

Raport științific privind implementarea proiectului în perioada Octombrie 2011 - Septembrie 2016

În ceea ce urmează vom prezenta obiectivele etapelor raportate. Precizăm că în cadrul acestor obiective s-au desfășurat activități de documentare și informare, de cercetare și de elaborare de articole științifice trimise spre publicare în reviste de specialitate, multe publicate între timp, și prezentate la workshop-uri și conferințe naționale și internaționale.

De asemenea, în urma stagiilor de cercetare ale membrilor echipei de cercetare în centre universitare din străinătate, au fost demarate, în strânsă legătură cu obiectivele științifice propuse, noi direcții de cercetare și au fost elaborate studii preliminare care urmează a fi finalizate și trimise spre publicare.

Obiectivul 1: Problema Skorohod oblică și inecuații variaționale stochastice asociate

O primă direcție de cercetare* este dată de studiul problemei existenței și unicității soluției inecuației variaționale stochastice (IVS) cu reflexie oblică:

$$(1) \quad \begin{cases} dX_t + H(X_t)\partial\varphi(X_t)(dt) \ni f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \in \overline{\text{Dom}(\varphi)}, \quad t > 0, \end{cases}$$

unde H este o matrice simetrică pozitiv definită, φ este o funcție convexă proprie i.s.c. iar $\partial\varphi$ subdiferențial sa. Prezența produsului $H(X_t)\partial\varphi(X_t)$ perturbă atât proprietatea Lipschitz a primului factor cât și proprietatea de monotonie a celui de al doilea, problemele ridicate în această situație fiind superioare celor din cazurile clasice deja studiate.

Pentru început este considerată o problemă Skorohod generalizată cu input singular:

$$(2) \quad \begin{cases} dx(t) + H(x(t))\partial\varphi(x(t))(dt) \ni f(t, x(t))dt + dm(t) \\ x(0) = x_0 \in D := \text{Dom}(\varphi) = \overline{\text{Dom}(\varphi)}, \quad t > 0, \end{cases}$$

unde $m \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $m(0) = 0$ și $H \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d})$ o matrice simetrică a.î., $\forall x, u: \frac{1}{c}|u|^2 \leq \langle H(x)u, u \rangle \leq c|u|^2$. O pereche de funcții (x, k) se numește soluție a problemei Skorohod generalizate cu subgradienți oblici (și scriem $(x, k) \in \mathcal{SP}(H\partial\varphi; x_0, m)$) dacă $x, k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ sunt continue, $dk(r) \in \partial\varphi(x(r))(dr)$ și pentru orice $t \geq 0$,

$$x(t) + \int_0^t H(x(r))dk(r) = x_0 + \int_0^t f(r, x(r))dr + m(t).$$

Teoremă. Dacă $(x, k) \in \mathcal{SP}(H\partial\varphi; x_0, m)$ atunci există $C_T(\|m\|_T)$ crescătoare a.î. $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|x\|_T + \downarrow k \uparrow_T \leq C_T(\|m\|_T) \quad \text{și} \quad |x(t) - x(s)| + \downarrow k \uparrow_t - \downarrow k \uparrow_s \leq C_T(\|m\|_T) \times \sqrt{t - s + m_m(t - s)},$$

unde m_m reprezintă modulul de continuitate al funcției continue m și $f^\#(t) := \sup_{x \in \text{Dom}(\varphi)} |f(t, x)|$.

Teoremă. În condiții convenabile impuse funcțiilor coeficient, IVS (2) admite cel puțin o soluție continuă (x, k) .

Teoremă. Dacă există $\mu \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ a.î., pentru toți $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \mu(t)|x - y|$, a.e. $t \geq 0$. și $m \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, atunci problema Skorohod generalizată cu subgradienți oblici (2) admite o unică soluție în spațiul $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \times [C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)]$.

Revenim în cele ce urmează la analiza calitativă a inecuației variaționale stochastice generalizate (1).

Definiție. (I) Dată o bază stohastică $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ și o mișcare Browniană, atunci $(X, K): \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de p.s.p.m. continue este o soluție tare a IVS cu reflexie oblică (1) dacă, $\mathbb{P} - a.s.$ $\omega \in \Omega$, pentru $\forall y \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$:

$$(3) \quad \begin{cases} X_t \in \overline{\text{Dom}(\varphi)}, \quad \forall t \geq 0, \quad \varphi(X_\cdot) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+), \quad K_\cdot \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad K_0 = 0, \\ X_t + \int_0^t H(X_s) dK_s = x_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s, \quad \forall t \geq 0, \\ \forall 0 \leq s \leq t, \quad \int_s^t \langle y(r) - X_r, dK_r \rangle + \int_s^t \varphi(X_r) dr \leq \int_s^t \varphi(y(r)) dr, \end{cases}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [9].

(II) Dacă există o bază stochastică $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, o mișcare Browniană și $(X, K) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ p.s.p.m.

$$(X, (\omega), K, (\omega)) \in \mathcal{SP}(H\partial\varphi; x_0, M, (\omega)), \quad \mathbb{P} - a.s. \omega \in \Omega,$$

atunci $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, B_t, X_t, K_t)_{t \geq 0}$ reprezintă o soluție slabă a IVS cu reflexie oblică (1).

Teoremă. În condiții convenabile impuse funcțiilor coeficient, IVS (1) admite cel puțin o soluție slabă. În plus, dacă coeficienții f și g satisfac condiții de continuitate Lipschitz, atunci există o unică soluție tare $(X, K) \in S_d^0 \times S_d^0$.

Existența. Construim un șir de ecuații aproximante, a căror șir al soluțiilor este tight în $C([0, T]; \mathbb{R}^{2d+1})$, ceea ce permite aplicarea teoremelor lui Prohorov și Skorokod. În final, utilizând teorema convergenței dominate a lui Lebesgue putem trece la limită pentru a obține o soluție slabă a IVS (1).

Unicitatea. Demonstrăm unicitatea traiectorială deoarece existența unei soluții slabe împreună cu unicitatea traiectorială implică existența unei soluții tari pentru IVS (1). Presupunând că $(X, K), (\hat{X}, \hat{K}) \in S_d^0 \times S_d^0$ sunt două soluții, considerăm matricea simetrică și strict pozitiv definită $Q_r = H^{-1}(X_r) + H^{-1}(\hat{X}_r)$ și aplicăm formula de diferențiere a funcțiilor compuse pentru procesul $U_r = Q_r^{1/2}(X_r - \hat{X}_r)$, ceea ce conduce la faptul că, $\mathbb{P} - a.s., X_s = \hat{X}_s$ pentru toți $s \geq 0$.

A doua direcție de cercetare* a constatat în obținerea de soluții slabe aproximante pentru soluția slabă a unei ecuații diferențiale stochastice (EDS) reflectate precum și aproximarea soluției de vâscozitate a unui sistem de ecuații cu derivate parțiale (EDP) cu condiții Neumann la frontiera unui domeniu neted, deschis și convex G :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, x) + Lu_i(t, x) + f_i(t, x, u(t, x)) = 0, \text{ în } [0, T] \times G, \\ \frac{\partial u_i}{\partial n}(t, x) = h_i(t, x, u(t, x)), \text{ pe } [0, T] \times \partial G, \\ u_i(T, x) = g_i(x), \forall x \in G, i = \overline{1, k}, \end{cases}$$

unde L este operatorul diferențial $Lu(t, x) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(x) \sigma^*(x) D^2 u(t, x)) + \langle b(x), Du(t, x) \rangle$. Ecuația de mai sus este asociată, printr-o formulă de tip Feynman-Kac, sistemului format dintr-o EDS reflectată și una retrogradă:

$$(5) \quad \begin{cases} X_s + \int_0^t \nabla \ell(X_r) dk_r = x + \int_0^t b(X_r) dr + \int_0^t \sigma(X_r) dW_r \\ k_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_r \in \partial G\}} dk_r \\ Y_s = g(X_T) + \int_0^T f(r, X_r, Y_r) dr - \int_0^T U_r dM_r^X - \int_0^T h(r, X_r, Y_r) dk_r \end{cases}$$

unde $\ell \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ a.î. $G = \{x \in \mathbb{R}^d : \ell(x) < 0\}$, $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^d : \ell(x) = 0\}$, k este un proces crescător, iar M^X este partea martingală a procesului X . Aici b, σ și g sunt funcții continue, pe când f și h au un grad mai mare de regularitate. Astfel soluțiile (X, k) ale EDS și (Y, U) ale EDS retrograde sunt considerate în sens slab, un pas esențial constând în verificarea faptului că problema este bine pusă (avem existență și unicitate). Scopul este de a le aproxima cu soluțiile unui sistem progresiv-retrograd decuplat unde ecuația progresivă nu mai este reflectată:

$$\begin{cases} X_s^n + n \int_0^t \delta(X_r^n) dr = x + \int_0^t b(X_r^n) dr + \int_0^t \sigma(X_r^n) dW_r \\ Y_s^n = g(X_T^n) + \int_0^T f(r, X_r^n, Y_r^n) dr - \int_0^T U_r^n dM_r^{X^n} - \int_0^T h(r, X_r^n, Y_r^n) d \langle \nabla \ell(X_r^n), \delta(X_r^n) \rangle \end{cases}$$

Aici funcția δ coincide cu $I - \pi_{\bar{G}}$ într-o vecinătate a lui $\bar{G}$. Un prim rezultat de aproximare este dat de:

Teoremă. Șirul (X^n, Y^n) converge în distribuție la (X, Y) pe spațiul $C([0, T]; \mathbb{R}^d) \times C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ înzestrat cu produsul topologiei convergenței uniforme și al topologiei S.

Demonstrația face apel la o metodă indirectă, aceea de a arăta mai întâi faptul că șirul este *tight* în spațiul Skorohod $D([0, T]; \mathbb{R}^{d+1})$, înzestrat cu topologia S introdusă de A. Jakubowski. Folosind ulterior faptul că procesele (X^n, k^n) și (X, k) sunt continue, unicitatea soluției (X, k) și convexitatea domeniului G , reușim să arătăm că (X^n, k^n) converge la (X, k) în distribuție pe $C([0, T]; \mathbb{R}^{d+1})$.

Pentru a face conexiunea cu EDP (4), este necesar să plasăm sistemul (5) într-un cadru Markovian, permițând sistemului dinamic să aibă ca timp de plecare $t \in [0, T]$ cu condiția inițială $X_t = x$.

Teoremă. Aplicația $(t, x) \mapsto (X^{t,x}, Y^{t,x})$ este continuă în distribuție.

Demonstrația acestui rezultat original face apel la teoreme de compacitate de tip Prohorov. Ca o consecință, funcția deterministă $u(t, x) := Y_t^{t,x}$ este continuă. Adaptând apoi un rezultat de tip Feynman-Kac se arată că:

* Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [1].

Teoremă. Funcția u este soluție de vâscoșitate a EDP (4), iar șirul soluțiilor u^n de vâscoșitate ale următoarei EDP converge la u :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^n}{\partial t}(t, x) + Lu_i^n(t, x) + f_i(t, x, u^n(t, x)) - \langle \nabla \ell(x), n\delta(x) \rangle h_i(t, x, u^n(t, x)) = 0 \\ u_i^n(T, x) = g_i(x), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, i = \overline{1, k}, \end{cases}$$

Obiectivul 2:

Ecuații diferențiale stochastice retrograde cu restricții de stare dirijate de mișcarea browniană (fracționară)
O primă direcție de cercetare* a constat în studiul inecuațiilor variaționale stochastice retrograde (IVSR):

$$(6) \quad \begin{cases} -dY_t + \partial\varphi(Y_t) dt \ni F(t, Y_t, Z_t) dt - Z_t dB_t, 0 \leq t < T \\ Y_T = \eta. \end{cases}$$

Cercetarea noastră generalizează rezultatele precedente privind existența și unicitatea soluției IVSR (6) prin slăbirea ipotezelor asupra generatorului F : astfel se va impune o condiție de locală mărginire (în locul creșterii subliniare), i.e. $\mathbb{E} \left(\int_0^T F_\rho^\#(s) ds \right)^p < \infty$, unde $F_\rho^\#(t) \stackrel{def}{=} \sup_{|y| \leq \rho} |F(t, y, 0)|$.

Fie un spațiu complet de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și cu filtrarea $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ generată de o mișcare browniană $\{B_t : t \geq 0\}$. Presupunem că $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ este $\mathcal{F}_T$ -măsurabil iar $F : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface ipotezele standard (de continuitate, Lipschitzianitate) precum și condiția $\int_0^T F_\rho^\#(s) ds < \infty, \forall \rho \geq 0$, unde pentru $\rho \geq 0, F_\rho^\#(t) \stackrel{def}{=} \sup_{|y| \leq \rho} |F(t, y, 0)|$. Spațiul $S_m^p[0, T]$ denotă p.s.p.m. continue $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ a.î.

$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p < \infty$, dacă $p > 0$, iar $\Lambda_m^p(0, T)$ denotă p.s.p.m. $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ a.î. $\mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right)^{p/2} < \infty$ dacă $p > 0$.

Definiție. Perechea $(Y, Z) \in S_m^0[0, T] \times \Lambda_{m \times k}^0(0, T)$ de p.s.p.m. este soluția pentru (6) dacă există $K \in S_m^0[0, T]$ a.î.

$$\uparrow K \downarrow_T + \int_0^T |\varphi(Y_t)| dt + \int_0^T |F(t, Y_t, Z_t)| dt < \infty, \text{ a.s. } \text{ și } dK_t \in \partial\varphi(Y_t) dt, \text{ a.s.}$$

și, $\mathbb{P}$ -a.s., $\forall t \in [0, T]$:

$$(7) \quad Y_t + K_T - K_t = \eta + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

Remarcă. Dacă procesul K este absolut continuu în raport cu dt atunci există p.s.p.m. U a.î.

$$\int_0^T |U_t| dt < \infty, \text{ a.s. și } K_t = \int_0^t U_s ds, \forall t \in [0, T],$$

iar $dK_t \in \partial\varphi(Y_t) dt$ înseamnă atunci $U_t \in \partial\varphi(Y_t), dt$ -a.e., a.s.

Propoziție. În ipotezele de mai sus dacă $(Y, Z), (\tilde{Y}, \tilde{Z})$ sunt două soluții pentru (6) a.î. $\mathbb{E} \sup_{s \in [0, T]} e^{pV_s} |Y_s - \tilde{Y}_s|^p < \infty$, atunci $\exists C_{a,p}$ a.î. $\mathbb{P}$ -a.s., $\forall t \in [0, T]$:

$$(8) \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[\sup_{s \in [t, T]} e^{pV_s} |Y_s - \tilde{Y}_s|^p + \left(\int_t^T e^{2V_s} |Z_s - \tilde{Z}_s|^2 ds \right)^{p/2} \right] \leq C_{a,p} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} e^{pV_T} |\eta - \tilde{\eta}|^p.$$

Pentru a obține absoluta continuitate a procesului K este necesar să impunem două condiții suplimentare. Pentru $(u_0, \hat{u}_0) \in \partial\varphi$ fixate, fie

$$(9) \quad \Theta_T^{a,p} \stackrel{def}{=} C_{a,p} e^{2p\|V\|_T} \left[|\eta - u_0|^p + \left(\int_0^T |\hat{u}_0| ds \right)^p + \left(\int_0^T |F(s, u_0, 0)| ds \right)^p \right].$$

(A₁) $\exists p \geq 2, \beta$ și b și $\kappa \geq 0$ a.î. $\mathbb{E}\varphi^+(\eta) < \infty$ și $\langle \hat{u}, F(t, u, z) \rangle \leq \frac{1}{2} |\hat{u}|^2 + \beta_t + b(t) |u|^p + \kappa |z|^2 \quad d\mathbb{P} \otimes dt$ -a.e. $\forall (u, \hat{u}) \in \partial\varphi$ și z

(A₂) $\exists M, L > 0$ și $(u_0, \hat{u}_0) \in \partial\varphi$ a.î. $\mathbb{E}\varphi^+(\eta) < \infty, |\eta| + \int_0^T |F(s, u_0, 0)| ds \leq M$, a.s. și

$$\exists R_0 \geq |u_0| + C_{a,p}^{1/p} e^{2\|V\|_T} [M + |u_0| + |\hat{u}_0| T] cu \mathbb{E} \int_0^T \left(F_{R_0}^\#(s) \right)^2 ds < \infty.$$

* Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [15].

