systems", Iași), cât și în cadrul a două seminarii științifice (la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iași și la Universitatea Strathclyde din Glasgow, Marea Britanie).

Lucrări publicate:

1) Dorel Fetcu, Cezar Oniciuc, Biharmonic integral C-parallel submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms, Tohoku Mathematical Journal 64(2) (2012), 195-222.

Lucrări acceptate spre publicare:

1) Dorel Fetcu, Harold Rosenberg, On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces, va apărea în Revista Matematică Iberoamericană.

2) Dorel Fetcu, Cezar Oniciuc, Harold Rosenberg, Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in $S^n \times R$, va apărea în Journal of Geometric Analysis.

3) A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic PNMC submanifolds in spheres. DOI: 10.1007/s11512-012-0169-5, va apărea în Arkiv für Mathematik.

4) J.I. Burgos Gil, G. Freixas, R. Litcanu, Generalized holomorphic analytic torsion, va aparea in J. Eur. Math. Soc.

Lucrari in curs de finalizare:

1) A. Balmus, Remarks on lambda-biharmonic submanifolds.

Lucrari in lucru:

1) E. Loubeau, C. Oniciuc, I. Stoleriu. On biharmonic maps from torus into spheres.

Director proiect,
Conf. Dr. Cezar Oniciuc