Teoremă. În ipotezele de mai sus, dacă $\mathbb{E}|\eta|^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T F_\rho^\#(s)ds\right)^p < \infty, \forall \rho \geq 0$ și dacă una dintre ipotezele (A₁) sau (A₂) este satisfăcută, atunci există o unică pereche $(Y, Z) \in S_m^p[0, T] \times \Lambda_{m \times k}^p(0, T), U \in \Lambda_m^2(0, T)$ a.î. $Y_t(\omega) \in \text{Dom}(\partial\varphi), d\mathbb{P} \otimes dt$ -a.e., $U_t(\omega) \in \partial\varphi(Y_t(\omega)), d\mathbb{P} \otimes dt$ -a.e și $\forall t \in [0, T]$

$$(10) \quad Y_t + \int_t^T U_s ds = \eta + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \text{ a.s.}$$

Remarcă. Demonstrația este împărțită în mai multe etape: considerare mai întâi a problemei aproximante:

$$(11) \quad Y_t^\varepsilon + \int_t^T \nabla\varphi_\varepsilon(Y_s^\varepsilon) ds = \eta + \int_t^T F(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) ds - \int_t^T Z_s^\varepsilon dB_s, \text{ a.s., } t \in [0, T],$$

unde $\nabla\varphi_\varepsilon$ este gradientul regularizatei Moreau-Yosida a lui φ . Apoi se va arăta *mărginirea pentru Y^ε și Z^ε și pentru $\nabla\varphi_\varepsilon(Y_s^\varepsilon)$* . Ultimul pas constă în *demonstrarea că șirul aproximant este șir Cauchy și trecerea la limită*.

În cazul general înlocuim (A₂) cu ipoteza $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi)) \neq \emptyset$.

Teoremă. În ipotezele inițiale, dacă $\mathbb{E}|\eta|^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T F_\rho^\#(s)ds\right)^p < \infty, \forall \rho \geq 0$, iar $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi)) \neq \emptyset$, atunci există o unică pereche (Y, Z, K) a.î. $\mathbb{E}\uparrow K \uparrow_T^{p/2} < \infty$ și $\forall t \in [0, T]$

$$Y_t + K_T - K_t = \eta + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \text{ a.s.,}$$

și $Y_T = \eta$, a.s. și $dK_t \in \partial\varphi(Y_t) dt$, a.s.

Remarcă. Demonstrația, ca și în cazul precedent, este împărțită în mai multe etape: considerare mai întâi a problemei aproximante, demonstrarea existenței cu ipoteza suplimentară: $\exists M > 0, u_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(\partial\varphi))$ a.î.

$$(12) \quad \mathbb{E}|\varphi(\eta)| + |\eta| + \int_0^T |F(s, u_0, 0)| ds \leq M, \text{ a.s.}$$

Apoi se va arăta existența fără ipoteza suplimentară de mai sus.

A doua direcție de cercetare* în cadrul acestui obiectiv este dată de studiul existenței și unicității soluției următoarei IVS retrograde de tip generalizat, considerată în cadrul spațiilor Hilbert:

$$(13) \quad \begin{cases} Y_t + \int_{t \wedge \tau}^\tau dK_s = \eta + \int_{t \wedge \tau}^\tau [F(s, Y_s, Z_s) ds + G(s, Y_s) dA_s] - \int_{t \wedge \tau}^\tau Z_s dW_s, \text{ a.s.} \\ dK_t \in \partial\varphi(Y_t) dt + \partial\psi(Y_t) dA_t, \forall t \geq 0, \end{cases}$$

unde $(W_t)_{t \geq 0}$ este un proces Wiener cilindric, $\partial\varphi, \partial\psi$ sunt subdiferențialele a două funcții inferior semicontinue și continue φ și ψ , procesul $(A_t)_{t \geq 0}$ este unul progresiv măsurabil, continuu și crescător iar τ este un timp de oprire.

Astfel sunt obținute rezultate care generalizează cele din lucrările similare precedente prin considerarea intervalului de timp aleator $[0, \tau]$, prin apariția termenului integral de tip Lebesgue-Stieltjes precum și prin asumarea unei condiții (mai slabe) de mărginire pentru generatorii F și G (în locul creșterii sublineare).

Precizăm ca, având în vedere că τ este un timp de oprire, prezența procesului A este justificată de posibilele aplicații ale ecuației (13) în demonstrarea unor formule probabiliste de reprezentare a soluției EDP multivoce, de tip eliptic și cu condiții Neumann la frontiera unui domeniu din $\mathbb{R}^d$.

Vom mai nota cu $Q_t(\omega) := t + A_t(\omega)$. Presupunem că F, G sunt monotone în raport cu a doua variabilă și Lipschitz în raport cu a treia. Definim $\Phi(t, y, z) := \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) [\alpha_t F(t, y, z) + (1 - \alpha_t) G(t, y)]$ și $\Psi(\omega, t, y) := \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) [\alpha_t \varphi(y) + (1 - \alpha_t) \psi(y)]$.

În rezolvarea problemei avem nevoie și de ipoteze de compatibilitate între φ și ψ (scrise cu ajutorul aproximantelor Yosida ale operatorilor $\partial\varphi$ și $\partial\psi$). În ipotezele de mai sus putem formula acum primul rezultat principal. În scopul obținerii absolutei continuități în raport cu măsura dQ a procesului K (care este parte a soluției) presupunem în plus că există $R_0 > 0$ a.î.

$$(14) \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(e^{2\sup_{s \geq t} V_s} |\eta|^2) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\int_{t \wedge \tau}^\tau e^{V_s} |\Phi(s, 0, 0)| dQ_s\right)^2 \leq R_0, \text{ a.s.}$$

Teoremă. În ipotezele de mai sus există un unică soluție (Y, Z, U) a problemei (13), care verifică ecuația

$$(15) \quad Y_t + \int_t^T U_s dQ_s = Y_T + \int_t^T \Phi(s, Y_s, Z_s) dQ_s - \int_t^T Z_s dW_s, \text{ a.s.}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [11]. De asemenea, articolul [12] conține rezultate similare celui precedent (cazul $p \geq 2$), dar în cazul soluțiilor L^p , cu $p \in [1, 2)$.

cu $U_t \in \partial\Psi(Y_t)$.

În ceea ce privește demonstrația sunt urmați următorii pași:

A. Considerarea problemei aproximante:

$$(16) \quad Y_t^n + \int_t^\infty \mathbb{1}_{[0,n]}(s) \nabla_y \Psi^n(s, Y_s^n) dQ_s = \eta + \int_t^\infty \mathbb{1}_{[0,n]}(s) \Phi(s, Y_s^n, Z_s^n) dQ_s - \int_t^\infty Z_s^n dW_s, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}, \forall t \geq 0,$$

unde $\Psi^n(\omega, s, y) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(s) \left[\alpha_s(\omega) \varphi_{1/n}(y) + (1 - \alpha_s(\omega)) \psi_{1/n}(y) \right]$. Știm că există o unică soluție (Y^n, Z^n) pentru (16).

B. Rezultate de mărginire ale lui Y^n și Z^n .

C. Mărginirea cantităților $\nabla \varphi_{1/n}(Y_t^n)$ și $\nabla \psi_{1/n}(Y_t^n)$ (pas esențial în finalizarea demonstrației:)

Are loc

$$(17) \quad \mathbb{E} \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,n \wedge \tau]}(r) \left[e^{2\tilde{V}_r} |\nabla \varphi_{1/n}(Y_r^n)|^2 dr + e^{2\tilde{V}_r} |\nabla \psi_{1/n}(Y_r^n)|^2 dA_r \right] \leq C.$$

D. Ultimul pas constă în demonstrarea proprietății de șir Cauchy a șirului (Y^n, Z^n) și în trecerea la limită în ecuația aproximantă.

O problemă importantă constă în rezolvarea problemei de mai sus în lipsa ipotezei (14). Vom obține astfel noțiunea de soluție slab variațională iar al doilea rezultat principal al studiului constă în demonstrarea existenței și unicității soluției (în acest sens) pentru problema considerată.

Având în vedere că IVSR avute în vedere sunt considerate în spații infinit dimensionale putem alege cazuri particulare de funcții convexe φ și ψ și obținem astfel (ca o consecință a celor două rezultate esențiale ale lucrării) teoreme de existențe și unicitate pentru diverse ecuații diferențiale stochastice cu derivate parțiale (EDSDP) de tip retrograd: EDSDP cu condiții Dirichlet la frontiera unui domeniu, EDSDP cu condiții Neumann la frontieră, EDSDP a mediilor poroase.

A treia direcție de cercetare* în cadrul acestui obiectiv constă în obținerea de scheme numerice pentru cuplul de EDS progresiv-retrograde

$$(18) \quad \begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, & t \in [0, T], \\ dY_t + F(t, X_t, Y_t, Z_t) dt \in \partial\varphi(Y_t) dt + Z_t dW_t, & t \in [0, T], \\ X_0 = x, Y_T = g(X_T), \end{cases}$$

în condiții uzuale Lipschitz și de monotonie impuse coeficienților. Rezultate clasice obținute de către Pardoux și Rășcanu în 1998 demonstrează existența și unicitatea soluției $(Y_t, Z_t, U_t)_{t \in [0, T]}$ pentru sistemul (18).

Se demonstrează convergența unei scheme de aproximare pentru inecuația variațională stochastică din cuplul anterior. Pentru o partiție $\pi = \{t_i = ih : 0 \leq i \leq n\}$, cu $h := T/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ a intervalului $[0, T]$, fie X^h aproximarea Euler standard a procesului progresiv X . Considerăm $Y_T^h := g(X_T^h)$ drept condiție inițială și, pentru $i = \overline{n-1, 0}$, avem, intuitiv,

$$(19) \quad Y_{t_i}^h \sim Y_{t_{i+1}}^h + h \left[F(t_i, X_{t_i}^h, Y_{t_i}^h, Z_{t_i}^h) - \nabla \varphi_{h^a}(Y_{t_i}^h) \right] - Z_{t_i}^h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Aplicăm media condiționată $\mathbb{E}^i(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_{t_i})$ și obținem că $Y_{t_i}^h \sim \mathbb{E}^i(Y_{t_{i+1}}^h) + h \left[F(t_i, X_{t_i}^h, Y_{t_i}^h, Z_{t_i}^h) - \nabla \varphi_{h^a}(Y_{t_i}^h) \right]$. Multiplicăm (19) cu $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ și aplicăm încă o dată media condiționată $\mathbb{E}^i$ pentru a obține că $Z_{t_i}^h \sim \frac{1}{h} \mathbb{E}^i(Y_{t_{i+1}}^h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))$.

Prin urmare, construim următoarea schema de aproximare implicită, care definește perechea $(\tilde{Y}^h, \tilde{Z}^h)$ inductiv:

$$(20) \quad \begin{cases} \tilde{Y}_T^h := g(X_T^h), \tilde{Z}_T^h = 0, \\ \tilde{Y}_{t_i}^h := \mathbb{E}^{i,h}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^h) + h \left[F(t_i, X_{t_i}^h, \tilde{Y}_{t_i}^h, \tilde{Z}_{t_i}^h) - \nabla \varphi_{h^a}(\tilde{Y}_{t_i}^h) \right], \\ \tilde{Z}_{t_i}^h := \frac{1}{h} \mathbb{E}^{i,h}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) \quad \text{și} \quad \tilde{U}_{t_i}^h := \nabla \varphi_{h^a}(\mathbb{E}^{i,h}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^h)), \end{cases}$$

unde $\mathbb{E}^{i,h}(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_{t_i}^h)$ și $\mathcal{F}_{t_i}^h := \sigma(X_{t_j}^h : 0 \leq j \leq i)$. $\tilde{Y}_{t_i}^h$ este definit implicit drept soluția unei probleme de punct fix. În plus, pentru $h > 0$ poate fi estimat numeric într-un mod eficient. Se poate, de asemenea, defini schema explicită

$$\tilde{Y}_{t_i}^h := \mathbb{E}^{i,h}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^h) + h \mathbb{E}^{i,h} \left[F(t_i, X_{t_i}^h, \tilde{Y}_{t_{i+1}}^h, \tilde{Z}_{t_i}^h) - \nabla \varphi_{h^a}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^h) \right],$$

* Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [17].

schemă ce nu necesită aplicarea unui rezultat de tip punct fix, dar ridică probleme suplimentare din punct de vedere al aproximării numerice.

În continuare este definită o versiune continuă a schemei de aproximare (20), definind, pentru fiecare $t \in (t_i, t_{i+1}]$, procesul

$$(21) \quad \bar{Y}_t^h := \tilde{Y}_{t_i}^h - (t - t_i) \left[F(t_i, X_{t_i}^h, \tilde{Y}_{t_i}^h, \tilde{Z}_{t_i}^h) - \nabla \varphi_{h^a}(\tilde{Y}_{t_i}^h) \right] + \int_{t_i}^t \tilde{Z}_s^h dW_s.$$

Rezultatul principal al lucrării (precedat de o serie de estimări) este următorul:

Teoremă. Există o constantă $C > 0$, ce depinde de constantele Lipschitz ale coeficienților, astfel încat, pentru $a \in (0, 1/2)$:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |Y_t - \tilde{Y}_t^h|^2 + \mathbb{E} \int_0^T \left[|Y_t - \tilde{Y}_t^h|^2 + |Z_t - \tilde{Z}_t^h|^2 \right] dt \leq Ch^{a \wedge (1-2a)}.$$

Obiectivul 3: Existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor diferențiale stochastice cu reflexie generalizată

O primă direcție de cercetare* a constat în studiul EDS considerate pe domenii neconvexe; mai precis avem în vedere EDS multivocă dirijată de operatorul subdiferențială de tip Fréchet $\partial^- \varphi$ (unde φ este presupusă doar semiconvexă):

$$(22) \quad \begin{cases} X_t + K_t = \xi + \int_0^t F(s, X_s) ds + \int_0^t G(s, X_s) dB_s, \quad t \geq 0, \\ dK_t(\omega) \in \partial^- \varphi(X_t(\omega))(dt). \end{cases}$$

Este important să precizăm că în acest caz soluția X rămâne în domeniul $\text{Dom}(\varphi)$ care nu este neapărat mulțime convexă.

Reamintim că subdiferențiala Fréchet $\partial^- \varphi$ asociată unei funcții φ inferior semicontinue (i.s.c.) și semiconvexe este definită de: $\partial^- \varphi(x) = \emptyset$, dacă $x \notin \text{Dom}(\varphi)$ și

$$\partial^- \varphi(x) := \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^d : \liminf_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - \langle \hat{x}, y - x \rangle}{|y - x|} \geq 0 \right\}.$$

În scopul demonstrării existenței soluției pentru problema (22) vom rezolva mai întâi ecuația deterministă de tipul

$$(23) \quad \begin{cases} x(t) + k(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + m(t), \quad t \geq 0, \\ dk(t) \in \partial^- \varphi(x(t))(dt). \end{cases}$$

Observăm că luând în particular $f \equiv 0$ și φ ca indicatoarea unui domeniu închis, obținem că (23) devine problema clasică Skorohod. De asemenea precizăm că în cazul în care φ este chiar convexă, problema a fost îndelung studiată; în acest caz domeniu de restricție $\text{Dom}(\varphi)$ devine unul convex.

Scopul principal este acela de a extinde atât problema deterministă cât și problema stochastică (considerate în cazul convex doar) la cazul inecuațiilor variaționale de tip non-convex. În ceea ce privește ipotezele să presupunem că $x_0 \in \text{Dom}(\varphi) = \overline{\text{Dom}(\varphi)}$, inputul m este o funcție continuă iar φ este inferior semicontinuă și semiconvexă. Mulțimea $\text{Dom}(\varphi)$ satisface condiția bilei uniform exterioare precum și condiția "picăturii" uniform interioare, adică, $\forall x \in \text{Dom}(\varphi)$ există $r_0, h_0 > 0$ a.î. picătura de vârf x și de direcție v , $D_x(v, r_0) \subset \text{Dom}(\varphi)$ pentru orice $|v| \leq h_0$, unde

$$D_x(v, r) := \text{conv} \{x, \bar{B}(x + v, r)\} = \{x + t(u - x) : u \in \bar{B}(x + v, r), t \in [0, 1]\}.$$

Mai presupunem în plus că $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L + L|x - y|$, $\forall x, y \in \text{Dom}(\varphi)$.

Mai întâi se vor obține estimări a-priori ale soluției de tipul următor:

Teoremă. În ipotezele de mai sus, există o constantă C a.î., dacă (x, k) este o soluție a problemei deterministe (23) cu $f \equiv 0$ atunci

$$(a) \quad \|k\|_{BV([0, T]; \mathbb{R}^d)} \leq C, \quad \|x\|_{BV([0, T]; \mathbb{R}^d)} \leq |x_0| + C, \\ (b) \quad |x(t) - x(s)| + \|k\|_{BV([s, t]; \mathbb{R}^d)} \leq C_{T, m} \cdot \sqrt{\mu_m(t - s)}, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

unde, dacă y este o funcție continuă, $\mu_y(\varepsilon) := \varepsilon + \mathbf{m}_y(\varepsilon)$, cu $\mathbf{m}_y(\varepsilon)$ modulul de uniformă continuitate asociat lui y .

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [2].

Se va obține apoi primul rezultat principal de existență și unicitate a soluției (x, k) pentru problema Skorohod generalizată (23) cu $f \equiv 0$.

Se demonstrează că aplicația $m \mapsto x : C([0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ este continuă și, în consecință, rezultă existența unei soluții progresiv măsurabile pentru EDS asociată

$$(24) \quad \begin{cases} X_t(\omega) + K_t(\omega) = \xi(\omega) + M_t(\omega), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega, \\ dK_t(\omega) \in \partial^- \varphi(X_t(\omega))(dt). \end{cases}$$

În continuare se vor generaliza rezultatele precedente la cazul ecuațiilor mai generale (23) și (22), unde f (respectiv F) sunt continue și monotone (în raport cu a doua variabilă) și satisface condiția:

$$\int_0^T f^\#(s) ds < \infty, \quad \forall T \geq 0, \quad \text{unde } f^\#(t) := \sup \{ |f(t, x)| : x \in \overline{\text{Dom}(\varphi)} \}.$$

Tot în cadrul acestui obiectiv a fost realizat suplimentar*, în continuarea lucrării [2] și a lucrării [9], studiul existenței și unicității soluției pentru inecuația variațională cu subgradienți oblici, considerate într-un cadru non-convex:

$$(25) \quad x'(t) + H(t, x(t)) \partial^- \varphi(x(t)) \ni g(t, x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \text{Dom}(\varphi),$$

unde $\partial^- \varphi$ reprezintă subdiferențiala Fréchet a funcției semiconvexe φ și aplicația $x \mapsto H(\cdot, x)$ satisface condiții Lipschitz și anumite condiții de regularitate. Prezența reflexiei oblice produse de termenul $H \partial^- \varphi$ conduce la utilizarea unor tehnici diferite de situația reflexiei standard în domenii non-convexe sau de cea a reflexiei oblice în domenii convexe. Studiul continuă cu analizarea unei probleme non-convexe Skorohod, cu reflexie generalizată, iar trecerea la inecuații variaționale stochastice guvernate de un operator subdiferențial de tip Fréchet apare ca un pas natural.

Pentru abordarea Problemei Cauchy (25) a fost necesară stabilirea unor proprietăți ale operatorilor aproximați $\varphi_\varepsilon, J_\varepsilon$ și A_ε , similare celor din cazul convex.

Teoremă. Fie $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ o funcție i.s.c. pentru care $\exists a, b, c \geq 0$ a.î. $\varphi(v) + a|v|^2 + b|v| + c \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^d$. Dacă $0 < \varepsilon < \frac{1}{2a}$, atunci $\forall u \in \mathbb{R}^d$, există $u_\varepsilon \in \text{Dom}(\varphi)$ a.î. $\frac{1}{2\varepsilon}|u - u_\varepsilon|^2 + \varphi(u_\varepsilon) =: \varphi_\varepsilon(u)$. În plus, avem $J_\varepsilon(u) := u_\varepsilon \in \text{Dom}(\partial^- \varphi)$, $A_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon}(u - u_\varepsilon) \in \partial^- \varphi(u_\varepsilon)$ iar următoarele inegalități au loc, $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $u_0 \in \text{Dom}(\varphi)$ și $0 < \varepsilon < \frac{1}{4a+1}$:

$$(26) \quad |J_\varepsilon(u) - u|^2 \leq \frac{1}{1-\varepsilon(4a+1)} |u - u_0|^2 + \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon(4a+1)} [\beta(|u|) + b^2 + \varphi(u_0)],$$

unde $\beta(r) = ar^2 + br + c$. În particular, J_ε și A_ε sunt subliniare global, pentru $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4a+2}$. Alegând $u = u_0$ în (26) rezultă $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u_0) = u_0$, $\forall u_0 \in \text{Dom}(\varphi)$, $\overline{\text{Dom}(\partial^- \varphi)} = \text{Dom}(\varphi)$. Dacă, în plus, φ este o funcție (ρ, γ) -semiconvexă, fixând $u_0 \in \text{Dom}(\varphi)$ și $\lambda_0 > 0$ atunci, pentru $0 < r_0 \leq \bar{r}_0$ și $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_0$, $\forall u, v \in \overline{B}(u_0, r_0)$ avem

$$|J_\varepsilon(u) - J_\varepsilon(v)| \leq (1 + (\rho + \gamma)\lambda_0) |u - v| \quad \text{și} \quad |A_\varepsilon(u) - A_\varepsilon(v)| \leq \frac{2 + (\rho + \gamma)\lambda_0}{\varepsilon} |u - v|.$$

În particular, punctul de minim $J_\varepsilon(u) (= u_\varepsilon)$ pentru $\inf_{v \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} |u - v|^2 + \varphi(v) \right\}$ este unic pentru $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_0$ și $u \in \mathcal{E}_{\bar{r}_0}(D)$ (am notat $D := \text{Dom}(\varphi)$); de asemenea, $\varphi_\varepsilon \in C^1(\mathcal{E}_{\bar{r}_0}(D))$ și $\nabla \varphi_\varepsilon(u) = A_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}(u - J_\varepsilon u) \in \partial^- \varphi(J_\varepsilon u)$. În plus, $\nabla \varphi_\varepsilon$ și J_ε sunt Lipschitz pe orice mulțime submărginită a lui $\mathcal{E}_{\bar{r}_0}(D)$, iar $\text{int}(\text{Dom}(\varphi)) = \text{int}(\text{Dom}(\partial^- \varphi))$.

Considerăm problema Cauchy (25) în ipotezele: $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ este o funcție i.s.c., (ρ, γ) -semiconvexă; $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ este o funcție Carathéodory ce satisface:

- i) $\forall N > 0, \exists G_N \geq 0 : |g(t, x) - g(t, y)| \leq G_N |x - y|, \quad \forall |x|, |y| \leq N,$
- ii) $\exists L_1, L_2 \in L^1(0, T; \mathbb{R}_+)$, s.t. $|g(t, x)| \leq L_1(t) + L_2(t) |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, a.e. $t \in [0, T]$

Matricile $H(\cdot, \cdot), [H(\cdot, \cdot)]^{-1} \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d})$ și $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ avem: $h_{i,j}(t, x) = h_{j,i}(t, x), \forall i, j \in \overline{1, d}; \exists c_H \geq 1$ a.î. $\frac{1}{c_H} |u|^2 \leq \langle H(t, x) u, u \rangle \leq c_H |u|^2, \forall u \in \mathbb{R}^d; \exists L_H > 0$ a.î. H și H^{-1} sunt Lipschitz în raport cu a doua variabilă.

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [20].

Definiție. O pereche de funcții $x, h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ este soluție pentru (25) (vom scrie $(x, h) \in \mathcal{OR}(H\partial^-\varphi; x_0, g)$) dacă

- i) $x(t) \in \overline{\text{Dom}(\varphi)}, \quad \forall t \geq 0, x \in C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ și $h, \varphi(x) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^d)$,
- ii) $x(t) + \int_0^t H(r, x(r)) h(r) dr = x_0 + \int_0^t g(r, x(r)) dr, \quad \forall t \in [0, T],$
- iii) $h(t) \in \partial^-\varphi(x(t)), \quad \text{a.e. } t \in [0, T].$

Teoremă. Ecuația diferențială non-convexă cu subgradienți oblici (25) admite o soluție unică (x, h) . În plus, dacă $(x, h) \in \mathcal{OR}(H\partial^-\varphi; x_0, g)$ și $(\hat{x}, \hat{h}) \in \mathcal{OR}(H\partial^-\varphi; x_0, \hat{g})$ atunci

$$(27) \quad |x(t) - \hat{x}(t)| \leq Ce^{CU(t)} \left[|x_0 - \hat{x}_0| + \int_0^t |g(r, x(r)) - \hat{g}(r, x(r))| dr \right], \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

unde $U(t) = \int_0^t |x(r)| dr + \int_0^t |\hat{x}(r)| dr + (1 + \gamma) \int_0^t |h(r)| dr + (1 + \gamma) \int_0^t |\hat{h}(r)| dr + 2\rho t + G_N t$, cu $N \geq \|x\|_T \vee \|\hat{x}\|_T$.

Teoremă. Fie $x_0 \in \text{Dom}(\varphi)$. Presupunem ipotezele referitoare la φ, g și H satisfăcute și că $\text{Dom}(\varphi)$ este mărginit și închis. Atunci există $(x, h) \in C([0, T]; \mathbb{R}^d) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ soluție pentru (25) pe întregul interval de timp $[0, T]$.

Considerăm acum o problemă generalizată Skorohod, cu reflexie dată de subgradienți Fréchet oblici. Aceasta se poate scrie formal sub forma:

$$(28) \quad dx(t) + H(t, x(t))\partial^-\varphi(x(t))(dt) \ni g(t, x(t))dt + dm(t), \quad \text{a.e. } t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \text{Dom}(\varphi),$$

unde $m \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $m(0) = 0$, iar ipotezele referitoare la φ, g și H sunt presupuse satisfăcute.

Definiție. O pereche de funcții continue $x, k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ este o soluție pentru ecuația cu input singular (28) (vom scrie $(x, k) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, g, m)$) dacă

- i) $x(t) \in \overline{\text{Dom}(\varphi)}, \quad \forall t \geq 0$ și $\varphi(x(\cdot)) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$,
- ii) $k \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $k(0) = 0$,
- iii) $x(t) + \int_0^t H(r, x(r)) dk(r) = x_0 + \int_0^t g(r, x(r)) dr + m(t), \quad \forall t \geq 0,$
- iv) $\int_s^t \langle y(r) - x(r), dk(r) \rangle + \int_s^t \varphi(x(r)) dr \leq \int_s^t \varphi(y(r)) dr + \int_s^t |y(r) - x(r)|^2 (\rho dr + \gamma d\uparrow k\downarrow_r),$

pentru orice $0 \leq s \leq t$ și orice $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ continuă.

Impunem condiții suplimentare privitoare la funcția φ

$$\begin{cases} \text{ii)} & \exists K > 0 \quad \text{a.î.} \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K + K|x - y|, \quad \forall x, y \in \text{Dom}(\varphi), \\ \text{iii)} & \text{Dom}(\varphi) \text{ este mărginit și satisface condiția bilei interioare uniforme} \end{cases}$$

pentru a obține următoarele rezultate.

Teoremă. Dacă $m \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ atunci problema Skorohod non-convexă (28) admite cel mult o soluție $(x, k) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \times [C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)]$. În plus, dacă $(x, k) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, g, m)$ și $(\hat{x}, \hat{k}) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; \hat{x}_0, g, \hat{m})$, atunci

$$(30) \quad |x(t) - \hat{x}(t)| \leq Ce^{CV(t)} [|x_0 - \hat{x}_0| + \uparrow m - \hat{m}\downarrow_t], \quad \text{a.p.t. } t \geq 0,$$

unde $V(t) = \uparrow x\downarrow_t + \uparrow \hat{x}\downarrow_t + (1 + \gamma) \uparrow k\downarrow_t + (1 + \gamma) \uparrow \hat{k}\downarrow_t + 2\rho t + G_N t$.

Rezultatul principal al secțiunii este următorul:

Teoremă. Presupunem ipotezele $(H_H), (H_g), (H_\varphi)$ satisfăcute și considerăm $m \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $m(0) = 0$. Dacă, pentru orice $T > 0$, $\int_0^T (g^\#(t))^2 dt < +\infty$, unde $g^\#(t) := \sup_{x \in \text{Dom}(\varphi)} |g(t, x)|$, atunci problema (28) admite o soluție unică $(x, k) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, g, m)$.

Primul pas ce permite trecerea din cadrul determinist în cel stochastic este dat de:

Teoremă. Dacă $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ este o bază stochastică iar M este un proces stochastic continuu, $\mathcal{F}_t$ -progresiv măsurabil, atunci, $\mathbb{P}$ -a.s. $\omega \in \Omega$, problema aleatoare Skorohod cu subgradienți oblici

$$\begin{cases} X_t(\omega) + \int_0^t H(X_s(\omega)) dK_s(\omega) = x_0 + \int_0^t f(s, X_s(\omega)) ds + M_t(\omega), \quad t \geq 0, \\ dK_t(\omega) \in \partial^-\varphi(X_t(\omega))(dt) \end{cases}$$

are o soluție unică $(X.(\omega), K.(\omega)) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, f, M.(\omega))$. În plus, procesele stochastice X și K sunt continue, $\mathcal{F}_t$ -progresiv măsurabile.

Studiul se încheie cu considerarea inecuației variaționale stochastice (IVS) cu subgradienți Fréchet oblici:

$$(31) \quad \begin{cases} X_t + \int_0^t H(t, X_t) dK_t = x_0 + \int_0^t g(s, X_s) ds + \int_0^t f(s, X_s) dB_s, & t \geq 0, \\ dK_t \in \partial^-\varphi(X_t)(dt), & x_0 \in \text{Dom}(\varphi), \end{cases}$$

unde $(t, x) \mapsto g(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ și $(t, x) \mapsto f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$ sunt funcții Carathéodory a.î. are loc o condiție specifică de locală marginire. În plus, $\exists \mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ și $\ell \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ a.î. $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, a.p.t. $t \geq 0$,

$$(32) \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq \mu(t)|x - y| \quad \text{și} \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq \ell(t)|x - y|,$$

iar ipotezele impuse pentru φ și H în cadrul problemei deterministe Skorohod rămân valabile.

Definiție. (I) Dată o bază stochastică $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ și o mișcare browniană k -dimensională $\{B_t : t \geq 0\}$, spunem că o pereche $(X, K) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de procese stochastice continue, $\mathcal{F}_t$ -progresiv măsurabile este o soluție tare pentru IVS (31) dacă, $\mathbb{P} - a.s.$ $\omega \in \Omega$, $(X.(\omega), K.(\omega)) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, 0, M.(\omega))$, cu

$$M_t := \int_0^t g(s, X_s) ds + \int_0^t f(s, X_s) dB_s.$$

(II) Dacă există o bază stochastică $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, o mișcare browniană k -dimensională $\{B_t : t \geq 0\}$ și o pereche $(X., K.) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de procese stochastice continue, $\mathcal{F}_t$ -progresiv măsurabile a.î.

$$(X.(\omega), K.(\omega)) \in \mathcal{GSP}(H\partial^-\varphi; x_0, 0, M.(\omega)), \quad \mathbb{P} - a.s. \omega \in \Omega,$$

atunci colecția $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, B_t, X_t, K_t)_{t \geq 0}$ se numește soluție slabă pentru IVS (31).

Teoremă. Presupunem ipotezele (H_H) , (H_φ) , $(H_{f,g})$ satisfăcute. Atunci IVS (31) admite cel puțin o soluție slabă $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, B_t, X_t, K_t)_{t \geq 0}$. Dacă, în plus, (32) este satisfăcută, atunci (31) admite o soluție tare unică $(X, K) \in S^0_d \times S^0_d$.

În cadrul acestui obiectiv a fost realizat suplimentar* (și este în legătură cu lucrarea [20]), extinderea rezultatelor obținute privind reflexia oblică în contextul non-convex finit-dimensional într-un cadru infinit-dimensional. Aceasta va permite construirea de aplicații ce vizează EDP multivoce, cu subgradienți generalizați. Un prim pas în atingerea obiectivului îl reprezintă analiza detaliată a proprietăților soluțiilor ecuațiilor penalizante pentru următoarea problema regulată, cu reflexie într-un domeniu non-convex:

$$(P_g) : \begin{cases} y'(t) + \partial^-\varphi(y(t)) \ni g(t), & \text{a.p.t. } t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \text{Dom}(\varphi), \end{cases}$$

unde H este un spațiu Hilbert, $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ este o funcție proprie, i.s.c., γ -semiconvexă de ordinul al doilea, $\partial^-\varphi$ fiind subdiferențiala Fréchet. Metoda de abordare a studiului este cea semigrupală, soluția problemei Cauchy aparținând spațiului $\mathcal{C}_{\varphi,g}[0, T]$ al funcțiilor absolut continue $y : [0, T] \rightarrow \text{Dom}(\varphi)$ ce verifică

$$\int_0^T [|y'(t)|^2 + |\varphi(y(t))|] dt < \infty \text{ și } \int_0^T \Gamma(t; y, g) dt < \infty,$$

unde $\Gamma(t; y, g) = \gamma(|y(t)| + \varphi^+(y(t)))(1 + (|y'(t)| + |g(t)|)^2)$.

Problema este analizată prin considerarea a cinci probleme intermediare:

- (a) unicitatea și proprietățile soluției problemei (P_g) ;
- (b) existența locală pentru problema (P_0) , atunci când $y_0 \in \text{Dom}(\partial^-\varphi)$;
- (c) existența unei soluții globale (existența pe intervalul $[0, T]$) pentru problema (P_0) , dacă $y_0 \in \text{Dom}(\partial^-\varphi)$;
- (d) existența unei soluții globale pentru problema (P_0) , atunci când $y_0 \in \text{Dom}(\varphi)$;
- (e) existența unei soluții globale pentru problema generală (P_g) , atunci când $y_0 \in \text{Dom}(\varphi)$.

Extinderea la situația inecuațiilor variaționale deterministe și stochastice cu perturbări multiplicative ale operatorului multivoc ar putea fi realizată prin utilizarea unei abordări semigrupale similare celei utilizate pentru problema (P_g) , dar de data aceasta prin introducerea unor *semigrupuri oblice de operatori*. Pentru aceasta, analiza calitativă detaliată a soluțiilor obținută anterior este un pas esențial.

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [19].

A doua direcție de cercetare* în cadrul acestui obiectiv este studiul existenței și unicității soluției pentru o problemă Skorohod generalizată de tipul

$$(33) \quad \begin{cases} dx(t) + \partial\varphi(x(t))dt + \partial_C\phi(x(t))dt + G(t, x(t))dt \ni dm(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \overline{D(\partial_C\phi)} \cap \overline{D(\varphi)}, \end{cases}$$

unde $\partial_C\phi$ este operatorul subdiferențial Clarke asociat funcției ϕ , $\partial\varphi$ este operatorul subdiferențial clasic asociat unei funcții convexe, proprii, i.s.c. φ , $G(t, x)$ este un operator multivoc dependent de timp și $m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ este o funcție continuă. Vom presupune că există constantele pozitive c și M a.î. $|\partial_C\phi(x)| \leq c(1 + |x|)$, pentru toți $x \in \mathbb{R}^d$ și $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq -M|x_1 - x_2|^2$, $\forall x_1, x_2, \forall y_1, y_2 \in \partial_C\phi(x_i)$. Funcția φ este convexă, proprie, i.s.c., cu $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi)) \neq \emptyset$, iar privitor la funcția G presupunem existența unei funcții $\eta \in L^1([0, T], \mathbb{R}^+)$ a.î. $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, T]$ și $u \in G(t, x), v \in G(t, y)$: $\langle v - u, y - x \rangle \geq -\eta(t)|x - y|^2$.

Definiție. Un triplet de funcții (x, j, l) este o soluție a incluziunii diferențiale guvernate de o subdiferențială Clarke (33) dacă $x, j, l : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ sunt continue și

$$\begin{cases} i) & x(t) \in \overline{D(\varphi)}, \forall t \geq 0, \\ ii) & j, l \in BV([0, T]; \mathbb{R}^d), \text{ cu } j(0) = l(0) = 0, \\ iii) & x(t) + j(t) + l(t) + \int_0^t \beta(s)ds = x_0 + m(t), \\ iv) & dj(t) \in \partial\varphi(x(t))dt, \quad dl(t) \in \partial_C\phi(x(t))dt \text{ și } \beta(t) \in G(t, x(t)). \end{cases}$$

Teoremă. În ipotezele menționate, există cel puțin o soluție (x, j, l) a ecuației multivoce (33). În plus, dacă $\mathcal{M}$ este o submulțime mărginită și echicontinuă a spațiului $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$, atunci există $C_{0, \mathcal{M}} > 0$ a.î.:

(a) Dacă $m \in \mathcal{M}$ și (x, j, l) este o soluție a ecuației (33) atunci

$$\|x\|_T^2 + \downarrow j \downarrow_T + \uparrow l \uparrow_T \leq C_{0, \mathcal{M}} (1 + |x_0|^2).$$

(b) Dacă $(x_1, j_1, l_1), (x_2, j_2, l_2)$ sunt două soluții, corespunzătoare funcțiilor m_1, m_2 și datelor inițiale $x_{1,0}, x_{2,0}$, atunci

$$\|x_1 - x_2\| \leq C_{0, \mathcal{M}} (1 + |x_{1,0}| + |x_{2,0}|) (|x_{1,0} - x_{2,0}| + \|m_1 - m_2\|)^{1/2}.$$

(c) Aplicația $(x_0, m) \rightarrow x : \overline{D(\varphi)} \times C([0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow C([0, T]; \overline{D(\varphi)})$ este continuă.

În ceea ce privește trecerea la cazul stochastic, considerăm ecuația

$$(34) \quad \begin{cases} dX_t + \partial\varphi(X_t)dt + \partial_C\phi(X_t)dt + G(t, X_t)dt \ni Q(t, X_t)dB_t, & t \in [0, T], \\ X_0 = \xi \in \overline{D(\varphi)}, \end{cases}$$

în condiții similare pentru funcțiile ϕ și G . Presupunem că $Q(., ., x) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$ este o funcție Carathéodory ce este Lipschitz în raport cu x și $\int_0^T |Q(t, 0)|^2 dt < \infty$, $\mathbb{P}$ -a.s.

Rezultatul principal al secțiunii este enunțat în continuare.

Teoremă. Fie $\xi \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \overline{D(\varphi)})$. Dacă $M \in S_d^0[0, T]$, $M_0 = 0$, atunci EDS multivocă

$$(35) \quad \begin{cases} dX_t + \partial\varphi(X_t)dt + \partial_C\phi(X_t)dt + G(t, X_t)dt \ni dM_t, & t \in [0, T], \\ X_0 = \xi. \end{cases}$$

admite o soluție unică $(X, J, K, \beta) \in S_d^0[0, T] \times S_d^0[0, T] \times S_d^0[0, T] \times L^p(\Omega; L^1([0, T]; \mathbb{R}^d))$. Dacă, în plus, M se poate reprezenta sub forma $M_t = \int_0^t Q_s dB_s$, și, dacă există $p \geq 2$, $u_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(\partial\varphi))$ a.î.

$$\mathbb{E}|\xi|^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T |\beta_{t, u_0}| dt\right)^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T |Q(t, u_0)|^2 dt\right)^{p/2} < +\infty, \text{ cu } \beta_{t, u_0} \in G(t, u_0),$$

atunci

$$(X, K, \beta) \in S_d^p[0, T] \times S_d^{p/2}[0, T] \cap L^{p/2}(\Omega; BV([0, T], \mathbb{R}^d)) \times L^p(\Omega; L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)).$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [7].

A treia direcție de cercetare* în cadrul acestui obiectiv constă în demonstrarea existenței și unicității soluției pentru IVS retrogradă cu subgradienți oblici:

$$(36) \quad \begin{cases} -dY_t + H(t, Y_t) \partial\varphi(Y_t)(dt) \ni F(t, Y_t, Z_t) dt - Z_t dB_t, & t \in [0, T], \\ Y_T = \eta. \end{cases}$$

Similar problemei progresive studiate în articolul [9], termenul $H(X)$ acționează pe mulțimea subgradienților, fapt ce va cauza o modificare a direcției procesului feedback. Si în această situație termenul $H(t, Y_t) \partial\varphi(Y_t)$ nu conservă nici proprietatea Lipschitz a matricei H nici maximala monotonie a operatorului multivoc $\partial\varphi$. Studiul va fi realizat prin considerarea a două probleme care, până la un punct vor beneficia de o abordare unitară. Pentru situația în care avem doar o dependență de timp pentru matricea H demonstrăm unicitatea și existența unei soluții tari pentru problema studiată (împreună cu existența unui subgradient feedback de tip absolut continuu); în cazul în care $H = H(t, y)$ vom utiliza criteriile de tightness pentru a obține o soluție slabă pentru ecuația (36).

Definiție. Dată $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ o bază stohastică fixată și o mișcare Browniană, spunem că tripletul (Y, Z, K) este o soluție tare pentru (36) dacă $(Y, Z, K) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times k} \times \mathbb{R}^d$ sunt p.s.p.m. și $\mathbb{P} - a.s.$,

$$\begin{cases} Y_t + \int_t^T H(s) dK_s = \eta + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, & \forall t \in [0, T], \\ dK_s \in \partial\varphi(Y_s)(ds). \end{cases}$$

Considerând matricea H ca depinzând și de starea sistemului, putem rescrie ecuația multivocă reflectată anterioară astfel

$$(37) \quad \begin{cases} Y_t + \int_t^T H(s, Y_s) dK_s = \eta + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - (M_T - M_t), & \forall t \in [0, T], \\ dK_s \in \partial\varphi(Y_s)(ds), & \mathbb{P} - a.s. \end{cases}$$

unde M este doar o martingală continuă. Introducem următoare definiție pentru noțiunea de soluție slabă a ecuației.

Definiție. Dacă există un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și (Y, M, K) a.î. M este o martingală continuă în raport cu filtrarea $\mathcal{F}_t^{Y, M} = \sigma(\{Y_s, M_s : 0 \leq s \leq t\}) \vee \mathcal{N}$, Y, K sunt p.s.p.m. càdlàg și are loc ecuația (37), atunci $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, Y_t, M_t, K_t)_{t \in [0, T]}$ reprezintă o soluție slabă pentru (36).

Notăm $\nu_t = \int_0^t L(s) [\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} |\eta|^p]^{1/p}$ și $\theta = \sup_{t \in [0, T]} (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} |\eta|^p)^{1/p}$ și formulăm în cele ce urmează rezultatele principale.

Teoremă. Fie $p > 1$. În ipoteze convenabil alese (condiții standard) pentru termenii ce apar în (36) cu $H(t, y) \equiv H(t)$, dacă în plus $\mathbb{E} e^{\delta\theta} + \mathbb{E} |\varphi(\eta)| < \infty$, pentru toți $\delta > 0$, atunci (36) admite o unică soluție tare $(Y, Z, K) \in S_d^0[0, T] \times \Lambda_{d \times k}^0(0, T) \times S_d^0[0, T]$ a.î., pentru toți $\delta > 0$,

$$(38) \quad \mathbb{E} \sup_{s \in [0, T]} e^{\delta p \nu_s} |Y_s|^p + \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{2\delta \nu_s} |Z_s|^2 ds \right)^{p/2} < \infty.$$

În plus, există o constantă pozitivă C , independentă de T , a.î., $\mathbb{P} - a.s.$, $|Y_t| \leq C \left(1 + [\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} |\eta|^p]^{1/p} \right)$, $\forall t \in [0, T]$, iar procesul K poate fi reprezentat prin $K_t = \int_0^t U_s ds$, unde

$$\mathbb{E} \int_0^T |U_t|^2 dt + \mathbb{E} \int_0^T |Z_t|^2 dt \leq C \left(\mathbb{E} |\eta|^2 + \mathbb{E} |\varphi(\eta)| + \mathbb{E} \int_0^T |F(t, 0, 0)|^2 dt \right).$$

Teoremă. În ipoteze similare celor din rezultatul precedent, ecuația (36) admite cel puțin o soluție slabă $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, B_t, Y_t, M_t, K_t)_{t \in [0, T]}$.

Remarcă. Importanța studierii noțiunii de soluție slabă este justificată de formula de reprezentare Feynman-Kač. Pentru $k = 1$, se poate demonstra fără dificultate că $u(t, x) = Y_t^{t, x}$ este o funcție continuă și reprezintă o soluție de vâscozitate pentru EDP parabolică semiliniară:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}_t u(t, x) + F(t, x, u(t, x)) \in H(t, u(t, x)) \partial\varphi(u(t, x)), \\ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \quad \text{și} \quad u(T, x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [8].

unde operatorul $\mathcal{A}_t$ este generatorul infinitesimal al procesului Markov $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ și este dat de

$$\mathcal{A}_t v(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\sigma \sigma^*)(t, x) D^2 v(x)] + \langle b(t, x), \nabla v(x) \rangle.$$

A patra direcție de cercetare* în cadrul acestui obiectiv are drept scop demonstrarea existenței și unicității soluției $(Y(t), Z(t))_{t \in [0, T]}$ pentru următoarea EDS retrogradă multivocă și cu generatori de tip *time-delayed*:

$$(39) \quad \begin{cases} -dY(t) + \partial \varphi(Y(t)) dt \ni F(t, Y(t), Z(t), Y_t, Z_t) dt + Z(t) dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ Y(T) = \xi. \end{cases}$$

unde generatorul F , la momentul $t \in [0, T]$, depinde și de valorile trecute ale soluției prin intermediul cantităților Y_t și Z_t definite de

$$(40) \quad Y_t := (Y(t + \theta))_{\theta \in [-T, 0]} \quad \text{și} \quad Z_t := (Z(t + \theta))_{\theta \in [-T, 0]}.$$

Menționăm că vom lua $Z(t) = 0$ și $Y(t) = Y(0)$ pentru orice $t < 0$.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ o bază stochastică și fie o mișcare Browniană standard în raport cu baza stochastică și $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$.

Impunem ipotezele standard de Lipschitzianitate ale lui F în raport cu y și z precum și

$$|F(t, y, z, y_t, z_t) - F(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{y}_t, \bar{z}_t)|^2 \leq \bar{L} \int_{-T}^0 |y(t + \theta) - \bar{y}(t + \theta)|^2 \alpha(d\theta) + \bar{L} \int_{-T}^0 |z(t + \theta) - \bar{z}(t + \theta)|^2 \alpha(d\theta)$$

și $\mathbb{E} \left[\int_0^T |F(t, 0, 0, 0, 0)|^2 dt \right] < \infty$. Data finală $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ este variabilă aleatoare $\mathcal{F}_T$ -măsurabilă a.î. $\mathbb{E}[|\xi|^2 + |\varphi(\xi)|] < \infty$.

Definiție. Tripletul (Y, Z, K) spunem că este o soluție a EDS (39) dacă

$$(41) \quad \begin{aligned} (i) \quad & (Y, Z, K) \in \mathbb{S}_T^2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^{d \times d'}) \times \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^d), \\ (ii) \quad & \mathbb{E} \left[\int_0^T \varphi(Y(t)) dt \right] < \infty, \\ (iii) \quad & (Y(t), K(t)) \in \partial \varphi, \quad \mathbb{P}(d\omega) \otimes dt, \text{ a.p.t. pe } \Omega \times [0, T], \\ (iv) \quad & Y(t) + \int_t^T K(s) ds = \xi + \int_t^T F(s, Y(s), Z(s), Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z(s) dW(s), \forall t \in [0, T], \text{ a.s.} \end{aligned}$$

În scopul obținerii unicității soluției furnizăm mai întâi estimări apriori ale soluției.

Propoziție. În ipotezele de mai sus, fie (Y, Z, K) , $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{K})$ două soluții pentru (39) corespunzătoare datelor (ξ, F) și $(\bar{\xi}, \bar{F})$. Dacă orizontul de timp T sau constanta Lipschitz $\bar{L}$ sunt suficient de mici atunci există anumite constante $C_1 = C_1(L) > 0$ și $C_2 = C_2(L) > 0$, independente de $\bar{L}$ și T , a.î.

$$\|Y - \bar{Y}\|_{\mathbb{S}_T^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|Z - \bar{Z}\|_{\mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^{d \times d'})}^2 \leq C_1 e^{C_2 T} \mathbb{E} \left[|\xi - \bar{\xi}|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |F(s, Y(s), Z(s), Y_s, Z_s) - \bar{F}(s, \bar{Y}(s), \bar{Z}(s), \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)|^2 ds \right].$$

Rezultatul principal al secțiunii este următorul:

Teoremă. În ipotezele de mai sus, dacă orizontul de timp T sau constanta Lipschitz $\bar{L}$ sunt suficient de mici atunci există o unică soluție (Y, Z, K) pentru (39).

Remarcă. Pentru a demonstra existența unei soluții pentru (39) este utilizată următoarea EDS aproximantă cu generatori de tip *time-delayed*:

$$Y^\varepsilon(t) + \int_t^T \nabla \varphi_\varepsilon(Y^\varepsilon(s)) ds = \xi + \int_t^T F(s, Y^\varepsilon(s), Z^\varepsilon(s), Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) ds - \int_t^T Z^\varepsilon(s) dW(s).$$

Obiectivul 4: Condiții necesare și suficiente de optimalitate pentru ecuații diferențiale stochastice cu reflexie generalizată

În cadrul acestui obiectiv o **direcție de cercetare**** constă în stabilirea condițiilor necesare de optimalitate sub forma principiului de maxim pentru controlul optimal u^* care minimizează o funcțională de cost. Considerăm următoarea IVS cu întârziere

$$(42) \quad \begin{cases} dX(t) + \partial \varphi(X(t)) dt \ni b(t, R(X)(t), u(t)) dt + \sigma(t, R(X)(t), u(t)) dW(t), & t \in [0, T], \\ X(t) = \xi(t), & t \in [-\delta, 0], \end{cases}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [4].

Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [6]. De asemenea, parte a acestui obiectiv a fost realizat și prin elaborarea articolului [5] (vezi **Obiectivul 7).

unde R este termenul de întârziere dat de $R(x)(t) := \int_{-\delta}^0 x(t+r)d\alpha(r)$ pentru $x \in C[-\delta, T]$ și $t \in [0, T]$.

Funcțiile măsurabile b, σ sunt Lipschitz; $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ este o funcție convexă i.s.c. cu $\text{int Dom } \varphi \neq \emptyset$; ξ satisface $\xi \in C[-\delta, 0]$ și $\xi(0) \in \overline{\text{Dom } \varphi}$.

Definiție. O pereche (X, K) de procese continue $\mathbb{F}$ -adaptate se numește soluție pentru (42) dacă au loc următoarele condiții $\mathbb{P}$ -a.s.: $\|K\|_{BV[0, T]} < \infty$; $K(t) = 0, \forall t \in [-\delta, 0]$; $X(t) = \xi(t), \forall t \in [-\delta, 0]$;

$$X(t) + K(t) = \xi(0) + \int_0^t b(s, R(X)(s), u(s))ds + \int_0^t \sigma(s, R(X)(s), u(s))dW(s), \quad \forall t \in [0, T];$$

și

$$\int_0^T (y(r) - X(r))dK(r) + \int_0^T \varphi(X(r))dr \leq \int_0^T \varphi(y(r))dr, \quad \forall y \in C[0, T].$$

Teoremă. Fie $p > 1$. Dacă ipotezele acestei secțiuni sunt satisfăcute, atunci pentru orice control u , ecuația (42) are o unică soluție (X^u, K^u) .

Definim derivata de ordinul al doilea a lui φ ca unica măsură σ -finită și pozitivă μ pe $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a.î.

$$\mu([a, a']) = \varphi'_+(a') - \varphi'_-(a), \text{ dacă } a \leq a'.$$

Asupra coeficienților ecuației de stare și funcționalei de cost impunem: b, g, σ și h sunt de clasă C^1 în $(y, u) \in \mathbb{R}^d \times U$ cu derivate uniform mărginite.

Ca și în cazul EDS, ecuația adjuncă asociată problemei de control optimal este o EDS retrogradă liniară. Introducem Hamiltonianul sistemului $H : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ prin $H(t, y, u, p, q) = g(t, y, u) + b(t, y, u)p + \langle \sigma(t, y, u), q \rangle$. Pentru orice control u , să considerăm următoarea EDSR de tip anticipativ, pe $[0, T]$:

$$(43) \quad \begin{cases} -dp(t) + p(t)dA^u(t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[F(t, R(X^u)(t), u(t), p(t), q(t))]dt - \langle q(t), dW(t) \rangle \\ p(T) = h'(X^u(T)), \end{cases}$$

unde

$$F(t, y, u, p, q) := \frac{\partial H}{\partial x}(t, y(t), p(t), q(t)) + \int_t^{t+\delta} \frac{\partial H}{\partial y}(s, y(s), u(s), p(s), q(s))\mathbf{1}_{[0, T]}(s)\lambda(t-ds)$$

Teoremă. Dacă u^* este un control optimal, atunci există un proces càdlàg și cu variație mărginită $(K(t))_{t \in [0, T]}$ a.î.

$$\left\langle p^*(t) \frac{\partial b}{\partial u}(t, R(X^*)(t), u^*(t)) + q^*(t) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, R(X^*)(t), u^*(t)) + \frac{\partial g}{\partial u}(t, R(X^*)(t), u^*(t)), v - u^*(t) \right\rangle \geq 0,$$

$\forall v \in U$, $dt dP$ a.p.t., unde $(p^*, q^*) \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega \times [0, T]) \times L^2_{\mathbb{F}}(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ este soluția ecuației

$$(44) \quad \begin{cases} -dp^*(t) = -dK(t) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[F(t, R(X^*)(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))]dt - \langle q^*(t), dW(t) \rangle \\ p^*(T) = h'(X^*(T)). \end{cases}$$

Tot în cadrul acestui obiectiv* s-a realizat obținerea unui criteriu algebric, ușor verificabil pentru nula controlabilitate aproximativă a unei clase de sisteme diferențiale liniare, cu zgomot multiplicativ. Articolul se bazează pe utilizarea unor rezultate recente [F. Confortola, M. Fuhrman, and J. Jacod., *BSDEs driven by a marked point process: an elementary approach, with an application to optimal control*, Annals of Applied Probability, 2015. arXiv:1407.0876], ce permit reducerea ecuației stochastice retrograde duale la o familie de ecuații diferențiale ordinare, iterate. Prin exemple, se arată că noțiunea de controlabilitate aproximativă este strict mai tare decât cea de nulă controlabilitate aproximativă. Este furnizat și un criteriu pentru verificarea primeia dintre ele.

Considerăm un sistem cu *switch* $(X(t), \Gamma(t))$, definit pe spațiul $\mathbb{R}^N \times E$, pentru $N \geq 1$ și familia finită de moduri E . Spațiul de definire a controalelor este presupus $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Studiemi următorul model (A este presupus a fi, implicit, 0 după primul salt):

$$(45) \quad \begin{cases} dX_s^{x, u} = [A(\Gamma_s) X_s^{x, u} + Bu_s] ds + \int_E C(\Gamma_{s-}, \theta) X_{s-}^{x, u} \tilde{q}(ds, d\theta), \quad s \geq 0, \\ X_0^{x, u} = x, \end{cases}$$

unde $A(\gamma) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times d}$ și $C(\gamma, \theta) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (ker este nucleul său, iar Im spațiul imagine). Procesul de control $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ este $\mathbb{F}^0$ -progresiv măsurabil, de pătrat local integrabil.

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [10].

Construim ecuația diferențială stochastică (duală, liniară) retrogradă

$$(46) \quad \begin{cases} dY_t^{T,\xi} = \left[-A^*(\Gamma_t) Y_t^{T,\xi} - \int_E (C^*(\Gamma_t, \theta) + I) Z_t^{T,\xi}(\theta) \lambda(\Gamma_t) Q(\Gamma_t, d\theta) \right] dt \\ \quad + \int_E Z_t^{T,\xi}(\theta) q(dt, d\theta), \quad Y_T^{T,\xi} = \xi \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{[0,T]}, \mathbb{P}^{0,\gamma_0}; \mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Definiție. Date un operator liniar $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ și o familie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{1 \leq i \leq k} \subset \mathbb{R}^{N \times N}$, spunem că

- (i) O mulțime $V \subset \mathbb{R}^N$ este $\mathcal{A}$ -invariantă dacă $\mathcal{A}V \subset V$.
- (ii) O mulțime $V \subset \mathbb{R}^N$ este $(\mathcal{A}; \mathcal{C})$ -invariantă dacă $\mathcal{A}V \subset V + \sum_{i=1}^k \text{Im } \mathcal{C}_i$.

Generăm o familie de subspații liniare ale lui $\mathbb{R}^N$, $(V_\gamma^{M,n})_{0 \leq n \leq M, \gamma \in E}$, indexate în raport cu modul, astfel. Definim

$$(47) \quad \mathcal{A}^*(\gamma) := A^*(\gamma) - \int_E (C^*(\gamma, \theta) + I) \lambda(\gamma) Q(\gamma, d\theta) \quad \text{și} \quad V_\gamma^{M,M} = \ker B^*,$$

pentru toți $\gamma \in E$, și construim, pentru toți $0 \leq n \leq M-1$,

$$(48) \quad \left| V_\gamma^{M,n} \text{ ca fiind cel mai mare subspațiu al lui } \ker B^*, \right. \\ \left. \left(\mathcal{A}^*(\gamma); \left[(C^*(\gamma, \theta) + I) \Pi_{V_\theta^{M,n+1}} : \theta \in E, Q(\gamma, \theta) > 0 \right] \right) - \text{invariant.} \right.$$

Π_V reprezintă proiecția ortogonală pe subspațiul liniar $V \subset \mathbb{R}^N$.

Rezultatul principal este următorul.

Teoremă. Sistemul cu switch (45) este aproximativ nul-controlabil (până la momentul $T > 0$), având pe γ_0 drept modul inițial, dacă și numai dacă subspațiul generat $V_{\gamma_0}^0$ se reduce la $\{0\}$.

Observație. Folosind tehnici de tip Riccati pentru sisteme guvernate de procese Poisson, cu coeficienți independenți de mod, se arată că noțiunile de controlabilitate aproximativă și cea de nulă-controlabilitate aproximativă coincid. În cazul de față, al sistemelor pentru care coeficienții depind de mod, cele două noțiuni nu se mai suprapun, fapt ce este reliefat printr-un exemplu.

Obiectivul 5: Inecuații variaționale stochastice dirijate de termeni negaussieni

În cadrul acestui obiectiv*** o primă direcție de cercetare este dată de studiul, în prealabil, al ecuațiilor diferențiale stochastice cu zgomot aditiv sau, într-o formă mai generală, a unei probleme Skorohod de tip cădlăg. Mai precis, avem în vedere studiul, într-un cadru infinit dimensional, al existenței și unicității soluției pentru următoarea ecuație diferențială cu input singular:

$$(49) \quad \begin{cases} dx_t + A(x_t)(dt) + dk_t^d \ni dm_t, \quad t \geq 0, \\ x_0 = m_0, \end{cases}$$

unde $A : \mathbb{H} \rightrightarrows \mathbb{H}$ este un operator multivoc și maximal monoton pe spațiul Hilbert real și separabil $\mathbb{H}$ astfel încât $\text{Int}(\overline{D(A)}) \neq \emptyset$ și m este o funcție cădlăg.

Fie $\Pi : \mathbb{H} \rightarrow \overline{D(A)}$ o proiecție de tip generalizat pe domeniul $\overline{D(A)}$, adică, prin definiție, $\Pi(\mathbb{H}) \subset \overline{D(A)}$ și $\Pi(x) = x, \forall x \in \overline{D(A)}$ și că $|\Pi(x) - \Pi(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{H}$ (i.e. Π este neexpansivă). Precizăm că proiecția ortogonală clasică $\Pi_{\overline{D(A)}} : \mathbb{H} \rightarrow \overline{D(A)}$, dată de $|x - \Pi_{\overline{D(A)}}(x)| = \inf_{a \in \overline{D(A)}} |x - a|$ este o proiecție generalizată pe $\overline{D(A)}$.

Un alt exemplu important de proiecție generalizată pe $\overline{D(A)}$ este conectat cu așa numita condiție de elasticitate: fie $\delta \in [0, 1]$, considerăm $\Pi^\delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dată de

$$\Pi^\delta(z) := \Pi_{\overline{D(A)}}(z) - \delta(z - \Pi_{\overline{D(A)}}(z)), \quad z \in \mathbb{H}$$

și compunerea $\Pi^{\delta,n} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definită de $\Pi^{\delta,n}(z) := \Pi_n \circ \dots \circ \Pi_1(z), \forall z \in \mathbb{H}$, unde $\Pi_1 = \dots = \Pi_n = \Pi^\delta$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Se arată că pentru orice $z \in \mathbb{H}$, există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{\delta,n}(z)$ și $\Pi_{\overline{D(A)}}^\delta(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{\delta,n}(z)$ este o proiecție generalizată pe $\overline{D(A)}$.

Prin definiție, soluția problemei Skorohod (49) satisface $x_t = \Pi(x_{t-} + \Delta m_t)$, dacă $x_{t-} + \Delta m_t \notin \overline{D(A)}$ și k^d este funcția de salturi astfel încât $\Delta k_t^d = \Delta m_t - \Delta x_t$ (unde notația Δ desemnează saltul funcției). Precizăm

* Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [14].

că proiecția generalizată Π asigură că saltul funcției de la x_{t-} la $x_{t-} + \Delta m_t$ sunt anulate ori de câte ori aceste salturi părăsesc domeniul.

Prin soluție a problemei (49) înțelegem o pereche (x, k) de funcții càdlàg astfel încât $x_t + k_t = m_t$, $t \geq 0$, $x_t \in \overline{D(A)}$, $t \geq 0$, $k = k^c + k^d$ are variație local mărginită (k^c este partea continuă), $dk_t^c \in A(x_t)(dt)$ și

$$k_t^d = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta k_s = \sum_{0 \leq s \leq t} (I - \Pi)(x_{s-} + \Delta m_s).$$

În cazul particular al proiecției ortogonale, ecuația (49) devine

$$(50) \quad \begin{cases} x_t + k_t = m_t, & t \geq 0, \\ dk_t \in A(x_t)(dt). \end{cases}$$

În cazul în care input-ul m este regulat, ecuația (50) a fost studiată intens în cadrul analizei neliniare.

Forme particulare ale ecuației (49) au fost studiate dar doar în cazul proceselor cu traiectorie continuă.

Se știe că dacă $\bar{D} \subset \mathbb{R}^d$ este o mulțime convexă și închisă, atunci funcția sa indicatoare $\varphi(x) = I_{\bar{D}}(x) := 0$, dacă $x \in \bar{D}$ și $+\infty$, dacă $x \notin \bar{D}$, este o funcție convexă și inferior semi-continuă. Aceasta implică că ecuațiile deterministe cu condiții reflectate la frontiera unui domeniu convex sunt cazuri particulare ale ecuației (49) avută în vedere de studiul nostru.

Precizăm că aproximări ale problemei Skorohod au fost considerate în cazul càdlàg de către Łaukajtsys și Słomiński în 2013, în care este utilizată proiecția ortogonală clasică. Problema Skorohod cu salturi și cu bariere dependente de timp a fost tratată de către Słomiński și Wojciechowski în 2010.

Rezultatele din lucrarea noastră asupra ecuațiilor deterministe multivoce și cu salturi sunt noi chiar și în cazul proiecției ortogonale clasice.

Foarte importante sunt aplicațiile problemei avute în vedere în studiul ecuațiilor stochastice cu reflexie, în care dm_t este văzut ca un zgomot aleator pe sistem.

Pentru a arăta existența și unicitatea vom furniza și câteva rezultate de convergență în tologia Skorokhod J_1 . În ceea ce privește aproximarea Yosida a soluției, considerăm mai întâi ecuația aproximantă

$$x_t^\varepsilon + \int_0^t A_\varepsilon(x_s^\varepsilon) ds = m_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

unde aproximanta $A_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}(z - J_\varepsilon(z))$ și $J_\varepsilon(z) = (I + \varepsilon A)^{-1}(z)$. Se va arăta că

$$x_t^\varepsilon \rightarrow x_t \mathbf{1}_{|\Delta m_t|=0} + (x_{t-} + \Delta m_t) \mathbf{1}_{|\Delta m_t|>0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \text{ pentru } \varepsilon \searrow 0,$$

unde x este soluția pentru (49) asociată proiecției clasice.

Dacă considerăm ecuația aproximantă de tipul

$$x_t^\varepsilon + \int_0^t A_\varepsilon(x_s^\varepsilon) ds + \sum_{0 \leq s \leq t} (I - \Pi)(x_{s-}^\varepsilon + \Delta m_s) \mathbf{1}_{|\Delta m_s|>\varepsilon} = m_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

atunci se va demonstra că x^ε este uniform convergentă, pe orice interval compact, chiar la soluția problemei (49).

Obiectivul 6: Ecuații cu derivate parțiale asociate sistemelor diferențiale stochastice cu restricții pe stare; sisteme de inecuatii variationale parabolice via formule Feynman-Kac

În cadrul acestui obiectiv* s-a obținut, pentru început, reprezentarea probabilistă (prin demonstrarea unei formulei neliniare Feynman-Kac de reprezentare) a soluției de vâscoșitate pentru următoarea ecuație Kolmogorov neliniară cu dependență de traiectorie (numită și ecuație diferențială funcțională de tip parabolic):

$$(PDKE) \quad \begin{cases} -\partial_t u(t, \phi) - f(t, \phi, u(t, \phi), \partial_x u(t, \phi) \sigma(t, \phi), (u(\cdot, \phi))_t) \\ \quad \quad \quad - \mathcal{L}u(t, \phi) = 0, & t \in [0, T], \phi \in \Lambda, \\ u(T, \phi) = h(\phi), & \phi \in \Lambda, \end{cases}$$

unde $\Lambda := \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^d)$,

$$(u(\cdot, \phi))_t := (u(t + \theta, \phi))_{\theta \in [-\delta, 0]}, \quad \text{cu } \delta \geq 0,$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [3].

și $\mathcal{L}$ este un operator diferențial de ordinul al doilea dat de

$$\mathcal{L}u(t, \phi) := \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma(t, \phi)\sigma^*(t, \phi)\partial_{xx}^2 u(t, \phi)] + \langle b(t, \phi), \partial_x u(t, \phi) \rangle,$$

cu $b : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ și $\sigma : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d'}$ două funcționale non-anticipative.

În continuarea acestei probleme se va încerca obținerea, tot prin metode probabiliste, a existenței soluției de vâscoșitate pentru o ecuație deterministă de tipul (PDKE) de tip multivoc (cu restricție asupra lui u dată de apariția subdiferențialei unei funcții convexe).

Demonstrăm că funcționala deterministă și non-anticipativă $u : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $u(t, \phi) := Y^{t, \phi}(t)$, este soluție de vâscoșitate pentru (PDKE), unde $(X^{t, \phi}(s), Y^{t, \phi}(s), Z^{t, \phi}(s))_{s \in [t, T]}$ este unica soluție pentru sistemul decuplat progresiv-retrograd de ecuații diferențiale stochastice (EDS):

$$(51) \quad \begin{cases} X^{t, \phi}(s) = \phi(t) + \int_t^s b(r, X^{t, \phi})dr + \int_t^s \sigma(r, X^{t, \phi})dW(r), & s \in [t, T], \\ X^{t, \phi}(s) = \phi(s), & s \in [0, t), \\ Y^{t, \phi}(s) = h(X^{t, \phi}) + \int_s^T F(r, X^{t, \phi}, Y^{t, \phi}(r), Z^{t, \phi}(r), Y_r^{t, \phi}, Z_r^{t, \phi})dr \\ \quad - \int_s^T Z^{t, \phi}(r) dW(r), & s \in [t, T], \\ Y^{t, \phi}(s) = Y^{s, \phi}(s), \quad Z^{t, \phi}(s) = Z^{s, \phi}(s), & s \in [0, t). \end{cases}$$

cu $(t, \phi) \in [0, T] \times \Lambda$.

Notăția $Y_r^{t, \phi}$ reprezintă traiectoria procesului $Y^{t, \phi}$ restricționată la $[r - \delta, r]$, $Y_r^{t, \phi} := (Y^{t, \phi}(r + \theta))_{\theta \in [-\delta, 0]}$.

Menționăm că, mai sus, EDS progresivă este una funcțională, în timp ce EDS retrogradă are generatori cu întârziere (i.e. generatorul f poate depinde și de valorile trecute ale lui $Y^{t, \phi}$).

Având în vedere cadrul de lucru pentru ecuația (PDKE), menționăm că trebuie să facem apel la calculul Itô de tip funcțional (vezi [Cont, Fournié, Ann. Probab., 2013]).

Fie $b : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ și $\sigma : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d'}$ două funcționale non-anticipative astfel încât sunt continue și Lipschitz în raport cu al doilea argument. De asemenea, impunem și asupra funcțiilor $F : [0, T] \times \Lambda \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d'} \times L^2([-\delta, 0]; \mathbb{R}^m) \times L^2([-\delta, 0]; \mathbb{R}^{m \times d'}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ anumite condiții (continuitate, lipschitzianitate în raport cu al doilea și al treilea argument, precum și condiția specifică EDS retrograde cu întârziere:

$$(52) \quad |F(t, \phi, y, z, \hat{y}, \hat{z}) - F(t, \phi, y, z, \hat{y}', \hat{z}')|^2 \leq K \int_{-\delta}^0 (|\hat{y}(\theta) - \hat{y}'(\theta)|^2 + |\hat{z}(\theta) - \hat{z}'(\theta)|^2) \alpha(d\theta),$$

pentru orice $\hat{y}, \hat{y}' \in L^2([-\delta, 0]; \mathbb{R}^m)$, $\hat{z}, \hat{z}' \in L^2([-\delta, 0]; \mathbb{R}^{m \times d'})$ (α este o măsură de probabilitate pe $[-\delta, 0]$).

Primul rezultat important al lucrării este următorul:

Teoremă. În ipotezele de mai sus, dacă în plus coeficientul de lipschitzianitate K sau coeficientul de întârziere δ sunt suficient de mici, atunci există o unică soluție $(X^{t, \phi}, Y^{t, \phi}, Z^{t, \phi})_{(t, \phi) \in [0, T] \times \Lambda}$ a sistemului (51) astfel încât $(X^{t, \phi}, Y^{t, \phi}, Z^{t, \phi}) \in \Lambda \times \mathcal{S}_t^{2, m} \times \mathcal{H}_t^{2, m \times d'}$, pentru orice $t \in [0, T]$ și $t \mapsto (Y^{t, \phi}, Z^{t, \phi})$ este continuă de la $[0, T]$ la $\mathcal{S}_0^{2, m} \times \mathcal{H}_0^{2, m \times d'}$ (am notat prin $\mathcal{H}_t^{2, m}$ și $\mathcal{S}_t^{2, m}$ spațiile proceselor stochastice progresiv măsurabile $Y : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât $\mathbb{E} \left[\int_0^T |Y(s)|^2 ds \right] < \infty$ și respectiv $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^2 \right] < \infty$).

Diferența esențială între demonstrația teoremei de mai sus și rezultatele similare precedente (Theorem 2.1 din [Delong, Imkeller, 2010]) constă în condiția suplimentară $Y^{t, \phi}(s) = Y^{s, \phi}(s)$, pentru orice $s \in [0, t)$, care trebuie satisfăcută de soluția $Y^{t, \phi}$. Această condiție este esențială în scopul obținerii reprezentării de tip Feynman-Kac a soluției unei EDP de tip funcțional. Aceasta este dată de următorul rezultat.

Teoremă. În ipotezele de mai sus, dacă în plus coeficientul de lipschitzianitate K sau coeficientul de întârziere δ sunt suficient de mici, atunci există o funcțională non-anticipativă $u : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât u este continuă și

$$Y^{t, \phi}(s) = u(s, X^{t, \phi}), \quad s \in [0, T], \quad d\mathbb{P} \otimes ds\text{-a.s.},$$

pentru orice $(t, \phi) \in [0, T] \times \Lambda$.

Rezultatul principal al lucrării este următoarea teoremă.

Teoremă. În ipotezele de mai sus, dacă în plus coeficientul de lipschitzianitate K sau coeficientul de întârziere δ sau T sunt suficient de mici, atunci ecuația Kolmogorov neliniară cu dependență de traiectorie (PDKE) admite cel puțin o soluție de vâscozitate.

O a doua direcție de cercetare avută în vedere în cadrul acestui obiectiv* este dată de rezolvarea problemei continuității funcției, dată de formula de reprezentare Feynman–Kac,

$$(t, x) \longmapsto u(t, x) := Y_t^{t,x},$$

problema rămasă nerezolvată (dar esențială !) în studiul soluțiilor de vâscozitate pentru inecuații variaționale de tip parabolic, cu condiții la frontiera neliniare multivoce de tip Neumann–Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \mathcal{L}_t u(t, x) + \partial \varphi(u(t, x)) \ni f(t, x, u(t, x)), & t > 0, x \in \mathcal{D}, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} + \partial \psi(u(t, x)) \ni g(t, x, u(t, x)), & t > 0, x \in \text{Bd}(\mathcal{D}), \end{cases}$$

cu $u(0, x) = h(x)$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$.

Soluția de vâscozitate u a acestei probleme este dată de o formula de reprezentare probabilistică de tip Feynman–Kac, $u(t, x) := Y_t^{t,x}$, unde $Y^{t,x}$ este soluția următoarei ecuației diferențiale stochastice retrograde:

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} + \int_s^T U_r^{t,x} dr + \int_s^T V_r^{t,x} dA_r^{t,x} &= h(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}) dr \\ &+ \int_s^T g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}) dA_r^{t,x} - (M_T^{t,x} - M_s^{t,x}), \quad \text{pentru orice } s \in [t, T] \text{ a.s.} \end{aligned}$$

cu $M_s^{t,x} := \int_0^s \hat{Z}_r^{t,x} dM_r^{X^{t,x}}$ și cu $U_s^{t,x} \in \partial \varphi(Y_s^{t,x})$, $\mathbb{P}(d\omega) \otimes dt$, $V_s^{t,x} \in \partial \psi(Y_s^{t,x})$, $\mathbb{P}(d\omega) \otimes A(\omega, dt)$, a.p.t., iar $(X_s^{t,x}, A_s^{t,x})_{s \in [t, T]}$ este soluția unei ecuații diferențiale stochastice reflectate.

Continuitatea aplicației $(t, x) \longmapsto Y_t^{t,x}$ a fost un ingredient important (dar rămas nerezolvat) într-o serie întreagă de articole precedente: [Pardoux, Zhang/Probab. Theory Rel. Fields, 1998], [Ren, Xia/Stoch. Anal. Appl., 2006], [Boufoussi, et al./Bernoulli, 2007], [Diakhaby, Ouknine/Stoch. Anal. Appl., 2010], [Ran, Zhang/J. Theoret. Probab., 2010], [Ren, El Otmani/J. Comput. Appl. Math., 2010] și [Aman, Mrhardy/Stat. Probab. Letters, 2013].

Ideea esențială din articol care a stat la baza abordării noastre a fost să arătăm că șirul $\{Y_n^{t_n, x_n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ este tight pe spațiul Skorohod $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R})$ al funcțiilor cădlăg $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ inzestrat cu S-topologia introdusă de Jakubowski în 1997. Utilizarea S-topologiei a fost necesară pentru obținerea unui rezultat de tip Helly–Bray, esențial în cadrul problemei noastre, de trecere la limită în integrale de forma $\int_s^T g_n(r, X_r^{t_n, x_n}, Y_r^{t_n, x_n}) dA_r^{t_n, x_n}$.

În ceea ce privește articolul [18], tehnica abordată este diferită.

Tot în cadrul acestui obiectiv (dar și, suplimentar, în cadrul obiectivelor anterioare ale proiectului, de exemplu, Obiectivul 3: Existența și unicitatea soluțiilor EDS cu reflexie generalizată)** s-a demarat studiul unui nou tip de EDS retrograde: anticipate și cu reflexie generalizată. Ulterior, soluția acestui tip de ecuație stohastică va fi folosită pentru demonstrarea unei formule de tip Feynman–Kac pentru reprezentarea soluției unui nou tip de EDP (corespunzătoare EDS retrograde anticipate).

Mai precis, s-a considerat o EDS retrogradă în care informațiile furnizate de către filtrarea naturală sunt produse și de către valorile viitoare ale sistemului, nu doar de cele prezente. Studiul acestor incluziuni diferențiale stochastice este motivat de rezultate recente ce oferă o corespondență între EDS retrograde anticipate și probleme de control pentru EDS progresive, cu întârziere.

Ecuația retrogradă avută în vedere este anticipată și de tip multivoc (datorită apariției subdiferențialei unei funcții convexe) cu subgradienți perturbați de un termen dependent de timp:

$$(53) \quad \begin{cases} -dY_t + H(t) \partial \varphi(Y_t)(dt) \ni f(t, Y_t, Z_t, Y_{t+\delta(t)}, Z_{t+\eta(t)})dt - Z_t dB_t, & t \in [0, T] \\ Y_t = \xi_t, Z_t = \zeta_t, & t \in [T, T + \ell], \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{cases}$$

Definiție. Spunem că tripletul (Y, Z, U) este o soluție pentru (53) dacă

$$\begin{cases} Y_t + \int_t^T H(s) U_s ds = \xi_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, Y_{s+\delta(s)}, Z_{s+\eta(s)}) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \\ U_t \in \partial \varphi(Y_t), \quad t \in [0, T], \quad Y_t = \xi_t, \quad Z_t = \zeta_t, \quad t \in [T, T + \ell]. \end{cases}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [13] precum și a a lucrării [18].

**Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [16].

În plus față de ipotezele standard sunt ipotezele specifice:

Funcțiile $\delta, \eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sunt continue, există o constantă $\ell \geq 0$ a.î., pentru toți $t \in [0, T]$, $t + \delta(t) \leq T + \ell$, $t + \eta(t) \leq T + \ell$ și există $L_1 \geq 0$ a.î., pentru toți $t \in [0, T]$ și pentru orice funcție integrabilă, non-negativă, g are loc

$$\int_t^T g(s + \delta(s)) ds \leq L_1 \int_t^{T+\ell} g(s) ds, \quad \int_t^T g(s + \eta(s)) ds \leq L_1 \int_t^{T+\ell} g(s) ds.$$

Pentru toți $s \in [0, T]$,

$$f(\omega, s, y, z, u, v) : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times k} \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_r, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_{r'}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^{d \times k}) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d),$$

unde $r, r' \in [s, T + \ell]$ și există $L_2, L_3 \geq 0$ a.î., pentru toți $s \in [0, T]$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^{d \times k}$, $u, u' \in S_d^2[s, T + \ell]$, $v, v' \in \Lambda_{d \times k}^2(s, T + \ell)$, $r, \bar{r} \in [s, T + \ell]$, avem, $d\mathbb{P} \otimes ds$ -a.e.

$$\begin{aligned} |f(s, y, z, u_r, v_{\bar{r}}) - f(s, y, z, u'_r, v_{\bar{r}})| &\leq L_2 \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(|u_r - u'_r|), \\ |f(s, y, z, u_r, v_{\bar{r}}) - f(s, y, z, u_r, v'_{\bar{r}})| &\leq L_3 \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(|v_{\bar{r}} - v'_{\bar{r}}|). \end{aligned}$$

Remarcă. Un exemplu de funcție ce satisface ipoteza de mai sus: $f(s, u_{s+\delta}, v_{s+\eta}) := g(s, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(u_{s+\delta}), \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(v_{s+\eta}))$, unde $g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbb{R}^d$ este Lipschitz în raport cu (y, z) .

Rezultatul principal este următorul.

Teoremă. În ipoteze convenabile impuse coeficienților ecuației multivoce, există o soluție unică (Y, Z, U) pentru (53), a.î., $\mathbb{P}$ -a.s., pentru toți $t \in [0, T]$,

$$(54) \quad \begin{cases} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \sup_{s \in [t, T]} e^{\beta s} |Y_s|^2 + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \int_t^T e^{\beta r} |U_r|^2 dr + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \int_t^T e^{\beta r} |Z_r|^2 dr \leq C \cdot \Theta_1, \text{ unde} \\ \Theta_1 := \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left(e^{\beta T} |\xi_T|^2 + e^{\beta T} \varphi(\xi_T) + \int_t^T e^{\beta r} |\rho(r)|^2 dr + \int_T^{T+\ell} e^{\beta r} |\zeta_r|^2 dr + \int_T^{T+\ell} e^{\beta r} |\xi_r|^2 dr \right). \end{cases}$$

Demonstrația este bazată pe ecuația anticipată aproximantă (și univocă):

$$\begin{aligned} Y_t^\epsilon + \int_t^T H(s) \nabla \varphi_\epsilon(Y_s^\epsilon) ds &= \xi_T + \int_t^T f(s, Y_s^\epsilon, Z_s^\epsilon, Y_{s+\delta(s)}^\epsilon, Z_{s+\eta(t)}^\epsilon) ds - \int_t^T Z_s^\epsilon dB_s, \quad t \leq T, \\ Y_t^\epsilon &= \xi_t, \quad Z_t^\epsilon = \zeta_t, \quad t \in [T, T + \ell], \end{aligned}$$

ecuație ce admite o soluție unică $(Y^\epsilon, Z^\epsilon) \in S_d^2[0, T + \ell] \times \Lambda_{d \times k}^2(0, T + \ell)$.

Sunt obținute estimări ale soluției ecuației aproximante și se arată că șirul soluțiilor este șir Cauchy; apoi se trece la limită pentru a obține soluția ecuației anticipate considerate.

S-a obținut și un rezultat ce arată efectul timpului anticipat asupra componentei Y a soluției.

Teoremă. Fie timpii anticipați $\delta, \delta' : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$, ce satisfac condițiile ce asigură existența și unicitatea soluției pentru ecuația considerată. Fie (Y, Z, U) și (Y', Z', U') soluțiile ecuației (53), corespunzătoare lui δ și, respectiv, δ' , f fiind independent de $Z_{t+\eta(t)}$. Dacă $\delta(t) \leq \delta'(t)$, pentru toți $t \in [0, T]$, atunci există $C > 0$ a.î.

$$|Y_t - Y'_t|^2 \leq C \int_t^T (\delta'(s) - \delta(s)) ds \cdot \Theta_2,$$

$$\text{unde } \Theta_2 := \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left(e^{\beta T} |\xi_T|^2 + e^{\beta T} \varphi(\xi_T) + \int_t^T e^{\beta r} |\rho(r)|^2 dr + \int_T^{T+\ell} e^{\beta r} |\xi_r|^2 dr \right).$$

Obiectivul 7: Ecuații cu derivate parțiale asociate sistemelor diferențiale stochastice cu restricții pe stare*; ecuații HJB multivoce asociate ecuațiilor diferențiale stochastice cu reflexie generalizată.

În cadrul acestui obiectiv** sunt investigate, mai întâi, probleme de control optimal asociate, în principal, EDS

$$(55) \quad \begin{cases} dX(t) + \partial \varphi(X(t)) dt \ni b(t, X(t), \Theta(t), \Pi(t)) dt + \sigma(t, X(t), \Theta(t), \Pi(t)) dW(t), \quad t \in (0, T], \\ X(t) = \xi(t), \quad t \in [s - \delta, s] \end{cases}$$

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt realizate și prin elaborarea lucrărilor [1, 3, 13, 18].

**Rezultatele din cadrul acestor obiective sunt parte a lucrării [5].

unde $\Theta(t) := \int_{-\delta}^0 e^{\lambda r} X(t+r) dr = e^{-\lambda t} \int_{t-\delta}^t e^{\lambda s} X(s) ds$, $\Pi(t) := X(t-\delta)$ cu $\delta \geq 0$ o întârziere fixă, $\lambda \in \mathbb{R}$ și $\xi \in C([- \delta, 0]; \overline{\text{Dom}(\varphi)})$ arbitrar fixat. Fie $s \in [0, T)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s}, \mathbb{P})$ o bază stochastică. Impunem ipoteze standard asupra coeficienților (Lipschitzianitate pentru b, σ), $\text{Int}(\text{Dom}(\varphi)) \neq \emptyset$ și $\xi \in L^2(\Omega; C([- \delta, 0]; \overline{\text{Dom}(\varphi)}))$. **Definiție.** O pereche de p.s.p.m. continue $(X, K) : \Omega \times [s - \delta, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ este soluție pentru (55) dacă $X \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([s - \delta, T]; \mathbb{R}^d))$, $X(t) \in \overline{\text{Dom}(\varphi)}$, a.p.t. $t \in [s - \delta, T]$, $\mathbb{P}$ -a.s., $K \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([s, T]; \mathbb{R}^d)) \cap L^1(\Omega; \text{BV}([s, T]; \mathbb{R}^d))$, $X(t) = \xi(t - s)$, $\forall t \in [s - \delta, s]$ și

$$(56) \quad \begin{cases} X(t) + K(t) = X(s) + \int_s^t b(r, X(r), \Theta(r), \Pi(r)) dr + \int_s^t \sigma(r, X(r), \Theta(r), \Pi(r)) dW(r), \quad \forall t \in (s, T], \mathbb{P}\text{-a.s.} \\ \int_t^{\hat{t}} \langle u - X(r), dK(r) \rangle + \int_t^{\hat{t}} \varphi(X(r)) dr \leq (\hat{t} - t)\varphi(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, \forall 0 \leq t \leq \hat{t} \leq T, \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{cases}$$

Primul rezultat principal este cel de existență a soluției:

Teoremă. În ipotezele de mai sus EDS (55) are o unică soluție. În plus, există o constantă $C = C(\ell, \kappa, \delta, T) > 0$ a.î.

$$\mathbb{E} \sup_{r \in [s, T]} |X(r)|^2 + \mathbb{E} \sup_{r \in [s, T]} |K(r)|^2 + \mathbb{E} \|K\|_{\text{BV}([-\delta, T]; \mathbb{R}^d)} + \mathbb{E} \int_s^T \varphi(X(r)) dr \leq C(1 + \mathbb{E} \|\xi\|_{[-\delta, 0]}^2)$$

În continuare vom demonstra că funcția valoare satisface principiul programării dinamice (PPD) și că este soluție de vâscozitate a unei ecuații cu derivate parțiale de tip Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Menționăm că în cazul nostru problema de control optimal stochastic asociată unui sistem cu întârziere este dificil de tratat având în vedere că spațiul datelor inițiale este infinit dimensional. Totuși se poate ca alegând o structură specifică de dependență de trecut, problema de control pentru sistemele cu întârziere să fie redusă la o problemă finit dimensională.

Clasa $\mathcal{U}[s, T]$ de strategii de controale admisibile este definită standard ; procesul de control $u : \Omega \times [s, T] \rightarrow U$ este $\mathbb{F}$ -adaptat a.î.

$$\mathbb{E} \left[\int_s^T |f(t, X(t), \Theta(t), u(t))| dt + |h(X(T), \Theta(T))| \right] < \infty.$$

Considerăm următorul sistem stochastic controlat de tipul (55) și funcționala de cost

$$(57) \quad J(s, \xi; u) = \mathbb{E} \left[\int_s^T f(t, X^{s, \xi, u}(t), \Theta^{s, \xi, u}(t), u(t)) dt + h(X^{s, \xi, u}(T), \Theta^{s, \xi, u}(T)) \right].$$

Definim funcția valoare asociată:

$$(58) \quad V(s, \xi) = \inf_{u \in \mathcal{U}[s, T]} J(s, \xi; u), \quad (s, \xi) \in [0, T) \times C([- \delta, 0]; \overline{\text{Dom}(\varphi)}).$$

Teoremă. În ipotezele de mai sus, pentru orice (s, ξ) și $u \in \mathcal{U}[s, T]$ există o unică pereche $(X, K) = (X^{s, \xi, u}, K^{s, \xi, u})$ care este soluție a IVS controlate și cu întârziere de tipul (55).

Funcționala de cost și funcția valoare vor fi bine definite dacă f și h sunt continue și cu creștere polinomială.

Propoziție. Există $C > 0$ a.î. $\forall (s, \xi), (s', \xi'), |V(s, \xi)| \leq C[1 + \|\xi\|_{[-\delta, 0]}^p]$,

$$(59) \quad |V(s, \xi) - V(s', \xi')| \leq C \mu_{f, h}(\gamma, M) + C[1 + \|\xi\|_{[-\delta, 0]}^p + \|\xi'\|_{[-\delta, 0]}^p] \cdot \left[\frac{\Gamma_1^{1/2} + |s - s'|^{1/2} (1 + \|\xi\|_{[-\delta, 0]} + \|\xi'\|_{[-\delta, 0]})}{\gamma} + \frac{1 + \|\xi\|_{[-\delta, 0]} + \|\xi'\|_{[-\delta, 0]}}{M} \right],$$

unde $\mu_{f, h}(\gamma, M)$ este modulul de continuitate al lui f și h .

Pentru a demonstra că V satisface PPD vom considera, pentru $\epsilon > 0$, ecuația penalizată:

$$(60) \quad \begin{cases} dX_\epsilon(t) + \nabla \varphi_\epsilon(X_\epsilon(t)) dt = b(t, X_\epsilon(t), \Theta_\epsilon(t), \Pi_\epsilon(t), u(t)) dt + \sigma(t, X_\epsilon(t), \Theta_\epsilon(t), Z_\epsilon(t), u(t)) dW(t), \quad t \in (s, T], \\ X_\epsilon(t) = \xi(t - s), \quad t \in [s - \delta, s], \end{cases}$$

și vom asocia funcția valoare penalizată $V_\epsilon(s, \xi)$.

Rezultatul principal al acestei secțiuni este demonstrarea că funcția valoare V satisface PPD.

Având în vedere că V este definită pe $[0, T] \times C([- \delta, 0]; \overline{\text{Dom}(\varphi)})$, ecuația HJB asociată va fi o EDP infinit dimensională. În general funcția valoare $V(s, \xi)$ depinde de traiectoria inițială într-un mod complicat. În scopul simplificării problemei, conjectura noastră va fi că funcția valoare V depinde de ξ doar prin intermediul lui (x, y) , unde $x = x(\xi) := \xi(0)$ și $y = y(\xi) := \int_{-\delta}^0 e^{\lambda r} \xi(r) dr$.

Deci problema poate fi redusă la o problemă finit dimensională de control optimal lucrând cu noua funcție valoare $\tilde{V}$ definită de $\tilde{V} : [0, T] \times \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{V}(s, x, y) := V(s, \xi)$. Scopul nostru este să demonstrăm că funcția valoare $\tilde{V}$ este soluție de vâscozitate pentru următoarea ecuație HJB:

$$(61) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial s}(s, x, y) + \sup_{u \in U} \mathcal{H}(s, x, y, z, u, -D_x \tilde{V}(s, x, y), -D_{xx}^2 \tilde{V}(s, x, y)) \\ \quad - \langle x - e^{-\lambda \delta} z - \lambda y, D_y \tilde{V}(s, x, y) \rangle \in \langle -D_x \tilde{V}(s, x, y), \partial \varphi(x) \rangle, \\ \tilde{V}(T, x, y) = h(x, y) \end{cases}$$

unde $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^{3d} \times U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ este definit de

$$\mathcal{H}(s, x, y, z, u, q, p) := \langle b(s, x, y, z, u), q \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \sigma^*)(s, x, y, z, u) p - f(s, x, y, u).$$

Teoremă. Funcția valoare $\tilde{V}$ este soluție de vâscozitate pentru (61).

În cadrul obiectivelor anterioare ale proiectului a fost realizat suplimentar* studiul problemelor de existență și unicitate a unei soluții tari, precum și comportarea asimptotică și un principiu de maxim pentru inecuația variațională stohastică:

$$(62) \quad \begin{aligned} (i) \quad & u \in L_{ad}^p(\Omega \times (0, T); V) \cap L_{ad}^2(\Omega; C([0, T]; H)) \\ (ii) \quad & du(t) + A(t, u(t))dt + \partial I_{K(t)}(u(t))dt \ni g(t, u)dw(t), \text{ în } \Omega \times (0, T) \\ (iii) \quad & u(0, x) = u_0(x), \text{ în } \Omega \times D, \end{aligned}$$

unde D este o mulțime deschisă și mărginită din $\mathbb{R}^N$, V este un spațiu Banach, reflexiv, separabil.

În ceea ce privește barierele, considerăm $\psi_1, \psi_2 : [0, T] \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 \in H^{1,2}((0, T) \times D) \cap L^p(0, T; V)$, $\psi_1(t, x) \leq \psi_2(t, x)$, $\forall (t, x) \in [0, T] \times D$ și mulțimile-restricții dependente de timp caracterizate prin:

$$\begin{aligned} K(t) &= \{h \in H : h(x) \geq \psi_1(t, x), \text{ a.p.t. } x \in D\} = [[\psi_1(t), +\infty)) \text{ sau} \\ K(t) &= \{h \in H : h(x) \leq \psi_2(t, x), \text{ a.p.t. } x \in D\} = ((-\infty, \psi_2(t)]) \text{ sau} \\ K(t) &= \{h \in H : \psi_1(t, x) \leq h(x) \leq \psi_2(t, x), \text{ a.p.t. } x \in D\} = [[\psi_1(t), \psi_2(t)]]. \end{aligned}$$

Ipoteza specifică studiului problemei (62) se referă la proprietățile difuziei $g : [0, T] \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ce este măsurabilă și pentru care există $L, M > 0$ și $\alpha \in [1/2, 1]$ a.î., $\forall r, q \in \mathbb{R}$, a.p.t. $(t, x) \in [0, T] \times D$,

$$|g(t, x, r) - g(t, x, q)| \leq L|r - q|^\alpha \quad \text{și} \quad |g(t, x, r)| \leq M(1 + |r|).$$

Privitor la domeniile de reflexie, presupunem că există $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in H^{1,0}((0, T) \times D)$, $\xi_i \geq 0$ a.p.t., $\forall i = 1, 2, 3$, $\xi_3 \leq 1$ a.p.t., a.î. $\psi \in L^p(0, T; V) \cap H^{2,0}((0, T) \times D)$ și $A(\psi) \in L^2((0, T) \times D)$, unde

$$\psi := \begin{cases} \psi_1 + \xi_1, & \text{dacă } K(t) = [[\psi_1(t), \infty)) \\ \psi_2 - \xi_2, & \text{dacă } K(t) = ((-\infty, \psi_2(t)]) \\ (1 - \xi_3)\psi_1 + \xi_3\psi_2, & \text{dacă } K(t) = [[\psi_1(t), \psi_2(t)]] \end{cases}$$

Studiem, într-o primă etapă, existența și unicitatea unei soluții tari pentru problema de reflexie (62). Pentru aceasta, impunem o condiție tehnică asupra difuziei. Mai precis, în ipoteza $g(t, x, \psi_1(t, x)) = g(t, x, \psi_2(t, x)) = 0$, pentru orice $(t, x) \in [0, T] \times D$, obținem și existența unui feedback absolut continuu, ce menține soluția u în interiorul domeniului convex de reflexie. Renunțând apoi la această condiție restrictivă, furnizăm un rezultat de existență a unei soluții slab variaționale pentru ecuația multivocă.

Teoremă. În ipoteze convenabile impuse datelor problemei de reflexie (62), există o pereche unică de procese stochastice $(u, h) \in [L_{ad}^p(\Omega \times (0, T); V) \cap L_{ad}^2(\Omega; C([0, T]; H))] \times L_{ad}^2(\Omega \times (0, T); H)$ a.î., pentru toți $t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$ -a.s.,

$$(63) \quad \begin{aligned} (i) \quad & u(t) \in K(t), \quad (ii) \quad h(t) \in \partial I_{K(t)}(u(t)), \text{ a.p.t. în } \Omega \times (0, T), \\ (iii) \quad & u(t) + \int_0^t A(s, u(s))ds + \int_0^t h(s)ds = u_0 + \int_0^t G(s, u(s))dW(s), \end{aligned}$$

egalitatea (63-iii) având loc în V^* . În plus, dacă (u_1, h_1) și (u_2, h_2) , sunt două soluții, corespunzătoare datelor inițiale u_{01} și u_{02} , atunci, pentru fiecare $0 \leq s \leq t \leq T$:

*Rezultatele din cadrul acestui obiectiv sunt parte a lucrării [21].

dacă $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $\mathbb{E}(|u_1(t) - u_2(t)|_1 | \mathcal{F}_s) \leq e^{\lambda(t-s)} |u_1(s) - u_2(s)|_1$, $\mathbb{P}$ -a.s.,

dacă $\alpha = 1$, atunci, pentru $C(T) := \exp(T(4|\lambda| + 14L^2|Trq|_\infty))$, au loc estimările

- (i) $\mathbb{E}(|u_1(t) - u_2(t)|_2^2 | \mathcal{F}_s) \leq |u_1(s) - u_2(s)|_2^2 e^{(t-s)(\lambda + \frac{L^2}{2}|Trq|)} , \mathbb{P}$ -a.s.,
- (ii) $\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |u_1(t) - u_2(t)|_2^2) \leq 4\mathbb{E}(|u_{01} - u_{02}|_2^2)C(T)$.

Furnizăm, de asemenea, un **principiu de maxim**. Enunțăm o condiție pentru existența unei soluții tari unice $u \in L_{ad}^2(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L_{ad}^p(\Omega \times (0, T); V)$ pentru problema

(64) $du(t) + A(t, u)dt = g(t, u)dW(t)$, $\mathbb{P}$ -a.s., în $(0, T) \times D$, $u(0) = u_0$, $\mathbb{P}$ -a.s., în D , $u(t) \in K(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$ -a.s.

Problema (64) este echivalentă cu găsirea unei soluții pentru (63), cu componenta secundă $h = 0$. Considerăm fiecare caz în parte pentru structura mulțimii $K(t)$. În situația $K(t) = [[\psi_1(t), +\infty))$ (celelalte situații se tratează în mod similar), are loc următorul rezultat de existență și unicitate.

Teoremă. În ipotezele cadrului de lucru anterior, dacă $A(\psi_1) \leq 0$, $\mathbb{P}$ -a.s., a.p.t. în $(0, T) \times D$, atunci problema (64) admite o soluție unică

$$u \in L_{ad}^p(\Omega \times (0, T); V) \cap L_{ad}^2(\Omega; C([0, T]; H)).$$

Renunțăm acum la restricția impusă barierelor ψ_1, ψ_2 și construim cadrul de lucru pentru existența unei soluții slab variaționale. Preupunem pentru aceasta că $A(t, u) := A_0(u) - F(t, u)$, cu $A_0 \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $A_0 = A_0^*$, $\langle A_0(v), v \rangle \geq \alpha_0 \|v\|_V^2$, $\forall v \in V$ ($\alpha_0 > 0$) iar $F(t, \cdot) : V \rightarrow H$, $\forall t$ este Lipschitz și are creșteri subliniare în raport cu al doilea argument. De asemenea, solicităm ca incluziunea $V \subset H$ să fie compactă.

Notăm cu $\mathcal{W}^{\mathbb{F}}(\Omega \times (0, T); K)$ spațiul proceselor stochastice adaptate (în raport cu filtrarea $\mathbb{F}$ considerată pe spațiul inițial de probabilitate) $v \in L_{ad}^2(\Omega; C([0, T]; H)) \cap L_{ad}^2(\Omega \times (0, T); V)$ de forma $v(t) = v_0 + \int_0^t d\eta(s) + \int_0^t \tilde{v}(s)dW(s)$, cu $v_0 \in H$, $\eta \in C([0, T]; V^*)$ și $\tilde{v} \in L_{ad}^2(0, T; \mathcal{L}_Q^2(H))$, a.î. $v(\omega, t) \in K$, $\mathbb{P}$ -a.s., dt-a.p.t.

Definiție. Colecția $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{\mathbb{F}} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \bar{W}, \bar{u})$ este o soluție slab variațională pentru problema (62) dacă

- (i) $\bar{W}$ este un H -proces Wiener, definit pe $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{\mathbb{F}})$, cu operatorul de covarianță Q ,
- (ii) $\bar{u} \in L^2(\bar{\Omega} \times (0, T); V)$, $\bar{u}$ este un proces stochastic $\bar{\mathcal{F}}_t$ -progresiv măsurabil,
- (iii) $\bar{u}(t) \in K$, $\bar{\mathbb{P}}$ -a.s., a.p.t. $t \in (0, T)$,
- (iv) $H(v, \bar{u}) \geq 0$, pentru fiecare $v \in \mathcal{W}^{\bar{\mathbb{F}}}(\bar{\Omega} \times (0, T); K)$,

unde

$$\begin{aligned} H(v, u) := & \mathbb{E} \int_0^T \langle v(r) - u(r), A_0(u(r)) - F(r, u(r)) \rangle dr + \mathbb{E} \int_0^T \langle v(r) - u(r), d\eta(r) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T \text{Tr}(\tilde{v}(r) - \tilde{G}(u(r)))Q(\tilde{v}(r) - \tilde{G}(u(r)))dr + \frac{1}{2} \mathbb{E} |v_0 - u_0|_2^2. \end{aligned}$$

Rezultatul principal al acestei secțiuni a studiului este furnizat în continuare. Probleme ce apar constau în asigurarea cadrului de adaptabilitate pentru funcțiile test cu care se lucrează. Se utilizează criterii de tightness, ceea ce permite apoi folosirea teoremelor lui Skorohod și Prohorov, asigurând astfel existența unor șiruri echivalente în lege cu soluțiile ecuațiilor aproximante. Aceasta conduce, în final, la identificarea soluției inecuației variaționale considerate. Problema unicității soluției este, pentru moment, o problemă deschisă.

Teoremă. În ipoteza că incluziunea $V \subset H$ este una compactă, eliminând restricția impusă barierelor dar păstrând restul ipotezelor ce asigură existența și unicitatea unei soluții tari, problema (62) admite cel puțin o soluție slab variațională, în sensul definiției anterioare.

De asemenea, în cadrul proiectului, a fost elaborată și monografia [22]. Obiectivul aceste monografii este acela de a prezenta rezultate importante din teoria EDS și a EDSR, împreună cu aplicațiile lor în studiul EDP de ordinul doi, liniare și semiliniare, atât de tip eliptic cât și parabolic, cu diverse tipuri de condiții la frontieră. În particular, introducem o versiune originală a celebrei formule de reprezentare Feynman–Kac. Unul dintre scopurile principale ale lucrării vizează extinderi ale acestei formule la EDP semiliniare, prin intermediul sistemelor cuplate de EDS și EDSR.

Menționăm și prezentăm succint capitolele monografiei: **Chapter 1.** Background of stochastic analysis (pp. 17-92); **Chapter 2.** Itô's stochastic calculus (pp. 93-156); **Chapter 3.** Stochastic Differential Equations (pp. 157-250); **Chapter 4.** SDE with multivalued drift (pp. 251-380); **Chapter 5.** Backward SDE (pp. 381-562); **Annexes** (pp. 563-707).

Capitolele 1 și 2 prezintă instrumente și rezultate (unele clasice, altele originale) din teoria proceselor stochastice și de analiză neliniară și analiză convexă.

Capitolul 3 furnizează o analiză completă și detaliată a teoriei existenței și unicității soluțiilor tari pentru EDS generale, a căror coeficienți pot fi aleatori. Analizăm atât cazul Lipschitz cât și cel în care coeficienții satisfac condiții de monotonie. Considerăm situații în care avem condiții de monotonie globale dar și cazul în care sunt doar condiții locale. În continuare studiem EDS cu coeficienți determinați și prezentăm proprietatea Markov a soluției.

Capitolul 4 studiază EDS multivoce, coeficientul de drift fiind guvernat de operatorul subdiferențial al unei funcții convexe. Considerăm cazul reflexiei normale, dar și cel al reflexiei oblice. În continuare este analizată din nou proprietatea Markov a soluției ecuației reflectate și sunt stabilite formule de reprezentare de tip Feynman-Kac pentru EDP parabolice și eliptice cu condiții Neumann la frontieră.

Capitolul 5 este dedicat studiului EDSR. Considerăm, din nou, ecuații cu coeficienți Lipschitz sau ce satisfac condiții de monotonie. Spre deosebire de cazul progresiv, nu există o teorie generală privind existența și unicitatea pentru cazul coeficienților local Lipschitz sau ce satisfac condiții de monotonie locale. Considerăm EDSR guvernate de operatorul subdiferențial al unei funcții convexe, fapt ce permite studiul EDSR reflectate la frontiera unui domeniu convex.

Ultimul capitol conține rezultate tehnice variate ce sunt folosite pe parcursul lucrării.

În cadrul proiectului, doi membri, respectiv Bakarime Diomande și Anouar Gassous, și-au finalizat tezele de doctorat sub conducerea d-lui prof. dr. Aurel Rășcanu. Dl. B. Diomande a susținut în ședință publică în data de 18.09.2013, teza de doctorat cu titlul "Ecuații diferențiale stochastice cu întârziere, controlate", iar dl. A. Gassous a susținut în cadrul comisiei interne în data de 25.09.2013, teza de doctorat cu titlul "Reflexia oblică în modele stochastice", susținere în ședință publică fiind programată pentru data de 07.11.2013.

În scopul atingerii rezultatelor stipulate de obiectivele științifice propuse și a demarării unor noi direcții de cercetare s-au efectuat stagii de cercetare în străinătate (ca activități asociate obiectivelor menționate) de către membrii echipei de cercetare:

- Lucian Maticiuc și Adrian Zălinescu: deplasări la Université du Sud-Toulon-Var, Franța, în lunile martie și noiembrie 2012; colaborare cu Prof. Khaled Bahlali, concretizată prin rezultate obținute în articolul [1];
- Aurel Rășcanu: deplasare la Université de Bretagne Occidentale, Brest, Franța, în perioada 26.04.2012-11.05.2012; colaborare științifică cu Prof. Rainer Buckdahn (cercetător în cadrul acestui proiect) în vederea redactării articolului [2];
- Aurel Rășcanu: deplasare la Université du Provence, Marsilia, Franța, în perioada 02.06.2012-09.06.2012; colaborare științifică cu Prof. Etienne Pardoux în vederea finalizării monografiei comune [22].
- Eduard Rotenstein: deplasare la Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakesh, Morocco, în perioada 02.04.2013-20.04.2013; colaborare cu Prof. Eddahbi M'hamed.
- Aurel Rășcanu: deplasare la Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Paris, Franța, în perioada 24.08.2014 - 09.09.2014; colaborare științifică cu prof. Dan Goreac.
- Lucian Maticiuc: deplasare la Università degli Studi di Trento, Trento, Italia, în perioada 25.10.2014 - 22.11.2014, 07.03.2015 - 04.04.2015; colaborare cu prof. Luca di Persio, concretizată prin rezultatele obținute în articolul [3].

Obiectivele științifice au fost realizate în totalitate prin publicarea sau trimiterea spre publicare a următoarelor articole:

1. K. Bahlali, L. Maticiuc, A. Zălinescu, *Penalization method for a nonlinear Neumann PDE via weak solutions of reflected SDEs*, Electronic Journal of Probability (IF=0.765, RIS=1.644), vol. 18, article 102, 1-19 (2013) (<https://projecteuclid.org/euclid.ejp/1465064327>).

2. **R. Buckdahn, L. Maticiuc, E. Pardoux, A. Răşcanu**, *Stochastic Variational Inequalities on Non-Convex Domains*, Journal of Differential Equations, vol. 259, no. 12, 7332–7374 (2015) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002203961500426X>).
3. F. Cordini, L. Di Persio, **L. Maticiuc, A. Zălinescu**, *A stochastic approach for path dependent nonlinear Kolmogorov equations via BSDEs with time-delayed generators*, trimisă spre publicare (<http://arxiv.org/abs/1602.05793v2>).
4. **B. Diomande, L. Maticiuc**, *Multivalued Backward Stochastic Differential Equations with Time Delayed Generators*, Central European Journal of Mathematics 12 (2014), 1624–1637 (IF=0.519, SRI=0.625) (<http://link.springer.com/article/10.2478%2Fs11533-014-0434-x>).
5. **B. Diomande, L. Maticiuc**, *Multivalued Stochastic Delay Differential Equations and Related Stochastic Control Problems*, trimisă spre publicare la revista Quaestiones Mathematicae (<http://arxiv.org/abs/1305.7003>).
6. **B. Diomande, A. Zălinescu**, *Maximum principle for an optimal control problem associated to a stochastic variational inequality with delay*, Electronic Journal of Probability, vol. 20, no. 12, 1–35 (2015) (<https://projecteuclid.org/euclid.ejp/1465067118>).
7. **A. Gassous**, *A Skorohod problem driven by Clarke subdifferential and applications to SDEs*, acceptat spre publicare la revista Annals of the Alexandru Ioan Cuza University – Mathematics (IF=0.108).
8. **A. Gassous, A. Răşcanu, E. Rotenstein**, *Multivalued backward stochastic differential equations with oblique subgradients*, Stochastic Processes and their Applications, vol. 125, no. 8, 3170–3195 (2015) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030441491500068X>).
9. **A. Gassous, A. Răşcanu, E. Rotenstein**, *Stochastic variational inequalities with oblique subgradients*, Stochastic Processes and their Applications (IF=0.953, SRI=1.666), vol. 122, no. 7, 2668–2700 (2012). (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030441491200083X>).
10. D. Goreac, C.A. Grosu, **E. Rotenstein**, *Approximate and approximate null-controllability of a class of piecewise linear Markov switch systems*, Systems & Control Letters, 96, 118–123 (2016) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691116300998>).
11. **L. Maticiuc, A. Răşcanu**, *Backward Stochastic Variational Inequalities on Random Interval*, Bernoulli, vol. 21, no. 2, 1166–1199 (2015) (<http://projecteuclid.org/euclid.bj/1429624974>).
12. **L. Maticiuc, A. Răşcanu**, *L^p -Solutions of Generalized Reflected Backward Stochastic Differential Equations*, trimisă spre publicare.
13. **L. Maticiuc, A. Răşcanu**, *On the continuity of the probabilistic representation of a semilinear Neumann–Dirichlet problem*, Stochastic Processes and their Applications, vol. 126, no. 2, 572–607 (2016) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030441491500229X>).
14. **L. Maticiuc, A. Răşcanu, L. Słomiński, M. Topolewski**, *Càdlàg Skorokhod problem driven by a maximal monotone operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 429, no. 2, 1305–1346 (2015) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X15003807>).
15. **L. Maticiuc, A. Răşcanu, A. Zălinescu**, *Backward stochastic variational inequalities with locally bounded generators*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics (IF=0.188), vol. 60, no. 2, 503–526 (2014) (<http://www.degruyter.com/view/j/aicu.2014.60.issue-2/aicu-2013-0023/aicu-2013-0023.xml>).
16. **L. Maticiuc, E. Rotenstein**, *Anticipated Backward Stochastic Variational Inequalities with Generalized Reflection*, trimisă spre publicare la revista Stochastic and Dynamics.
17. **L. Maticiuc, E.-P. Rotenstein**, *Numerical Schemes for Multivalued Backward Stochastic Differential Systems*, Central European Journal of Mathematics (IF=0.405, SRI=0.625), vol. 10, no. 2, 693–702 (2012) (<http://link.springer.com/article/10.2478%2Fs11533-011-0131-y>).
18. E. Pardoux, **A. Răşcanu**, *Continuity of the Feynman-Kac formula for a generalized parabolic equation*, acceptată spre publicare la revista Stochastics.
19. **A. Răşcanu, E. Rotenstein**, *A comprehensive qualitative analysis of evolution equations featuring a multivalued Fréchet driver*, trimisă spre publicare la revista Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications.
20. **A. Răşcanu, E. Rotenstein**, *A non-convex setup for multivalued differential equations driven by oblique subgradients*, Nonlinear Analysis (IF=1.612, SRI=1.755), vol. 111, 82–104 (2014). (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X14002818>).

21. **A. Răşcanu, E. Rotenstein**, *Obstacle problems for parabolic SDEs with Hölder continuous diffusion: from weak to strong solutions*, acceptat cu revizii minore la Journal of Mathematical Analysis and Applications.

De asemenea, în cadrul proiectului, a fost elaborată şi monografia:

22. E. Pardoux, **A. Răşcanu**, *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations*, Springer Series: Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 69, Berlin, Springer (2014).

Achiziţionarea de echipamente s-a desfăşurat conform planificării. În ceea ce priveşte diseminarea rezultatelor obţinute, colaborarea cu alţi cercetători în domeniu precum şi prezentarea şi analiza rezultatelor parţiale a fost realizată în cadrul Seminarului Ştiinţific de *Analiză Stochastică şi Aplicaţii* din cadrul Facultăţii de Matematică, Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” Iaşi, al lucrărilor ştiinţifice ale Institutului de Matematică “Octav Mayer”, Academia Română, filiala Iaşi. precum şi prin participarea la manifestări ştiinţifice internaţionale:

- L. Maticiuc, Workshop on Deterministic and Stochastic Dynamical Systems and Applications, *Generalized BSDE on Random Time Interval; Variational Weak Formulation*, Voronet, România, 3-7 septembrie, 2012.
- L. Maticiuc, Workshop on Stochastic Analysis and Applications, *Variational Weak Solution of Backward Stochastic Variational Inequalities*, El Kelaa Mgouna, Maroc, 9-14 aprilie 2012.
- A. Răşcanu, Workshop on Deterministic and Stochastic Dynamical Systems and Applications, *From Deterministic to Stochastic Variational Inequalities in Non-Convex Domains*, Voronet, România, 3-7 septembrie, 2012.
- E. Rotenstein, 8th World Congress in Probability and Statistics, *Qualitative and quantitative results for stochastic variational inequalities with oblique subgradients*, Istanbul, Turcia, 9-14 iulie, 2012.
- E. Rotenstein, Workshop on Deterministic and Stochastic Dynamical Systems and Applications, *A generalized Skorohod problem with oblique reflection*, Voronet, România, 3-7 septembrie, 2012.
- A. Zălinescu, Workshop on Stochastic Analysis and Applications, *A penalization method for the weak solution of reflected SDE*, El Kelaa Mgouna, Maroc, 9-14 aprilie 2012.
- A. Zălinescu, 6th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, *Stochastic variational inequalities driven by Poisson random measures*, Bedlewo, Polonia, 10-14 Septembrie 2012.
- A. Răşcanu, *Càdlàg reflected problems with elastic projections*, 12ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Lyon, 25-30 August, 2014.
- E. Rotenstein, *Multivalued BSDEs with oblique subgradients*, 12ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Lyon, 25-30 August, 2014.
- L. Maticiuc, *Backward stochastic variational inequalities with time-delayed generators*, prezentare/Seminar, Aula Seminari, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, Trento, Italia, 3 Aprilie, 2014.
- L. Maticiuc, *Stochastic Differential Delay Systems and Optimal Control Problems*, prezentare/Seminar, Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona, Verona, Italia, 9 Aprilie, 2014.
- L. Maticiuc, *Path dependent partial differential equation with applications in Mathematical Finance*, prezentare/Seminar, Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona, Verona, Italia, 13:30-15:30, 20 Noiembrie, 2014.
- A. Răşcanu, *On the continuity of the probabilistic representation of a semilinear Neumann-Dirichlet problem*, Workshop on “Stochastic Analysis, Controlled Dynamical Systems and Applications”, 09-13 Martie, Jena, Germania, 2015.
- A. Răşcanu, *Formule de representation probabiliste pour une inéquation variationnelle parabolique: l’approche du probleme de la continuité via la compacité dans la S-topologie de Jakubowski*, Colloque Franco-Roumain en Theorie des Probabilités, 30 Octobre – 1 Novembre, Bucureşti, Romania, 2015.
- L. Maticiuc, *A Cadlag Skorohod problem driven by a maximal monotone operator*, Sesiunea de Comunicari Stiintifice a Facultatii de Matematica, Iaşi, Romania, 23 Octombrie, 2015.
- L. Maticiuc, *Viscosity solutions for functional parabolic PDEs. A stochastic approach via BSDEs with time-delayed*, The Eighth Congress of Romanian Mathematicians, Iaşi, Romania, 26 Iunie – 1 Iulie, 2015.
- L. Maticiuc, *A Multivalued Cadlag Reflected Problem*, International Conference on Applied and Pure Mathematics, Iaşi, Romania, 6 – 8 Noiembrie, 2015.

- A. Zălinescu, *A Boundary Control Problem for a Stochastic PDE with Nonlinear Dynamical Boundary Conditions*, International Conference on Applied and Pure Mathematics, Iași, Romania, 6 – 8 Noiembrie, 2015.
- A. Rășcanu, *On the continuity of the Feynman-Kac Formula*, XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Iași, Romania, 25–29 August, 2016.
- L. Maticiuc, *A Generalized Skorokhod Problem with Càdlàg Discontinuities*, XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Iași, Romania, 25–29 August, 2016.
- E. Rotenstein, *Infection Time in Multi-Stable Gene Networks. A BSVI With Non-Convex, Switch-Dependent Reflection Models*, XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Iași, Romania, 25–29 August, 2016.
- A. Zălinescu, *Jump diffusions with oblique subgradients*, XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Iași, Romania, 25–29 August, 2016.

Director contract

Prof. dr. Aurel Rășcanu